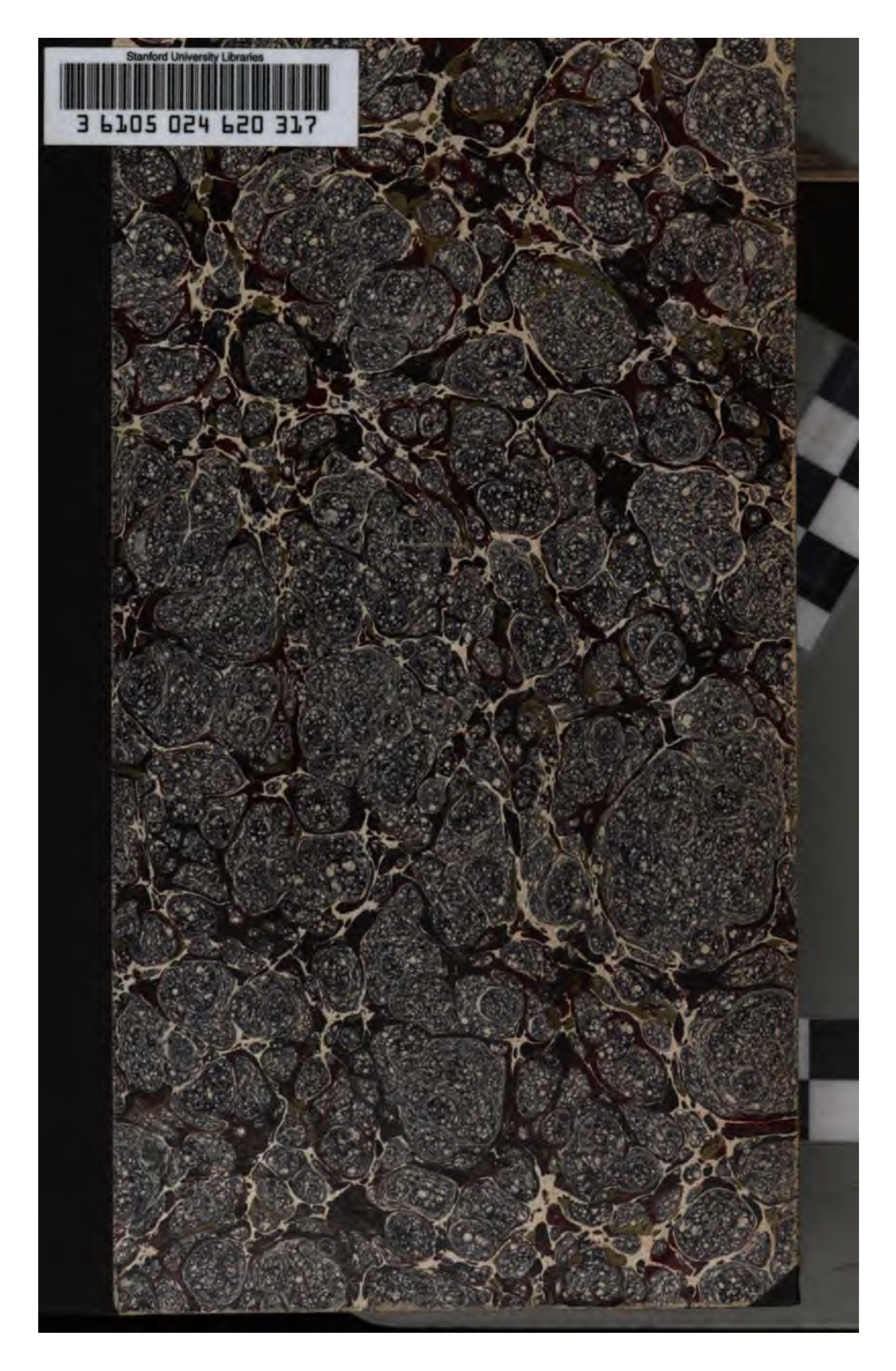
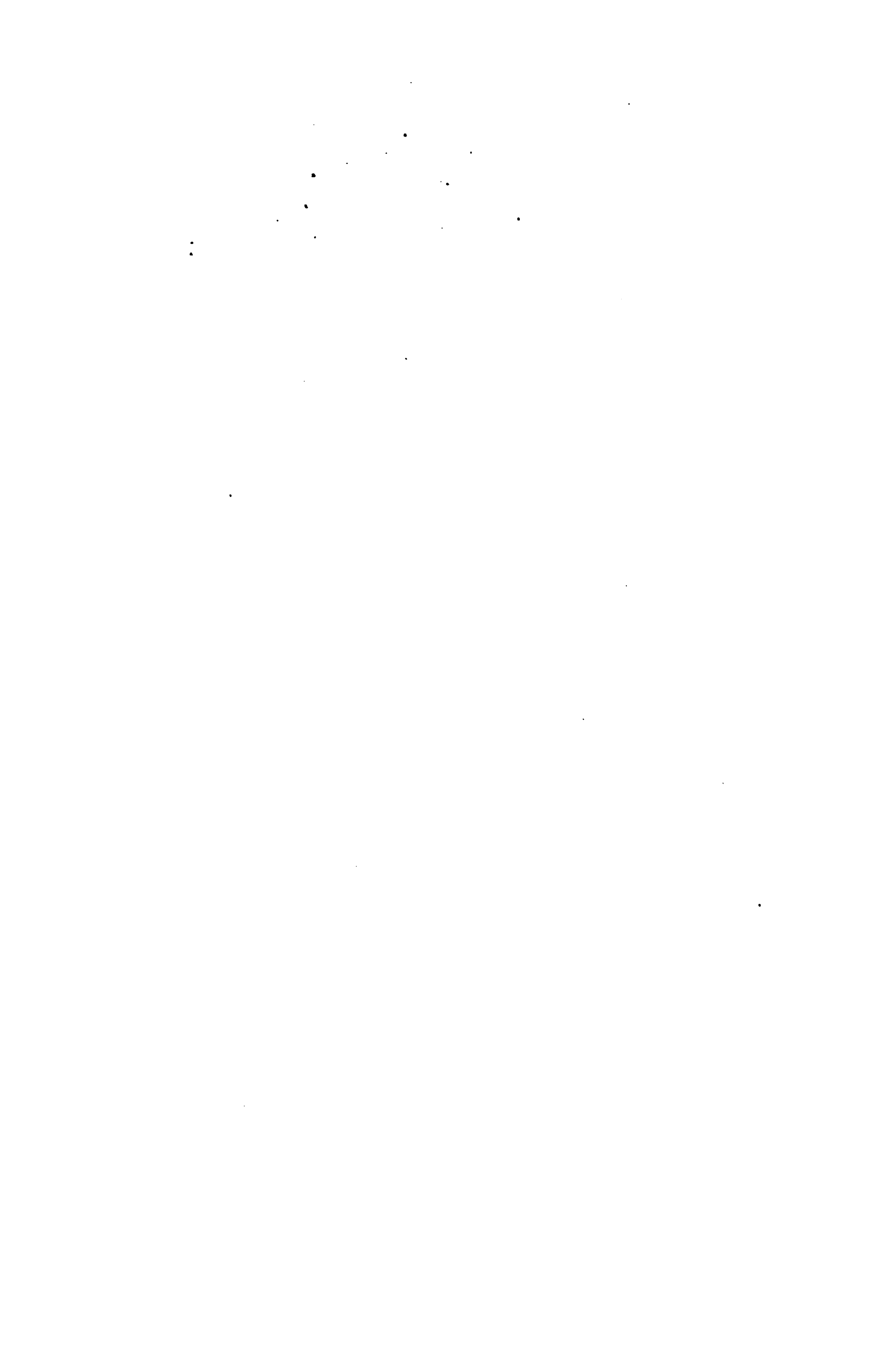






# Archiv

der

# Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

***Johann August Grunert,***

Professor zu Greifswald.

Sechsundzwanzigster Theil.

Mit neun lithographirten Tafeln.

**Greifswald.**

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

**1856.**

# Inhaltsverzeichniss des sechsundzwanzigsten Theils.

## Arithmetik.

## Geometrie.

## Trigonometrie.

## Literarische Berichte *).



*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

# I.

# Beiträge zur Summirung der Reihen.

Von

Herrn Hofrath *Oettinger*

zu Freiburg i. B.

## I. Summirung der reciproken Potenzenreihen.

### §. 1.

Die Grundlage für die Summirung einfacher Reihen, deren Glieder mit einerlei oder abwechselnden Gliedern versehen sind, bilden folgende Gleichungen:

$$1) \qquad X_0 + X_1 + X_2 + \ldots . X_n = \Delta^{-1} X_{n+1} - \Delta^{-1} X_0,$$

$$2) \quad X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \ldots . (-)^n X_n = (-)^n \zeta^{-1} X_{n+1} + \zeta^{-1} X_0.$$

$X$ bedeutet hier irgend eine Function von $x$; die Glieder der Reihe entstehen dadurch, dass $x$ je um einen bestimmten Werth ($\Delta x$) wächst, und $X_0 = fx$, $X_n = f(x + n\Delta x)$ bedeutet. Das Vielfache der Zunahme ist durch die Stellenzahlen angezeigt. $\Delta^{-1}$ bezeichnet den ersten negativen Unterschied (wofür auch das Zeichen $\Sigma$ geschrieben wird) und $\zeta^{-1}$ die erste negative Aufstufung der Functionen, welche die einzelnen Glieder der zu summirenden Reihe erzeugt. Die Begründung der beiden vorstehenden Gleichungen findet sich in meiner Lehre von den aufsteigenden Functionen. §. 72. nachgewiesen.

So oft die Darstellung von $\Delta^{-1}$ und $\zeta^{-1}$ für irgend eine Function gelingt, kann man auch die fragliche Reihe summiren. Da man nun, wie ich schon in der oben angeführten Schrift und später auch in meiner Theorie der analytischen Functionen §. 19 u. 20.

gezeigt habe, die negativen Unterschiede und Aufstufungen der Functionen darstellen kann, so wird es auch möglich sein, jede im einzelnen Falle vorliegende, durch irgend eine Function erzeugte Reihe zu summiren.

Die Darstellung des Summenausdrucks einer Reihe beruht nun auf Entwicklung der zwei in 1) und 2) angezeigten Ausdrücke. Beide sind wesentliche Bestandtheile des Summenausdrucks und werden auf eine und dieselbe Weise erzeugt. Man kann die Summe auch zwischen den Grenzen $a$ und $n$ nehmen. Dann entstehen folgende Ableitungs-Gleichungen:

3) $$X_a+X_{a+1}+X_{a+2}\ldots\ldots X_{a+n}=\varDelta^{-1}X_{a+n+1}-\varDelta^{-1}X_a,$$

4) $$X_a-X_{a+1}+X_{a+2}-\ldots\ldots(-)^n X_{a+n}=(-)^n\zeta^{-1}X_{a+n+1}-\zeta^{-1}X_a$$

für $n>a$. Bis jetzt hat man sich vorzugsweise mit Summirung von Reihen, deren Glieder mit einerlei Zeichen verbunden sind, beschäftigt, und die Summirung der Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, wenig oder gar nicht beachtet. Die Reihen der letzten Art machen sich aber in einer systematischen Behandlundsweise wohl selbstverständlich geltend und können ferner nicht aus der Theorie der Summenrechnung ausgeschlossen bleiben, worauf ich schon im 13ten Theil dieses Archivs p. 36. in einem Aufsatze über Differenzen- und Summenrechnung hingewiesen habe. Euler hat sich zwar im 2ten Theile seiner „Differenzialrechnung" mit Summirung von Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, beschäftigt, hat aber hiefür keine Theorie gegeben, sondern sich nur auf Summirung der Potenzenreihen beschränkt. Der von ihm für diesen speciellen Fall gewählte Entwickelungsgang ist aber sehr mühevoll und lohnt mit geringer Ausbeute, wie die von ihm gegebenen Resultate zeigen. Diess mag wohl der Grund gewesen sein, warum bis jetzt dieser nicht uninteressante Zweig der Summenrechnung weniger, als er verdient, berücksichtigt wurde.

Die Gleichungen 2) und 4) bilden die Grundlage, worauf derselbe auf gleich erfolgreiche Weise bearbeitet werden kann, wie es bei den Reihen der ersten Art bereits geschehen ist, und ich verweise in dieser Beziehung auf die oben angeführten Schriften, worin die Belege hiezu gegeben sind.

In den Gleichungen 1)—4) sind die Grenzen, zwischen welchen die Summe einer Reihe genommen werden soll, willkührlich und hängen daher von der Annahme des Werthes für $a$ und $n$ ab. Ausser dieser Annahme aber ist nichts der Willkühr überlassen. Man hat nun, da man sich nur mit den in 1) und 3) bezeichneten

Reihen beschäftigte, $\Delta^{-1}X_{n+1}$ und $\Delta^{-1}X_{a+n+1}$ (oder $\Sigma X_{n+1}$, $\Sigma X_{a+n+1}$) den Summenausdruck und $\Delta^{-1}X_0$ oder $\Delta^{-1}X_a$ die willkührlich zu bestimmende Constante genannt. Diese Benennung ist in so ferne nicht richtig, als die Darstellung der Summe wesentlich auf der Werthermittelung beider Ausdrücke, nicht des einen allein beruht, wie diess der Fall bei Darstellung der Summenausdrücke für alle begrenzte Reihen ist. Nur dann tritt $\Delta^{-1}X_{n+1}$ und $\Delta^{-1}X_{a+n+1}$ vorzugsweise als Summenausdruck auf, wenn $\Delta^{-1}X_0$ oder $\Delta^{-1}X_a$ eine solche Gestalt erhält, dass der hiefür sich ergebende Ausdruck verschwindet. Aber auch im Falle des Verschwindens unterliegt dieser Ausdruck häufig einer besondern Beachtung, wie diess bei der Summirung der Potenzenreihen vorkommt.

Bei Darstellung der Summe kann aber auch der Fall eintreten, dass $\Delta^{-1}X_{n+1}$ oder $\Delta^{-1}X_{a+n+1}$ verschwindet und dann tritt die Werth-Bestimmung von $\Delta^{-1}X_0$ und $\Delta^{-1}X_a$ als Hauptaufgabe auf. Die hieraus sich ergebenden Ausdrücke erscheinen dann keineswegs als willkührlich zu bestimmende Constanten, sondern als Grenzwerthe der in Frage stehenden Summen. Diess kommt z. B. bei Darstellung der Summenausdrücke für die reciproken Potenz-Reihen und Facultäten-Reihen vor, womit wir uns näher hier beschäftigen wollen, wobei wir jedoch den Sprachgebrauch, wie er sich einmal gebildet hat, beibehalten werden.

## §. 2.

Wir wenden uns nun zur Summirung der reciproken Potenzreihen. Die Ausdrücke, welche hier in Betrachtung kommen, und die sich in den oben genannten Schriften entwickelt finden, sind in allgemeiner Form folgende:

$$1)\quad \frac{1}{x^p}+\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+3\Delta x)^p}+\cdots\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}$$

$$=\frac{1}{(p-1)x^{p-1}.\Delta x}+\frac{1}{2x^p}+\frac{p\Delta x}{6.2x^{p+1}}-\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{30.4x^{p+3}}+\frac{[p]_5(\Delta x)^5}{42.6.x^{p+5}}-\cdots$$

$$-\frac{1}{(p-1)(x+n\Delta x)^{p-1}\Delta x}+\frac{1}{2(x+n\Delta x)^p}-\frac{p.\Delta x}{6.2(x+n\Delta x)^{p+1}}$$

$$+\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{30.4(x+n\Delta x)^{p+3}}-\cdots$$

Bei unendlich zunehmendem $n$ verschwindet die zweite Reihe und die erste bildet den Grenzwerth für die unendlich fortlaufende Reihe:

$$2)\quad \frac{1}{x^p}+\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+3\Delta x)^p}+\dots=\frac{1}{(p-1)x^{p-1}\Delta x}$$
$$+\frac{1}{2x^p}+\frac{p\Delta x}{6.2.x^{p+1}}-\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{30.4x^{p+3}}+\frac{[p]_5(\Delta x)^5}{42.6.x^{p+5}}-\dots$$

Die Coefficienten der einzelnen Glieder sind die Bernoullischen Zahlen. Der Kürze wegen bedeutet

$$[p]_m=\frac{p(p+1)(p+2)\dots(p+m-1)}{1.2.3\dots m}.$$

In 2) §. 1. hat man für ein gerades und ungerades $n$ zu unterscheiden. Es entsteht dann:

$$3)\quad \frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\frac{1}{(x+3\Delta x)^p}\dots-\frac{1}{(x+(2n-1)\Delta x)^p}$$
$$=\frac{1}{2x^p}+\frac{p\Delta x}{4.x^{p+1}}-\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{8.x^{p+3}}+\frac{[p]_5(\Delta x)^7}{4.x^{p+5}}-\frac{17[p]_7(\Delta x)^7}{16.x^{p+5}}+\dots$$
$$-\frac{1}{2(x+(2n-1)\Delta x)^p}+\frac{p.\Delta x}{4(x+(2n-1)\Delta x)^{p+1}}$$
$$-\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{8(x+(2n-1)\Delta x)^{p+3}}+\frac{[p]_5(\Delta x)^5}{4(x+(2n-1)\Delta x)^{p+5}}-\dots$$

$$4)\quad \frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\frac{1}{(x+3\Delta x)^p}+\dots+\frac{1}{(x+(2n-2)\Delta x)^p}$$
$$=\frac{1}{2x^p}+\frac{p.\Delta x}{4x^{p+1}}-\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{8.x^{p+3}}+\frac{[p]_5(\Delta x)^5}{4.x^{p+5}}-\dots$$
$$+\frac{1}{2(x+(2n-2)\Delta x)^p}-\frac{p.\Delta x}{4(x+(2n-2)\Delta x)^{p+1}}$$
$$+\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{8(x+(2n-2)\Delta x)^{p+3}}-\frac{[p]_5(\Delta x)^5}{4(x+(2n-2)\Delta x)^{p+5}}-\dots$$

Wird das Schlussglied in 3) auf die rechte Seite gebracht, so gewinnt man noch eine zweite Darstellung:

$$5)\quad \frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\frac{1}{(x+3\Delta x)^p}\cdots+\frac{1}{(x+(2n-2)\Delta x)^p}$$

$$=\frac{1}{2x^p}+\frac{p\Delta x}{4x^{p+1}}-\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{8.x^{p+3}}+\frac{[p]_5(\Delta x)^5}{4.x^{p+5}}-\cdots$$

$$+\frac{1}{2(x+(2n-1)\Delta x)^p}+\frac{p.\Delta x}{4(x+(2n-1)\Delta x)^{p+1}}$$

$$-\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{8(x+(2n-1)\Delta x)^{p+3}}+\frac{[p]_5(\Delta x)^5}{4(x+(2n-1)\Delta x)^{p+5}}+\cdots$$

Bei unendlich wachsendem $n$ verschwinden die zweiten Reihen in 3)—5) und es ergibt sich dann folgende Grenzwerth-Bestimmung:

$$6)\quad \frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\frac{1}{(x+3\Delta x)^p}+\cdots$$

$$=\frac{1}{2x^p}+\frac{p\Delta x}{4x^{p+1}}-\frac{[p]_3(\Delta x)^3}{8x^{p+3}}+\frac{[p]_5(\Delta x)^5}{4.x^{p+5}}-\frac{17.[p]_7(\Delta x)^7}{16.x^{p+7}}+\cdots$$

Die Coefficienten der Glieder dieser Reihen sind die Vorzahlen der ersten negativen Aufstufungsreihe und haben folgende Werthe:

$$7)\quad \left\{\begin{array}{ll}
M_1=\frac{1}{2}, & M_{10}=\frac{3202291}{4}, \\
M_2=\frac{1}{4}, & M_{11}=\frac{221930581}{8} \\
M_3=\frac{1}{8}, & M_{12}=\frac{4722116521}{4}, \\
M_4=\frac{1}{4}, & M_{13}=\frac{968383688827}{16}, \\
M_5=\frac{17}{16}, & M_{14}=\frac{14717667114151}{4}, \\
M_6=\frac{31}{4}, & M_{15}=\frac{2093660879252671}{8}, \\
M_7=\frac{691}{8}, & M_{16}=\frac{86125672563301143}{4}, \\
M_8=\frac{4561}{4}, & M_{17}=\frac{129848163681107301953}{64}, \\
M_9=\frac{929569}{32}, & M_{18}=\frac{868320396104950823611}{4},
\end{array}\right.$$

u. s. w. Sie divergiren, wie die Bernoullischen Zahlen, sehr stark.

## §. 3.

Wendet man nun die Gleichungen des vorigen Paragraphen auf besondere Fälle an und setzt $x=1$, $\Delta x=1$, so entstehen die reciproken Potenzreihen der natürlichen Zahlen. Aus 1) §. 2. erhält man sofort:

$$1) \quad 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots\frac{1}{n^p}=C_p-\frac{1}{(p-1)n^{p-1}}+\frac{1}{2n^p}$$
$$-\frac{p}{12n^{p+1}}+\frac{[p]_3}{120n^{p+3}}-\frac{[p]_5}{252n^{p+5}}$$

$C_p$ bestimmt sich auf die bekannte Art, indem man einen Werth für $n$ annimmt, die begleitende Reihe von der rechten auf die linke Seite bringt und hieraus die Zahlenwerthe für $C_p$ berechnet. Auf diese Art sind die Werthe für $C$ für die 40 ersten Potenzen berechnet und in der nachfolgenden Tafel zusammengestellt.

2) $C_2 = 1,\ 644\ 934\ 066\ 848\ 2264,$
$C_3 = 1,\ 202\ 056\ 903\ 159\ 5942,$
$C_4 = 1,\ 082\ 323\ 233\ 711\ 1382,$
$C_5 = 1,\ 036\ 927\ 755\ 143\ 3699,$
$C_6 = 1,\ 077\ 343\ 061\ 984\ 4491,$
$C_7 = 1,\ 008\ 349\ 277\ 381\ 9227,$
$C_8 = 1,\ 004\ 077\ 356\ 197\ 9443,$
$C_9 = 1,\ 002\ 008\ 392\ 826\ 0822,$
$C_{10} = 1,\ 000\ 994\ 575\ 127\ 8180,$
$C_{11} = 1,\ 000\ 494\ 188\ 604\ 1194,$
$C_{12} = 1,\ 000\ 246\ 086\ 553\ 3080,$
$C_{13} = 1,\ 000\ 122\ 713\ 347\ 5785,$
$C_{14} = 1,\ 000\ 061\ 248\ 135\ 0587,$
$C_{15} = 1,\ 000\ 030\ 588\ 236\ 3070,$
$C_{16} = 1,\ 000\ 015\ 282\ 259\ 4086,$
$C_{17} = 1,\ 000\ 007\ 637\ 197\ 6379,$
$C_{18} = 1,\ 000\ 003\ 817\ 293\ 264\ 99,$
$C_{19} = 1,\ 000\ 001\ 908\ 212\ 716\ 55,$
$C_{20} = 1,\ 000\ 000\ 953\ 962\ 033\ 87,$
$C_{21} = 1,\ 000\ 000\ 476\ 932\ 986\ 78,$
$C_{22} = 1,\ 000\ 000\ 238\ 450\ 502\ 56,$
$C_{23} = 1,\ 000\ 000\ 119\ 219\ 925\ 96,$
$C_{24} = 1,\ 000\ 000\ 059\ 608\ 189\ 051\ 258,$
$C_{25} = 1,\ 000\ 000\ 029\ 803\ 503\ 514\ 650,$
$C_{26} = 1,\ 000\ 000\ 014\ 901\ 554\ 839\ 365,$
$C_{27} = 1,\ 000\ 000\ 007\ 450\ 711\ 789\ 835,$
$C_{28} = 1,\ 000\ 000\ 003\ 725\ 334\ 024\ 789,$
$C_{29} = 1,\ 000\ 000\ 001\ 862\ 659\ 723\ 512,$
$C_{30} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 931\ 327\ 432\ 420,$
$C_{31} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 465\ 662\ 906\ 504,$
$C_{32} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 232\ 831\ 203\ 367,$
$C_{33} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 116\ 415\ 501\ 727,$
$C_{34} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 058\ 207\ 720\ 879,$
$C_{35} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 029\ 103\ 850\ 445,$
$C_{36} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 014\ 551\ 921\ 891,$
$C_{37} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 007\ 275\ 959\ 835,$
$C_{38} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 003\ 637\ 979\ 547,$
$C_{39} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 001\ 818\ 989\ 650,$
$C_{40} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 909\ 494\ 784.$

Für die 17 ersten Potenzen sind sie auf 16 Decimalstellen, von der 18ten bis 23sten Potenz auf 17 Stellen, von der 24sten bis 40sten auf 20 Stellen berechnet. Die 21ste Stelle ist zwar angegeben, ihr Werth ist jedoch nicht ganz sicher, aber nicht wohl mehr als um die Einheit unsicher.

Euler hat die Werthe der $C$ bis zur 16ten Potenz (Differenzial-Rechnung 2ter Theil §. 151) und darunter einige unrichtig angegeben; Legendre hat die unrichtigen berichtigt und die Werthe bis zur 35sten Potenz (Traité d. fonct. ellipt. T. II. p. 432.) auf 16 Stellen berechnet. Die von Legendre angegebenen stimmen mit den hier mitgetheilten Werthen, mit Ausnahme von $C_{22}$ überein, wo die 16te Stelle differirt.

Die besondern Fälle, die sich aus 1) ergeben sind:

$$3)\quad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\cdots+\frac{1}{n^2}$$

$$=C_2-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{30n^5}-\frac{1}{42n^7}+\frac{1}{30n^9}-\frac{5}{66n^{11}}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots\frac{1}{n^3}$$

$$=C_3-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{4n^4}+\frac{1}{12n^6}-\frac{1}{12n^8}+\frac{3}{20.n^{10}}-\frac{5}{6n^{12}}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots\frac{1}{n^4}$$

$$=C_4-\frac{1}{3n^3}+\frac{1}{2n^4}-\frac{1}{3n^5}+\frac{1}{6n^7}-\frac{2}{9n^9}+\frac{1}{2n^{11}}-\frac{10}{n^{13}}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\cdots\frac{1}{n^5}$$

$$=C_5-\frac{1}{4n^4}+\frac{1}{2n^5}-\frac{5}{12n^6}+\frac{7}{24n^8}-\frac{1}{2n^{10}}+\frac{11}{8.n^{12}}-\frac{65}{12n^{14}}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\cdots\frac{1}{n^6}$$

$$=C_6-\frac{1}{5n^5}+\frac{1}{2n^6}-\frac{1}{2n^7}+\frac{7}{15n^9}-\frac{1}{n^{11}}+\frac{33}{10.n^{13}}-\frac{91}{6.n^{15}}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{4^7}+\ldots\frac{1}{n^7}$$

$$=C_7-\frac{1}{6n^6}+\frac{1}{2n^7}-\frac{7}{12n^8}+\frac{7}{10n^{10}}-\frac{11}{6n^{12}}+\frac{143}{20n^{14}}-\frac{165}{12n^{16}}+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{4^8}+\ldots\frac{1}{n^8}$$

$$=C_8-\frac{1}{7n^7}+\frac{1}{2n^8}-\frac{3}{4n^9}+\frac{1}{n^{11}}-\frac{33}{14n^{13}}+\frac{143}{10.n^{15}}-\frac{260}{3n^{17}}+\ldots,$$

u. s. w.

## §. 4.

Um die Summenausdrücke für die reciproken Potenzreihen mit abwechselnden Zeichen zu erhalten, hat man $x=1$, $\Delta x=1$ in 3), 4) und 5) §. 2. zu setzen. Hiedurch entsteht:

1) $$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\ldots-\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=H_p-\frac{1}{2(2n)^p}+\frac{p}{4(2n)^{p+1}}-\frac{[p]_3}{8(2n)^{p+3}}+\frac{[p]_5}{4(2n)^{p+5}}$$

$$-\frac{17[p]_7}{16(2n)^{p+7}}+\frac{31[p]_9}{4(2n)^{p+9}}-\ldots,$$

2) $$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}\ldots+\frac{1}{(2n-1)^p}$$

$$=H_p+\frac{1}{2(2n-1)^p}-\frac{p}{4(2n-1)^{p+1}}+\frac{[p]_3}{8(2n-1)^{p+3}}$$

$$-\frac{[p]_5}{4(2n-1)^{p+5}}+\frac{17[p]_7}{16(2n-1)^{p+7}}+\ldots=H_p+\frac{1}{2(2n)^p}$$

$$+\frac{p}{4(2n)^{p+1}}-\frac{[p]_3}{8(2n)^{p+3}}+\frac{[p]_5}{4(2n)^{p+5}}-\frac{17[p]_7}{16(2n)^{p+7}}+\ldots$$

Der Werth für $H_p$ ist bei unendlich wachsendem $n$:

3) $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}-\ldots.$

$$=B_p=\frac{1}{2}+\frac{p}{4}-\frac{[p]_3}{8}+\frac{[p]_5}{4}-\frac{17[p]_7}{16}+\frac{31[p]_9}{4}-\frac{691[p]_{11}}{8}+\ldots.$$

Er bestimmt sich auf folgende Weise. Werden auf beiden Seiten der Gleichung

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\ldots.=C_p$$

die geraden Glieder doppelt abgezogen, so entsteht

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^p}+\ldots.=C_p-\frac{2}{2^p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots.\right)$$

und hieraus, wenn der Werth aus der vorigen Gleichung eingeführt wird:

$$1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}-\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{6^p}+\ldots.=C_p-\frac{1}{2^{p-1}}C_p.$$

Hiernach erhält man aus 3)

4) $$B_p=C_p-\frac{1}{2^{p-1}}C_p$$

Es lassen sich daher die Werthe der $B$ aus der Tafel 2) §. 3. ableiten. Die sich ergebenden Werthe sind in der nachstehenden Tafel enthalten.

5) $H_1 = \lg 2 = 0,\ 693\ 147\ 180\ 559\ 9453\ldots,$
$H_2 = 0,\ 822\ 467\ 033\ 424\ 1132,$
$H_3 = 0,\ 901\ 542\ 677\ 369\ 6957,$
$H_4 = 0,\ 947\ 032\ 829\ 497\ 2460,$
$H_5 = 0,\ 972\ 119\ 770\ 446\ 9093,$
$H_6 = 0,\ 985\ 551\ 091\ 297\ 4351,$
$H_7 = 0,\ 992\ 593\ 819\ 922\ 8302,$
$H_8 = 0,\ 996\ 233\ 001\ 852\ 6479,$
$H_9 = 0,\ 998\ 094\ 297\ 541\ 6054,$
$H_{10} = 0,\ 999\ 093\ 507\ 598\ 2225,$
$H_{11} = 0,\ 999\ 517\ 143\ 498\ 0607,$
$H_{12} = 0,\ 999\ 757\ 685\ 143\ 8584,$
$H_{13} = 0,\ 999\ 878\ 542\ 763\ 2652,$
$H_{14} = 0,\ 999\ 939\ 170\ 345\ 9798,$
$H_{15} = 0,\ 999\ 969\ 551\ 213\ 0993,$
$H_{16} = 0,\ 999\ 984\ 764\ 214\ 9061,$
$H_{17} = 0,\ 999\ 992\ 378\ 292\ 0411,$
$H_{18} = 0,\ 999\ 996\ 187\ 869\ 610\ 11,$
$H_{19} = 0,\ 999\ 998\ 093\ 508\ 171\ 68,$
$H_{20} = 0,\ 999\ 999\ 046\ 611\ 581\ 52,$
$H_{21} = 0,\ 999\ 999\ 523\ 258\ 215\ 54,$
$H_{22} = 0,\ 999\ 999\ 761\ 613\ 230\ 98,$
$H_{23} = 0,\ 999\ 999\ 880\ 801\ 318\ 54,$
$H_{24} = 0,\ 999\ 999\ 941\ 398\ 892\ 394\ 628,$
$H_{25} = 0,\ 999\ 999\ 970\ 198\ 856\ 962\ 833,$
$H_{26} = 0,\ 999\ 999\ 985\ 099\ 232\ 007\ 569,$
$H_{27} = 0,\ 999\ 999\ 992\ 549\ 550\ 484\ 964,$
$H_{28} = 0,\ 999\ 999\ 996\ 274\ 753\ 400\ 110,$
$H_{29} = 0,\ 999\ 999\ 998\ 137\ 369\ 418\ 112,$
$H_{30} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 068\ 682\ 281\ 455,$
$H_{31} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 534\ 340\ 330\ 655,$
$H_{32} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 767\ 169\ 915\ 951,$
$H_{33} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 883\ 584\ 858\ 057,$
$H_{34} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 941\ 792\ 399\ 047,$
$H_{35} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 970\ 896\ 789\ 530,$
$H_{36} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 985\ 448\ 091\ 444,$
$H_{37} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 993\ 724\ 044\ 607,$
$H_{38} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 996\ 362\ 021\ 933,$
$H_{39} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 998\ 181\ 010\ 843,$
$H_{40} = 0,\ 999\ 999\ 999\ 999\ 090\ 505\ 381.$

Hieraus ergeben sich nun folgende besonderen Fälle:

6) $$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots-\frac{1}{2n}$$

$$=\lg 2-\frac{1}{4n}+\frac{1}{4(2n)^2}-\frac{1}{8(2n)^4}+\frac{1}{4(2n)^6}-\frac{17}{16(2n)^8}+\frac{31}{4(2n)^{10}}-\dots,$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots-\frac{1}{(2n)^2}$$

$$=H_2-\frac{1}{2(2n)^2}+\frac{1}{2(2n)^3}-\frac{1}{2(2n)^5}+\frac{3}{2(2n)^7}-\frac{17}{2(2n)^9}+\frac{155}{2(2n)^{11}}-\dots,$$

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\dots-\frac{1}{(2n)^3}$$

$$=H_3-\frac{1}{2(2n)^3}+\frac{3}{4(2n)^4}-\frac{5}{4(2n)^6}+\frac{21}{4(2n)^8}-\frac{153}{4(2n)^{10}}+\frac{1705}{4(2n)^{12}}-\dots,$$

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\dots-\frac{1}{(2n)^4}$$

$$=H_4-\frac{1}{2(2n)^4}+\frac{1}{(2n)^5}-\frac{5}{2(2n)^7}+\frac{14}{(2n)^9}-\frac{255}{2(2n)^{11}}+\frac{1705}{(2n)^{13}}-\dots,$$

$$1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{4^5}+\dots-\frac{1}{(2n)^5}$$

$$=H_5-\frac{1}{2(2n)^5}+\frac{5}{4(2n)^6}+\frac{35}{8(2n)^8}+\frac{63}{2(2n)^{10}}-\frac{2805}{8(2n)^{12}}+\frac{21165}{4(2n)^{14}}-\dots,$$

$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\dots-\frac{1}{(2n)^6}$$

$$=H_6-\frac{1}{2(2n)^6}+\frac{3}{2(2n)^7}-\frac{7}{2(2n)^9}+\frac{63}{(2n)^{11}}-\frac{1683}{2(2n)^{13}}+\frac{31031}{2(2n)^{15}}-\dots,$$

$$1-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}-\frac{1}{4^7}+\dots-\frac{1}{(2n)^7}$$

$$=H_7-\frac{1}{2(2n)^7}+\frac{7}{4(2n)^8}-\frac{21}{2(2n)^{10}}+\frac{231}{2(2n)^{12}}-\frac{7293}{4(2n)^{14}}+\dots,$$

$$1-\frac{1}{2^8}+\frac{1}{3^8}-\frac{1}{4^8}+\dots-\frac{1}{(2n)^8}$$

$$=H_8-\frac{1}{2(2n)^8}+\frac{2}{(2n)^9}-\frac{15}{(2n)^{11}}+\frac{198}{(2n)^{13}}-\frac{7293}{2(2n)^{15}}+\dots$$

u. s. w.

7) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$

$$=H_1+\frac{1}{2(2n)}+\frac{1}{4(2n)^2}-\frac{1}{8(2n)^4}+\frac{1}{4(2n)^6}-\frac{17}{16(2n)^8}+\frac{31}{4(2n)^{10}}-\ldots$$

$$=H_1+\frac{1}{2(2n-1)}-\frac{1}{4(2n-1)^2}+\frac{1}{8(2n-1)^4}-\frac{1}{4(2n-1)^6}+\frac{17}{16(2n-1)^8}-\ldots,$$

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$=H_2+\frac{1}{2(2n)^2}+\frac{1}{2(2n)^3}-\frac{1}{2(2n)^5}+\frac{3}{2(2n)^7}-\frac{17}{2(2n)^9}+\frac{155}{2(2n)^{11}}-\ldots$$

$$=H_2+\frac{1}{2(2n-1)^2}-\frac{1}{2(2n-1)^3}+\frac{1}{2(2n-1)^5}-\frac{3}{2(2n-1)^7}+\frac{17}{2(2n-1)^9}-\ldots,$$

$$1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}$$

$$=H_3+\frac{1}{2(2n)^3}+\frac{3}{4(2n)^4}-\frac{5}{4(2n)^6}+\frac{21}{4(2n)^8}-\frac{153}{4(2n)^{10}}+\ldots$$

$$=H_3+\frac{1}{2(2n-1)^3}-\frac{3}{4(2n-1)^4}+\frac{5}{4(2n-1)^6}-\frac{21}{4(2n-1)^8}+\frac{153}{4(2n-1)^{10}}-\ldots,$$

$$1-\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}-\frac{1}{4^4}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$=H_4+\frac{1}{2(2n)^4}+\frac{1}{(2n)^5}-\frac{5}{2(2n)^7}+\frac{14}{(2n)^9}-\frac{51}{(2n)^{11}}+\frac{1705}{(2n)^{13}}-\ldots$$

$$=H_4+\frac{1}{2(2n-1)^4}-\frac{1}{(2n-1)^5}+\frac{5}{2(2n-1)^7}-\frac{14}{(2n-1)^9}+\frac{51}{(2n-1)^{11}}-\ldots,$$

$$1-\frac{1}{2^5}+\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^5}$$

$$=H_5+\frac{1}{2(2n)^5}+\frac{5}{4(2n)^6}-\frac{35}{8(2n)^8}+\frac{63}{2(2n)^{10}}-\frac{2805}{8(2n)^{12}}+\frac{22165}{4(2n)^{14}}-\ldots$$

$$=H_5+\frac{1}{2(2n-1)^5}-\frac{5}{4(2n-1)^6}+\frac{35}{8(2n-1)^8}-\frac{63}{2(2n-1)^{10}}+\frac{2805}{8(2n-1)^{12}}-\ldots,$$

$$1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^6}$$

$$=H_6+\frac{1}{2(2n)^6}+\frac{3}{2(2n)^7}-\frac{7}{2(2n)^9}+\frac{63}{2(2n)^{11}}-\frac{1683}{2(2n)^{13}}+\ldots,$$

$$=H_6+\frac{1}{2(2n-1)^6}-\frac{3}{2(2n-1)^7}+\frac{7}{2(2n-1)^9}-\frac{63}{2(2n-1)^{11}}+\frac{1683}{2(2n-1)^{13}}-\ldots,$$

$$1-\frac{1}{2^7}+\frac{1}{3^7}-\frac{1}{4^7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^7}$$

$$=H_7+\frac{1}{2(2n)^7}+\frac{7}{4(2n)^8}-\frac{21}{2(2n)^{10}}+\frac{231}{2(2n)^{12}}-\frac{7293}{4(2n)^{14}}+\ldots$$

$$=H_7+\frac{1}{2(2n-1)^7}-\frac{7}{4(2n-1)^8}+\frac{21}{2(2n-1)^{10}}-\frac{231}{2(2n-1)^{12}}+\frac{7293}{4(2n-1)^{14}}-\ldots$$

u. s. w. Die vorstehenden Reihen gehören zu den halbconvergenten und man kann, um die nöthige Genauigkeit zu erhalten, ihren Rest bestimmen.

Obgleich die spätern Glieder der Reihe 3) sehr divergiren, so sind doch ihre Summen durch die in 5) angegebenen Werthe bestimmt. Man kann nun diese Gleichung benutzen, um den Grenzwerth der Vorzahlen der ersten negativen Aufstufungsreihe zu bestimmen. Aus 3) hat man nämlich

$$\lg 2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\frac{17}{16}+\frac{31}{4}-\frac{691}{8}+\frac{4561}{4}-\ldots$$

Die Vorzahlen der ersten negativen Aufstufungsreihe haben folgenden Zeichenwechsel:

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{17}{16}-\frac{31}{4}-\frac{691}{8}-\ldots$$

Aendert man nun in der vorstehenden Gleichung die Zeichen und zählt nach der Aenderung die Einheit auf beiden Seiten zu, so wird

$$8)\quad 1-\lg 2=0,306\,852\,819\,440\,0548\ldots$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{17}{16}-\frac{31}{4}+\frac{691}{8}-\frac{4561}{4}+\ldots$$

§. 5.

Die bisher gefundenen Resultate geben Veranlassung zu noch weitern Anwendungen. Setzt man $x=1$, $\Delta x=2$ in 1) §. 2., so entsteht

$$1)\quad 1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\dots\frac{1}{(2n+1)^p}=\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{2}+\frac{p}{6}-\frac{[p]_3}{15}$$

$$+\frac{8[p]_5}{63}-\frac{8[p]_7}{15}-\frac{1}{2(p-1)(2n+1)^{p-1}}+\frac{1}{2(2n+1)^p}-\frac{p}{6(2n+1)^{p+1}}$$

$$+\frac{[p]_3}{15(2n+1)^{p+3}}-\frac{8[p]_5}{63(2n+1)^{p+5}}+\dots$$

Für ein unendlich wachsendes $n$ wird

$$2)\quad 1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\dots=D_p$$

$$=\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{2}+\frac{p}{6}-\frac{[p]_3}{15}+\frac{8[p]_5}{63}-\frac{8[p]_7}{15}+\dots$$

Aus

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\dots=C_p$$

erhält man, wenn die geraden Glieder auf die rechte Seite gebracht werden:

$$3)\quad 1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\dots=C_p-\frac{1}{2^p}-\frac{1}{4^p}-\frac{1}{6^p}-\dots$$

$$=C_p-\frac{1}{2^p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\dots\right)$$

$$=C_p-\frac{1}{2^p}C_p.$$

Hieraus und aus 2) erhält man

$$4)\qquad D_p=C_p-\frac{1}{2^p}C_p.$$

Durch Einführung dieses Werthes in 1) gewinnt man

$$5)\quad 1+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{7^p}+\dots\frac{1}{(2n+1)^p}=D_p-\frac{1}{2(p-1)(2n+1)^{p-1}}$$

$$+\frac{1}{2(2n+1)^p}-\frac{p}{6(2n+1)^{p+1}}+\frac{[p]_3}{15(2n+1)^{p+3}}-\frac{8[p]_5}{63(2n+1)^{p+5}}.$$

**Bestimmt man nun die Werthe der $D_p$ aus $n$, so ergibt sic folgende Tafel:**

6)
$$D_2 = 1,\ 233\ 700\ 550.136\ 1698,$$
$$D_3 = 1,\ 051\ 799\ 790\ 264\ 6451,$$
$$D_4 = 1,\ 014\ 678\ 031\ 604\ 1921,$$
$$D_5 = 1,\ 004\ 523\ 782\ 795\ 1396,$$
$$D_6 = 1,\ 001\ 447\ 076\ 640\ 9421,$$
$$D_7 = 1,\ 000\ 471\ 548\ 652\ 3765,$$
$$D_8 = 1,\ 000\ 155\ 179\ 025\ 2961,$$
$$D_9 = 1,\ 000\ 051\ 345\ 183\ 8438,$$
$$D_{10} = 1,\ 000\ 017\ 041\ 363\ 0448,$$
$$D_{11} = 1,\ 000\ 005\ 666\ 051\ 0901,$$
$$D_{12} = 1,\ 000\ 001\ 885\ 848\ 5832,$$
$$D_{13} = 1,\ 000\ 000\ 628\ 055\ 4219,$$
$$D_{14} = 1,\ 000\ 000\ 209\ 240\ 5193,$$
$$D_{15} = 1,\ 000\ 000\ 069\ 724\ 7032,$$
$$D_{16} = 1,\ 000\ 000\ 023\ 237\ 1574,$$
$$D_{17} = 1,\ 000\ 000\ 007\ 744\ 8395,$$
$$D_{18} = 1,\ 000\ 000\ 002\ 581\ 437\ 55,$$
$$D_{19} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 860\ 444\ 11,$$
$$D_{20} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 286\ 807\ 63,$$
$$D_{21} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 095\ 601\ 16,$$
$$D_{22} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 031\ 866\ 77,$$
$$D_{23} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 010\ 622\ 20,$$
$$D_{24} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 003\ 540\ 722\ 94,$$
$$D_{25} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 001\ 180\ 228\ 74,$$
$$D_{26} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 393\ 413\ 47,$$
$$D_{27} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 131\ 137\ 40,$$
$$D_{28} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 043\ 712\ 45,$$
$$D_{29} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 014\ 570\ 81,$$
$$D_{30} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 004\ 856\ 94,$$
$$D_{31} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 001\ 618\ 98,$$
$$D_{32} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 539\ 66,$$
$$D_{33} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 179\ 89,$$
$$D_{34} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 059\ 62,$$
$$D_{35} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 019\ 98,$$
$$D_{36} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 000\ 006\ 66.$$

Hieraus ergeben sich folgende besondere Fälle:

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\frac{1}{(2n+1)^2}=D_2-\frac{1}{2(2n+1)}$$
$$+\frac{1}{2(2n+1)^2}-\frac{1}{3(2n+1)^3}+\frac{4}{15(2n+1)^5}-\frac{16}{21(2n+1)^7}+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+\frac{1}{7^3}+\ldots\frac{1}{(2n+1)^3}=D_3-\frac{1}{4(2n+1)^2}$$
$$+\frac{1}{2(2n+1)^3}-\frac{1}{2(2n+1)^4}+\frac{2}{3(2n+1)^6}-\frac{8}{3(2n+1)^8}+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots\frac{1}{(2n+1)^4}=D_4-\frac{1}{6(2n+1)^3}$$
$$+\frac{1}{2(2n+1)^4}-\frac{2}{3(2n+1)^5}+\frac{5}{4(2n+1)^7}-\frac{64}{9(2n+1)^9}+\ldots,$$

$$1+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+\frac{1}{7^5}+\ldots\frac{1}{(2n+1)^5}=D_5-\frac{1}{8(2n+1)^4}$$
$$+\frac{1}{2(2n+1)^5}-\frac{5}{6(2n+1)^6}+\frac{7}{3(2n+1)^8}-\frac{16}{(2n+1)^{10}}+\frac{176}{(2n+1)^{12}}\ldots,$$

$$1+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots\frac{1}{(2n+1)^6}=D_6-\frac{1}{10(2n+1)^5}$$
$$+\frac{1}{2(2n+1)^6}-\frac{1}{(2n+1)^7}+\frac{56}{15(2n+1)^9}-\frac{32}{(2n+1)^{11}}+\frac{2112}{5(2n+1)^{13}}\ldots,$$

$$1+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{5^7}+\frac{1}{7^7}+\ldots\frac{1}{(2n+1)^7}=D_7-\frac{1}{12(2n+1)^6}$$
$$+\frac{1}{2(2n+1)^7}-\frac{7}{6(2n+1)^8}+\frac{28}{5(2n+1)^{10}}-\frac{176}{3(2n+1)^{12}}+\frac{4576}{5(2n+1)^{14}}\ldots,$$

$$1+\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\ldots\frac{1}{(2n+1)^8}=D_8-\frac{1}{14(2n+1)^7}$$
$$+\frac{1}{2(2n+1)^8}-\frac{4}{3(2n+1)^9}+\frac{8}{(2n+1)^{11}}-\frac{704}{7(2n+1)^{13}}+\frac{9152}{5(2n+1)^{15}}\ldots,$$

u. s. w.

§. 6.

Setzt man $x=2$ und $\Delta x=2$ und $n-1$ statt $n$ in 1) §. 2., so entsteht

$$1)\qquad \frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\ldots\frac{1}{(2n)^p}$$

$$=C_p-\frac{1}{(p-1)(2n)^{p-1}}+\frac{1}{2(2n)^p}-\frac{p}{6(2n)^{p+1}}+\frac{[p]_3}{15(2n)^{p+3}}-\frac{8[p]_5}{63(2n)^{p+5}}+\ldots.$$

Nun sei

$$2)\qquad 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\ldots=F_p.$$

Man hat aber

$$3)\quad 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\ldots=1+\frac{1}{2^p}(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots)$$

$$=1+\frac{1}{2^p}C_p.$$

Aus 2) und 3) ergibt sich

$$4)\qquad F_p=1+\frac{1}{2^p}C_p,$$

und hieraus

$$5)\quad 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{6^p}+\ldots\frac{1}{(2n)^p}=F_p-\frac{1}{2(p-1)(2n)^{p-1}}$$

$$+\frac{1}{2(2n)^p}-\frac{p}{6(2n)^{p+1}}+\frac{[p]_3}{15(2n)^{p+3}}-\frac{8[p]_5}{63(2n)^{p+5}}+\frac{8[p]_7}{15(2n)^{p+7}}-\ldots.$$

Aus 4) leitet sich folgende Tafel für die Werthe der $F$ ab.

6)

$F_2 = 1,\ 411\ 233\ 516\ 712\ 0566,$
$F_3 = 1,\ 150\ 257\ 112\ 894\ 9492,$
$F_4 = 1,\ 067\ 645\ 202\ 106\ 9461,$
$F_5 = 1,\ 032\ 403\ 992\ 348\ 2303,$
$F_6 = 1,\ 015\ 895\ 985\ 343\ 5070,$
$F_7 = 1,\ 007\ 877\ 728\ 729\ 5462,$
$F_8 = 1,\ 003\ 922\ 177\ 172\ 6482,$
$F_9 = 1,\ 001\ 957\ 047\ 642\ 2384,$
$F_{10} = 1,\ 000\ 977\ 533\ 764\ 7733,$
$F_{11} = 1,\ 000\ 488\ 522\ 553\ 0293,$
$F_{12} = 1,\ 000\ 244\ 200\ 704\ 7248,$
$F_{13} = 1,\ 000\ 122\ 085\ 292\ 1567,$
$F_{14} = 1,\ 000\ 061\ 038\ 894\ 5395,$
$F_{15} = 1,\ 000\ 030\ 518\ 511\ 6038,$
$F_{16} = 1,\ 000\ 015\ 259\ 022\ 2512,$
$F_{17} = 1,\ 000\ 007\ 629\ 452\ 7984,$
$F_{18} = 1,\ 000\ 003\ 814\ 711\ 8274\ 4,$
$F_{19} = 1,\ 000\ 001\ 907\ 352\ 2724\ 3,$
$F_{20} = 1,\ 000\ 000\ 953\ 675\ 2261\ 7,$
$F_{21} = 1,\ 000\ 000\ 476\ 837\ 385\ 62,$
$F_{22} = 1,\ 000\ 000\ 238\ 418\ 635\ 79,$
$F_{23} = 1,\ 000\ 000\ 119\ 209\ 303\ 76,$
$F_{24} = 1,\ 000\ 000\ 059\ 604\ 648\ 328\ 315,$
$F_{25} = 1,\ 000\ 000\ 029\ 802\ 323\ 275\ 909,$
$F_{26} = 1,\ 000\ 000\ 014\ 901\ 161\ 415\ 898,$
$F_{27} = 1,\ 000\ 000\ 007\ 450\ 580\ 652\ 436,$
$F_{28} = 1,\ 000\ 000\ 003\ 725\ 290\ 312\ 340,$
$F_{29} = 1,\ 000\ 000\ 001\ 862\ 645\ 152\ 700,$
$F_{30} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 931\ 322\ 575\ 483,$
$F_{31} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 465\ 661\ 287\ 525,$
$F_{32} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 232\ 830\ 643\ 708,$
$F_{33} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 116\ 415\ 321\ 840,$
$F_{34} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 058\ 207\ 660\ 916,$
$F_{35} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 029\ 103\ 830\ 458,$
$F_{36} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 014\ 551\ 915\ 229,$
$F_{37} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 007\ 275\ 957\ 614,$
$F_{38} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 003\ 637\ 978\ 807,$
$F_{39} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 001\ 818\ 989\ 404,$
$F_{40} = 1,\ 000\ 000\ 000\ 000\ 909\ 494\ 701.$

Hieraus ergeben sich nun folgende besondere Fälle:

7) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots\frac{1}{(2n)^2}$

$$=F_2-\frac{1}{4n}+\frac{1}{2(2n)^2}-\frac{1}{3(2n)^3}+\frac{4}{15(2n)^5}-\frac{16}{21(2n)^7}+\frac{64}{15(2n)^9}-\ldots,$$

$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\cdots\frac{1}{(2n)^3}$

$$=F_3-\frac{1}{4(2n)^2}+\frac{1}{2(2n)^3}-\frac{1}{2(2n)^4}+\frac{2}{3(2n)^6}-\frac{8}{3(2n)^8}-\ldots,$$

$1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\cdots\frac{1}{(2n)^4}$

$$=F_4-\frac{1}{6(2n)^3}+\frac{1}{2(2n)^4}-\frac{2}{3(2n)^5}+\frac{5}{4(2n)^7}-\frac{64}{9(2n)^9}+\frac{64}{(2n)^{11}}-\ldots,$$

$1+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{4^5}+\frac{1}{6^5}+\cdots\frac{1}{(2n)^5}$

$$=F_5-\frac{1}{8(2n)^4}+\frac{1}{2(2n)^5}-\frac{5}{6(2n)^6}+\frac{7}{3(2n)^8}-\frac{16}{(2n)^{10}}+\frac{176}{(2n)^{12}}-\ldots,$$

$1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\cdots\frac{1}{(2n)^6}$

$$=F_6-\frac{1}{10(2n)^5}+\frac{1}{2(2n)^6}-\frac{1}{(2n)^7}+\frac{56}{15(2n)^9}-\frac{32}{(2n)^{11}}+\frac{2112}{5(2n)^{13}}-\ldots,$$

$1+\frac{1}{2^7}+\frac{1}{4^7}+\frac{1}{6^7}+\cdots\frac{1}{(2n)^7}$

$$=F_7-\frac{1}{12(2n)^6}+\frac{1}{2(2n)^7}-\frac{7}{6(2n)^8}+\frac{28}{5(2n)^{10}}-\frac{176}{3(2n)^{12}}+\frac{4576}{5(2n)^{14}}-\ldots,$$

$1+\frac{1}{2^8}+\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\cdots\frac{1}{(2n)^8}$

$$=F_8-\frac{1}{14(2n)^7}+\frac{1}{2(2n)^8}-\frac{4}{3(2n)^9}+\frac{8}{(2n)^{11}}-\frac{705}{7(2n)^{13}}+\frac{9152}{5(2n)^{15}}-\ldots.$$

u. s. w.

**Euler** hat in seiner **Differential-Rechnung** (2. Thl. §. 187) angegeben, wie man die Werthe der $D$ und $H$ finden könne. Die Werthe selbst hat er nicht berechnet. Das von ihm ange-

gebene Verfahren ist dort nachzusehen. Die Summirung beschränkter Reihen, wie sie hier in §. 4— §.6 gegeben ist, hat er nicht mitgetheilt. Die Grundlage des Calculs ist eine andere, weniger bewegliche und anwendbare als die Natur der Sache es erfordert, weswegen diess wohl bei ihm und in den später hierüber erschienenen Schriften unterblieb.

Der Calcul lässt aber, wie man leicht erkennt, die mannigfaltigsten Anwendungen zu. Setzt man nämlich $x=1$, $\Delta x=2$ in 3) §. 2., so entsteht

$$1-\frac{1}{3^p}+\frac{1}{5^p}-\frac{1}{7^p}+\ldots-\frac{1}{(4n-1)^p}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{p}{2}-[p]_3+16[p]_5-17.8[p]_7+\ldots-\frac{1}{2(4n-1)^p}$$

$$+\frac{p}{2(4n-1)^{p+1}}-\frac{[p]_3}{(4n-1)^{p+3}}+\frac{8[p]_5}{(4n-1)^{p+5}}-\frac{136[p]_7}{(4n-1)^{p+7}}+\ldots$$

und man kann nach der bekannten Methode die Werthe der begleitenden Reihe auffinden. Die Summirung dieser und ähnlicher Reihen dürfte aber schwer nach den von Euler gegebenen Prämissen zu ermitteln sein.

## II. Grenzwerth-Bestimmung der Potenzreihen ganzer Zahlen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind.

### §. 7.

Die Summe der Potenzreihen der natürlichen Zahlen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind, wird nach Nr. 363. der Lehre von den aufsteigenden Functionen gewonnen, wenn $x=0$, $\Delta x=1$ gesetzt und die nöthigen Veränderungen gemacht werden. Man erhält

1) $1^p-2^p+3^p-4^p-\ldots-(2n)^p+(2n+1)^p$

$$=\frac{1}{2}(2n+1)^p+\frac{1}{4}(2n+1)^{p-1}-\frac{1}{8}(p)_3(2n+1)^{p-3}+\frac{1}{4}(p)_5(2n+1)^{p-5}$$

$$-\frac{17}{16}(p)_7(2n+1)^{p-7}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2}\cdot 0^p-\frac{1}{4}p.0^{p-1}+\frac{1}{8}(p)_3.0^{p-3}-\frac{1}{4}(p)_5.0^{p-5}+\frac{17}{16}(p)_7.0^{p-7}-\ldots$$

Aus Nr. 362. wird bei den nämlichen Voraussetzungen:

$$1)\quad 1-2^p+3^p-4^p-\ldots-(2n)^p$$

$$=-\frac{1}{2}(2n)^p-\frac{1}{4}p(2n)^{p-1}+\frac{1}{8}(p)_3(2n)^{p-3}-\frac{1}{4}(p)_5(2n)^{p-5}$$

$$+\frac{17}{16}(p)_7(2n)^{p-7}-\ldots$$

$$+\frac{1}{2}.0^p-\frac{1}{4}p.0^{p-1}+\frac{1}{8}(p)_3.0^{p-3}+\frac{1}{4}(p)_5.0^{p-5}-\frac{17}{16}(p)_7.0^{p-7}$$

$$+\frac{31}{4}(p)_9.0^{p-9}-\ldots\ldots$$

Hierin bedeutet

$$(p)_k=\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-k+1)}{1.2.3\ldots k}.$$

Die Vorzahlen gehören der ersten negativen Aufstufungsreihe an.

Wird 1) und 2) zusammengezählt und die Summe durch 2 getheilt, so entsteht:

$$3)\quad 1-2^p+3^p-4^p+\ldots+(2n-1)^p-(2n)^p+\frac{1}{2}(2n+1)^p$$

$$=\frac{1}{4}(2n+1)^p+\frac{1}{8}p(2n+1)^{p-1}-\frac{1}{16}(p)_3(2n+1)^{p-3}+\frac{1}{8}(p)_5(2n+1)^{p-5}-\ldots$$

$$-\frac{1}{4}(2n)^p-\frac{1}{8}p(2n)^{p-1}+\frac{1}{16}(p)_3(2n)^{p-3}+\frac{1}{8}(p)_5(2n)^{p-5}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2}.0^p-\frac{1}{4}p.0^{p-1}+\frac{1}{8}(p)_3.0^{p-3}-\frac{1}{4}(p)_5.0^{p-5}+\frac{17}{16}(p)_7.0^{p-7}-\ldots\ldots$$

Nun ist

$$(2n+1)^x=(2n)^x\left(1+\frac{1}{2n}\right)^x.$$

Durch Einführung entsteht aus 3)

$$4)\quad 1^p - 2^p + 3^p - 4^p + \ldots + (2n-1)^p - (2n)^p + \frac{1}{2}(2n+1)^p$$

$$= \frac{1}{4}(2n)^p[(1+\frac{1}{2n})^p - 1]$$

$$+ \frac{p}{8}(2n)^{p-1}[(1+\frac{1}{2n})^{p-1} - 1]$$

$$- \frac{1}{16}(p)_3(2n)^{p-3}[(1+\frac{1}{2n})^{p-3} - 1]$$

$$+ \frac{1}{8}(p)_5(2n)^{p-5}[(1+\frac{1}{2n})^{p-5} - 1]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+ \frac{1}{2}.0^p - \frac{p}{4}.0^{p-1} + \frac{1}{8}(p)_3.0^{p-3} - \frac{1}{4}(p)_5.0^{p-5} + \ldots.$$

Je grösser $n$ wird, desto mehr nähert sich der Werth von $(1+\frac{1}{2n})^{p-k}$ der Einheit und fällt bei unendlich grossem $n$ mit ihm zusammen. In diesem Falle verschwindet die Doppelreihe in 4) und man erhält daher

$$5)\quad \text{Lim}(1^p - 2^p + 3^p - 4^p - \ldots + (2n-1)^p - (2n)^p + \frac{1}{2}(2n+1)^p)$$

$$= \frac{1}{2}0^p - \frac{p}{4}0^{p-1} + \frac{1}{8}(p)_3 0^{p-3} - \frac{1}{4}(p)_5 0^{p-5} + \frac{17}{16}(p)_7 0^{p-7} - \ldots.$$

Schreibt man nun $x$ statt $2n$ und bezeichnet die vorstehende Reihe durch $S(-)^{x-1}x^p$, so hat man für $x=1$ bis $x=\infty$

$$6)\quad \text{Lim}[S(-)^{x-1}x^p(-)^x\frac{1}{2}(x+1)^p]$$

$$= \frac{1}{2}0^p - \frac{p}{4}0^{p-1} + \frac{1}{8}(p)_3 0^{p-3} - \frac{1}{4}(p)_5 0^{p-5} \ldots.$$

Da nun im vorliegenden Falle $0^{p-k}=1$ wird, wenn $p-k=0$ ist, und diess nur bei ungeraden Zahlen statt finden kann, so ergeben sich hieraus folgende Grenzwerthe:

7) $$\mathrm{Lim}[S(-)^{x-1}x^1(-)^x\tfrac{1}{2}(x+1)]=-\tfrac{1}{4},$$

$$\mathrm{Lim}[S(-)^{x-1}x^3(-)^x\tfrac{1}{2}(x+1)^3]=+\tfrac{1}{8},$$

$$\mathrm{Lim}[S(-)^{x-1}x^5(-)^x\tfrac{1}{2}(x+1)^5]=-\tfrac{1}{4},$$

$$\mathrm{Lim}[S(-)^{x-1}x^7(-)^x\tfrac{1}{2}(x+1)^7]=+\tfrac{17}{16},$$

$$\mathrm{Lim}[S(-)^{x-1}x^9(-)^x\tfrac{1}{2}(x+1)^9]=-\tfrac{31}{4}$$

u. s. w.

Die Grenzwerthe fallen mit den Vorzahlen der ersten negativen Aufstufungsreihe zusammen.

Ist $p$ eine gerade Zahl und $>1$, so geben alle Glieder der Reihe in 6) in 0 über, und man erhält

8) $$\mathrm{Lim}[S(-)^{x-1}x^{2p}(-)^x\tfrac{1}{2}(x+1)^{2p})=0.$$

Ist $p=0$, so wird aus 6)

9) $$\mathrm{Lim}[S(-)^{x-1}x^0(+)^x\tfrac{1}{2}(x+1)^0]=\tfrac{1}{2}.$$

Euler hat sich mit Bestimmung dieser Grenzwerthe in seiner Differential-Rechnung 2. Thl. §. 185. beschäftigt. Stellt man die von ihm gewonnenen Resultate in der hier gebrauchten Bezeichnung dar, so hat man

10) $$\mathrm{Lim}\,S(-)^{x-1}x^1=-\tfrac{1}{4},$$

$$\mathrm{Lim}\,S(-)^{x-1}x^3=\ \tfrac{1}{8},$$

$$\mathrm{Lim}\,S(-)^{x-1}x^5=-\tfrac{1}{4},$$

$$\mathrm{Lim}\,S(-)^{x-1}x^7=+\tfrac{17}{16}$$

u. s. w.

Hierin ist das zweite Glied $\tfrac{1}{2}(x+1)$ ausser Acht gelassen.

Es wird nun zwar nach dem Vorgange von Euler allgemein angenommen, dass

$$1-2^2+3^2-4^2+\ldots\ldots=0,$$

$$1-2^4+3^4-4^4+\ldots\ldots=0,$$

$$1-2^6+3^6-4^6+\ldots\ldots=0$$

u. s. w.

ist. Mit den hier gefundenen Resultaten, deren Begründung klar vorliegt, stimmt aber diese Annahme nicht überein. Ich setze die Stelle, worin Euler seine Ansicht begründet, in der Uebersetzung von Michelsen her, damit der Leser hierin sich ein Urtheil bilden kann.

„Man erkennt hieraus, dass bei den geraden Potestäten, den „Fall ausgenommen, wenn $n=0$ ist, die hinzuzusetzende Grösse „verschwindet, und dass in diesen Fällen die Summe der geraden „Anzahl von Gliedern von der Summe der ungeraden Anzahl bloss „in Ansehung der Zeichen verschieden ist. Wenn also $x$ eine „unendlich grosse Zahl ist, so fällt diese Unterscheidung weg, „weil eine unendlich grosse Zahl weder gerade noch ungerade „genannt werden kann, und es müssen also dabei die zweifel- „haften Glieder weggelassen werden. Hieraus folgt, dass die „Summe der Reihen dieser Art, wenn sie ohne Ende fortlaufen, „bloss in der hinzuzufügenden beständigen Grösse bestehe. Aus „diesem Grunde ist

$$1-1+1-1+\ldots\ldots=\frac{1}{2},$$

$$1-2+3-4+\ldots\ldots=\frac{1}{4},$$

u. s. w."

Die hier entwickelten Sätze lassen sich leicht verallgemeinern. Setzt man in 362. der Lehre von den aufsteigenden Functionen $2n-1$ statt $n$, so entsteht

$$11)\quad x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p-(x+3\Delta x)^p\ldots\ldots-(x+(2n-1)\Delta x)^p$$

$$=-\frac{1}{2}(x+(2n-1)\Delta x)^p-\frac{p}{4}\Delta x(x+(2n-1)\Delta x)^{p-1}$$

$$+\frac{(p)_3}{8}(\Delta x)^3(x+(2n-1)\Delta x)^{p-3}-\ldots\ldots$$

$$+\frac{1}{2}x^p-\frac{1}{4}px^{p-1}.\Delta x+\frac{1}{8}(p)_3x^{p-3}(\Delta x)^3-\frac{1}{4}(p)_5x^{p-5}(\Delta x)^5$$

$$+\frac{17}{16}(p)_7x^{p-7}(\Delta x)^7-\ldots\ldots$$

Setzt man $2n$ statt $n$ in Nr. 363., so entsteht

$$12)\quad x^p-(x+\varDelta x)^p+(x+2\varDelta x)^p-(x+3\varDelta x)^p\ldots.+(x+2n\varDelta x)^p$$

$$=\frac{1}{2}(x+2n\varDelta x)^p+\frac{p}{4}(x+2n\varDelta x)^{p-1}\varDelta x-\frac{(p)_3}{8}(x+2n\varDelta x)^{p-3}(\varDelta x)^3+\ldots.$$

$$+\frac{1}{2}x^p-\frac{1}{4}px^{p-1}\varDelta x+\frac{1}{8}(p)_3x^{p-3}(\varDelta x)^3-\frac{1}{4}(p)_5x^{p-5}(\varDelta x)^5$$

$$+\frac{17}{16}(p)_7x^{p-7}(\varDelta x)^7-\ldots..$$

Wird 11) und 12) zusammen gezählt und durch 2 gemessen, wird ferner

$$(x+(2n-1)\varDelta x)^p=(x+2n\varDelta x)^p(1-\frac{\varDelta x}{x+2n\varDelta x})^p$$

geschrieben und der erste Factor ausgeschieden, so gewinnt man

$$13)\quad x^p-(x+\varDelta x)^p+(x+2\varDelta x)^p-(x+3\varDelta x)^p\ldots.$$

$$-(x+(2n-1)\varDelta x)^p+\frac{1}{2}(x+2n\varDelta x)^p$$

$$=\frac{1}{4}(x+2n\varDelta x)^p[1-(1-\frac{\varDelta x}{x+2n\varDelta x})^p]$$

$$+\frac{p}{8}(x+2n\varDelta x)^{p-1}(\varDelta x)[1-(1-\frac{\varDelta x}{x+2n\varDelta x})^p]$$

$$-\frac{(p)_3}{16}(x+2n\varDelta x)^{p-3}(\varDelta x)^3[1-(1-\frac{\varDelta x}{x+2n\varDelta x})^p]$$

$$+\frac{(p)_5}{8}(x+2n\varDelta x)^{p-5}(\varDelta x)^5[1-(1-\frac{\varDelta x}{x+2n\varDelta x})^p]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$+\frac{1}{2}x^p-\frac{1}{4}px^{p-1}\varDelta x+\frac{1}{8}(p)_3x^{p-3}(\varDelta x)^3-\frac{1}{4}(p)_5x^{p-5}(\varDelta x)^5$$

$$+\frac{17}{16}(p)_7x^{p-7}(\varDelta x)^7-\ldots..$$

Bei unendlich zunehmendem $n$ geht $(1-\frac{\varDelta x}{x+n\varDelta x})^p$ in die Einheit über und es verschwinden die Glieder der Doppelreihe in 13). Man erhält daher

$$14)\ \mathrm{Lim}[x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p \ldots -(x+(2n-1)\Delta x)^p+\tfrac{1}{2}(x+2n\Delta x)^p]$$

$$=\mathrm{Lim}[S(-)^{2n-1}(x+(2n-1)\Delta x)^p+\tfrac{1}{2}(x+2n\Delta x)^p]$$

$$=\tfrac{1}{2}x^p-\tfrac{1}{4}px^{p-1}\Delta x+\tfrac{1}{8}(p)_3x^{p-3}(\Delta x)^3-\tfrac{1}{4}(p)_5x^{p-5}(\Delta x)^5+\ldots$$

Hiernach haben alle hierher gehörigen Reihen Grenzwerthe, welche sich nach der Besonderheit der Fälle gestalten werden.

Setzt man nun $a$ statt $x$, $x$ statt $2n-1$ und $h$ statt $\Delta x$ in 13), so zieht man hieraus für ein unendlich wachsendes $x$

$$15)\ \mathrm{Lim}[S(-)^x(a+xh)^p(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(a+(x+1)h)]$$

$$=\tfrac{1}{2}a^p-\tfrac{1}{4}pa^{p-1}h+\tfrac{1}{8}(p)_3a^{p-3}h^3-\tfrac{1}{4}(p)_5a^{p-5}h^5+\ldots$$

Wird $a=1$, $h=2$, $p=1, 2, 3, 4\ldots$ gesetzt, so entsteht

$$16)\quad \begin{aligned}
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+2x)^1(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+2(x+1))^1]= 0,\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+2x)^2(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+2(x+1))^2]=-\tfrac{1}{2},\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+2x)^3(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+2(x+1))^3]= 0,\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+2x)^4(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+2(x+1))^4]= 2{,}5,\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+2x)^5(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+2(x+1))^5]= 0,\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+2x)^6(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+2(x+1))^6]=-30{,}5,\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+2x)^7(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+2(x+1))^7]= 0
\end{aligned}$$

u. s. w.

Für $a=1$, $h=3$, $p=1, 2, 3\ldots$ wird

$$17)\quad \begin{aligned}
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+3x)^1(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+3(x+1))^1]=-\tfrac{1}{4},\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+3x)^2(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+3(x+1))^2]=-1,\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+3x)^3(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+3(x+1))^3]=+\tfrac{19}{8},\\
&\mathrm{Lim}[S(-)^x(1+3x)^4(-)^{x+1}\tfrac{1}{2}(1+3(x+))^4]=+11
\end{aligned}$$

u. s. w.

Für $a=1$, $h=4$, $p=1, 2, 3\ldots$ wird

18) $$\mathrm{Lim}\left[S(-)^x(1+4x)^1(-)^{x+1}(1+4(x+1))^1\right]=-\tfrac{1}{2},$$
$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^x(1+4x)^2(-)^{x+1}(1+4(x+1))^2\right]=-\tfrac{3}{2},$$
$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^x(1+4x)^3(-)^{x+1}(1+4(x+1))^3\right]=+5{,}5,$$
$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^x(1+4x)^4(-)^{x+1}(1+4(x+1))^4\right]=+28{,}5$$

u. s. w.

## III. Summirung der reciproken Fakultäten-Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind.

§. 8.

Aus Nr. 351. und 352. §. 73. der Lehre von den aufsteigenden Functionen ist

1) $$X_0-X_1+X_2-X_3\ldots.(-)^nX_n=(-)^n\zeta^{-1}X_{n+1}+\zeta^{-1}X_0.$$

Setzt man hierin

$$X_0=\frac{1}{x^{p|\Delta x}},$$

so entsteht

2) $$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}-\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}-\ldots.(-)^n\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$=(-)^n\zeta^{-1}\frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}}+\zeta^{-1}\frac{1}{x^{p|\Delta x}}.$$

Nun ist aus Nr. 342. der oben angeführten Schrift

3) $$\zeta^{-1}X=\frac{X}{2}-\frac{\Delta X}{2^2}+\frac{\Delta^2 X}{2^3}-\frac{\Delta^3 X}{2^4}+\ldots.$$

Ferner ist, wenn $y$ eine Function von $x$ bedeutet,

4) $$\Delta^m\frac{1}{y^{p|\Delta x}}=(-)^m\frac{p^{m|1}(\Delta x)^m}{y^{p+m|\Delta x}}.$$

Durch Einführung der Werthe aus 4) in 3) entsteht

5) $$\zeta^{-1}\frac{1}{y^{p|\Delta x}}=\frac{1}{2y^{p|\Delta x}}+\frac{p.\Delta x}{4y^{p+1|\Delta x}}+\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{8.y^{p+2|\Delta x}}+\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{16y^{p+3|\Delta x}}+\ldots.$$

Unterscheidet man zwischen einem geraden und ungeraden $n$ in 2) und führt die entsprechenden Werthe aus 5) ein, so ergeben sich folgende zwei Darstellungen:

6) $$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}-\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}-\ldots-\frac{1}{(x+(2n-1)\Delta x)^{p|\Delta x}}$$

$$=-\frac{1}{2(x+2n\Delta)^{p|\Delta x}}-\frac{p.\Delta x}{4(x+2n\Delta x)^{p+1|\Delta x}}-\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{8(x+2n\Delta x)^{p+2|\Delta x}}-\ldots$$

$$+\frac{1}{2.x^{p|\Delta x}}+\frac{p.\Delta x}{4.x^{p+1|\Delta x}}+\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{8.x^{p+2|\Delta x}}+\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{16x^{p+3|\Delta x}}+\ldots$$

$$=-\Sigma^q\frac{p^{q|1}(\Delta x)^q}{2^{q+1}(x+2n\Delta x)^{p+q|\Delta x}}+\Sigma^q\frac{p^{q|1}(\Delta x)^q}{2^{q+1}x^{p+q|\Delta x}}.$$

7) $$\frac{1}{x^{p|\Delta x}}-\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}-\ldots+\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$

$$=\Sigma^q\frac{p^{q|1}(\Delta x)^q}{2^{q+1}(x+(2n+1)\Delta x)^{p+q|\Delta x}}+\Sigma^q\frac{p^{q|1}(\Delta x)^q}{2^{q+1}x^{p+q|\Delta x}};$$

$q$ hat hierin die Werthe 0, 1, 2, 3, 4.... zu durchlaufen. Setzt man nun $x=1$, $\Delta x=1$, so entsteht

8) $$\frac{1}{1^{p|1}}-\frac{1}{2^{p|1}}+\frac{1}{3^{p|1}}-\frac{1}{4^{p|1}}+\ldots-\frac{1}{(2n)^{p|1}}$$

$$=-\frac{1}{2(2n+1)^{p|1}}-\frac{p}{4(2n+1)^{p+1|1}}-\frac{p(p+1)}{8(2n+1)^{p+2|1}}-\ldots$$

$$+\frac{1}{2.1^{p|1}}+\frac{p}{4.1^{p+1|1}}+\frac{p(p+1)}{8.1^{p+2|1}}+\frac{p(p+1)(p+2)}{16.1^{p+3|1}}+\ldots$$

9) $$\frac{1}{1^{p|1}}-\frac{1}{2^{p|1}}+\frac{1}{3^{p|1}}-\frac{1}{4^{p|1}}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)^{p|1}}$$

$$=\frac{1}{2(2n+2)^{p|1}}+\frac{p}{4(2n+2)^{p+1|1}}+\frac{p(p+1)}{8(2n+2)^{p+2|1}}+\ldots$$

$$+\frac{1}{2.1^{p|1}}+\frac{p}{4.1^{p+1|1}}+\frac{p(p+1)}{8.1^{p+2|1}}+\frac{p(p+1)(p+2)}{16.1^{p+3|1}}+\ldots$$

Für ein unendlich wachsendes $n$ erhalten die vorliegenden Reihen folgenden Grenzwerth:

10) $$\frac{1}{1^{p|1}}-\frac{1}{2^{p|1}}+\frac{1}{3^{p|1}}-\frac{1}{4^{p|1}}+\ldots.$$
$$=\frac{1}{2.1^{p|1}}+\frac{p}{4.1^{p+1|1}}+\frac{p(p+1)}{8.1^{p+2|1}}+\frac{p(p+1)(p+2)}{16.1^{p+3|1}}+\ldots.$$
$$=\frac{1}{1^{p-1|1}}\left(\frac{1}{2p}+\frac{1}{4(p+1)}+\frac{1}{8(p+2)}+\frac{1}{16(p+3)}+\ldots\right).$$

**Diese Reihe convergirt für kleine Werthe von $p$ ziemlich langsam und wird daher in diesem Falle nicht zweckmässig zu gebrauchen sein. Die Grenzwerthe für diese Reihe lassen sich aber durch die höheren Integrale der Logarithmen auf folgende Weise sehr einfach bestimmen.**

**Im 44. Bande des Journals von Crelle habe ich gezeigt, dass ist**

11)
$$\int_{0,x}^{r}\lg(b+ax)(\partial x)^r=\frac{(b+ax)^r\lg(b+ax)}{1.2.3\ldots.r.a^r}-\frac{C(1,2,3,\ldots.r)^{r-1}(b+ax)^r}{1.2.3\ldots.r.1.2.3\ldots.r.a^r}$$
$$-\frac{1}{1.2\ldots.(r-1)}\left(\frac{b}{a}\lg b-\frac{b}{a}\right)x^{r-1}$$
$$-\frac{1}{1.2\ldots.(r-2)}\left(\frac{b^2\lg b}{a^2.1.2}-\frac{3b^2}{4.a^2}\right)x^{r-2}$$
$$-\frac{1}{1.2\ldots.(r-3)}\left(\frac{b^3\lg b}{a^3.1.2.3}-\frac{11b^3}{36.a^3}\right)x^{r-3}$$
$$-\frac{1}{1.2\ldots.(r-4)}\left(\frac{b^4\lg b}{a^4.1.2.3.4}-\frac{50.b^4}{24^2.a^4}\right)x^{r-4}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$-\frac{1}{1.2}\left(\frac{b^{r-2}\lg b}{a^{r-2}1.2.3\ldots.(r-2)}-\frac{C(1,2,\ldots.r-2)^{r-3}b^{r-2}}{1.2\ldots.(r-2)1.2\ldots.(r-2)a^{r-2}}\right)x^2$$
$$-\frac{1}{1}\left(\frac{b^{r-1}\lg b}{a^{r-1}1.2.3\ldots.(r-1)}-\frac{C(1,2\ldots.r-1)^{r-2}b^{r-1}}{1.2\ldots.(r-1)1.2\ldots.(r-1)a^{r-1}}\right)x$$
$$-\left(\frac{b^r\lg b}{a^r1.2\ldots.r}-\frac{C(1,2,\ldots.r)^{r-1}b^r}{1.2\ldots.r.1.2\ldots.ra^r}\right),$$

**wenn $\int_{0,x}^{r}$ das $r$te Integral zwischen den Grenzen 0 und $x$ bedeutet. Nun ist auch**

$$\int \lg(b+ax)\partial x = \lg b . x + \frac{ax^2}{b.1.2} - \frac{a^2.x^3}{b^2.2.3} + \frac{a^3x^4}{b^3.3.4} - \frac{a^4x^5}{b^4.4.5} + \dots$$

$$\int^2 \lg(b+ax)(\partial x)^2 = \frac{\lg b x^2}{1.2} + \frac{a.x^3}{b.1.2.3} - \frac{a^2x^4}{b^2.2.3.4} + \frac{a^3.x^5}{b^3.3.4.5} - \frac{a^4x^6}{b^4.4.5.6} + \dots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$12)\quad \int^r \lg(b+ax)(\partial x)^r = \frac{\lg b x^r}{1^{r|1}} + \frac{ax^{r+1}}{b1^{r+1|1}} - \frac{a^2x^{r+2}}{b^2.2^{r+2|1}} + \frac{a^3.x^{r+3}}{b^3 3^{r+3|1}} - \frac{a^4.x^{r+4}}{b^4.4^{r+4|1}} + \dots$$

Setzt man nun $p-1$ statt $r$ in 11) und 12), ferner $a=1$, $b=1$ und $x=1$, oder nimmt man die Integrale zwischen den Grenzen 0 und 1, so erhält man:

$$13)\quad \frac{1}{1^{p|1}} - \frac{1}{2^{p|1}} + \frac{1}{3^{p|1}} - \frac{1}{4^{p|1}} + \dots$$

$$= \int_{0,1}^{p-1} \lg(1+x)(\partial x)^{p-1} = \frac{2^{p-1}\lg 2}{1^{p-1|1}} - \frac{C(1,2,\dots p-1)^{p-2}2^{p-1}}{1^{p-1|1}.1^{p-1|1}}$$

$$+\frac{1}{1^{p-2|1}} + \frac{3}{4.1^{p-3|1}} + \frac{11}{36.1^{p-4|1}} + \frac{50}{24^2.1^{p-5|1}} \dots$$

$$+\frac{C(1,2\dots p-3)^{p-4}}{2.1^{p-3|1}1^{p-3|1}} + \frac{C(1,2\dots p-2)^{p-3}}{1^{p-2|1}1^{p-2|1}} + \frac{C(1,2\dots p-1)^{p-2}}{1^{p-1|1}1^{p-1|1}}.$$

Hier bedeuteten die $C$ die Summenausdrücke der Verbindungen ohne Wiederholungen aus den eingeschlossenen Elementen zur angezeigten Classe. Benutzt man diese Darstellung, so ergeben sich die Grenzwerthe für die fraglichen Summen, welche alle, wie sich zeigt, auf den natürlichen Logarithmen von 2 zurückführen. Hieraus entsteht

14)

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5} + \dots = 0,386\ 294\ 361\ 119\ 890\ 618\ 8\dots = K_2,$$

$$\frac{1}{1^{3|1}} - \frac{1}{2^{3|1}} + \frac{1}{3^{3|1}} - \frac{1}{4^{3|1}} + \dots = 0,136\ 294\ 361\ 119\ 890\ 618\ 8\dots = K_3,$$

$$\frac{1}{1^{4|1}} - \frac{1}{2^{4|1}} + \frac{1}{3^{4|1}} - \frac{1}{4^{4|1}} + \dots = 0,035\ 307\ 351\ 857\ 704\ 857\ 00.. = K_4,$$

$$\frac{1}{1^{5|1}} - \frac{1}{2^{5|1}} + \frac{1}{3^{5|1}} - \frac{1}{4^{5|1}} + \dots = 0,007\ 237\ 009\ 262\ 185\ 761\ 83.. = K_5,$$

$$\frac{1}{1^{6|1}}-\frac{1}{2^{6|1}}+\frac{1}{3^{6|1}}-\frac{1}{4^{6|1}}+\ldots=0{,}001\,228\,137\,035\,207\,638\ldots=K_6,$$

$$\frac{1}{1^{7|1}}-\frac{1}{2^{7|1}}+\frac{1}{3^{7|1}}-\frac{1}{4^{7|1}}+\ldots=0{,}000\,177\,875\,309\,032\,175\,7\ldots=K_7,$$

$$\frac{1}{1^{8|1}}-\frac{1}{2^{8|1}}+\frac{1}{3^{8|1}}-\frac{1}{4^{8|1}}+\ldots=0{,}000\,012\,483\,194\,870\,871\,1\ldots=K_8,$$

$$\frac{1}{1^{9|1}}-\frac{1}{2^{9|1}}+\frac{1}{3^{9|1}}-\frac{1}{4^{9|1}}+\ldots=0{,}000\,002\,520\,600\,306\,019\,3\ldots=K_9,$$

$$\frac{1}{1^{10|1}}-\frac{1}{2^{10|1}}+\frac{1}{3^{10|1}}-\frac{1}{4^{10|1}}+\ldots=0{,}000\,000\,253\,940\,965\,293\,3\ldots=K_{10},$$

u. s. w.

Zugleich erhält man hieraus

$$15)\quad \int_{0,1}^{p-1} \lg(1+x)(\partial x)^{p-1}$$

$$=\frac{1}{1^{p-1|1}}\left(\frac{1}{2p}+\frac{1}{4(p+1)}+\frac{1}{8(p+2)}+\frac{1}{16(p+3)}+\ldots\right).$$

Für Reihen von beschränkter Gliederzahl entsteht aus 8) und 9):

$$16)\quad \frac{1}{1^{p|1}}-\frac{1}{2^{p|1}}+\frac{1}{3^{p|1}}-\frac{1}{4^{p|1}}\ldots-\frac{1}{(2n)^{p|1}}$$

$$=K_p-\frac{1}{2(2n+1)^{p|1}}-\frac{p}{4(2n+1)^{p+1|1}}-\frac{p(p+1)}{8(2n+1)^{p+2|1}}-\ldots,$$

$$17)\quad \frac{1}{1^{p|1}}-\frac{1}{2^{p|1}}+\frac{1}{3^{p|1}}-\frac{1}{4^{p|1}}\ldots+\frac{1}{(2n+1)^{p|1}}$$

$$=K_p+\frac{1}{2(2n+2)^{p|1}}+\frac{p}{4(2n+2)^{p+1|1}}+\frac{p(p+1)}{8(2n+2)^{p+2|1}}+\ldots,$$

woraus sich nun die besonderen Fälle für $p=2, 3, 4, 5\ldots$ leicht ergeben.

Es sollen nun noch einige weitere Anwendungen hier gemacht werden. Aus No. 396. der Lehre von den aufsteigenden Functionen ist:

$$18)\quad \frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{(p-1).\Delta x.x^{p-1|\Delta x}}-\frac{1}{(p-1)\Delta x.(x+(n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}}.$$

für jedes $n$, $x$ und $\Delta x$. Setzt man $x=1$, $\Delta x=1$ und $n-1$ statt $n$, so hat man:

$$19)\quad \frac{1}{1^{p|1}}+\frac{1}{2^{p|1}}+\frac{1}{3^{p|1}}+\ldots\frac{1}{n^{p|1}}$$

$$=\frac{1}{(p-1)^{p-1|1}}-\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1|1}}=M_p-\frac{1}{(p-1)(n+1)^{p-1|1}}.$$

Für die $M$ ergeben sich folgende Werthe, welche die Grenzwerthe der in's Unendliche fortlaufenden Reihen bilden:

20) $M_2=1$
$M_3=0,\ 25$
$M_4=0,\ 055\ 55\ldots.$
$M_5=0,\ 010\ 416\ 666$
$M_6=0,\ 001\ 666\ldots.$
$M_7=0,\ 000\ 231\ 481\ 481\ldots.$
$M_8=0,\ 000\ 028\ 344\ 671\ 201\ 814\ 058\ 956\ 9\ldots.$
$M_9=0,\ 000\ 003\ 100\ 198\ 412\ 698\ 412\ 698\ldots.$
$M_{10}=0,\ 000\ 000\ 306\ 192\ 435\ 822\ 065\ 451\ 6\ldots.$
$M_{11}=10^{-7}.0,\ 275\ 573\ 192\ 239\ 858\ 906\ 255\ 573\ 19\ldots.$
$M_{12}=10^{-8}.0,\ 227\ 746\ 439\ 867\ 651\ 988\ 864\ldots.$
$M_{13}=10^{-9}.0,\ 173\ 972\ 974\ 898\ 900\ 824\ 826\ 750\ldots.$
$M_{14}=10^{-10}.0,\ 123\ 531\ 106\ 437\ 089\ 343\ 072\ 249\ldots.$
$M_{15}=10^{-12}.0,\ 819\ 338\ 971\ 266\ 408\ 908\ 132\ 264\ldots.$
$M_{16}=10^{-13}.0,\ 509\ 810\ 915\ 454\ 654\ 431\ 726\ 742$
$M_{17}=10^{-14}.0,\ 298\ 717\ 333\ 274\ 211\ 581\ 089\ 88\ldots.$
$M_{18}=10^{-15}.0,\ 165\ 379\ 838\ 490\ 912\ 986\ 070\ 526\ldots.$
$M_{19}=10^{-17}.0,\ 867\ 733\ 720\ 477\ 012\ 581\ 234\ 242\ldots.$
$M_{20}=10^{-18}.0,\ 432\ 665\ 012\ 980\ 227\ 879\ 839\ldots.$
$M_{21}=10^{-19}.0,\ 205\ 515\ 881\ 165\ 608\ 242\ 923\ldots.$

u. s. w. Die Werthe der Reihen bei höhern $p$ influiren nicht mehr auf die zwanzigste Decimalstelle.

Setzt man $2n$ statt $n$ in 18), so wird

$$21)\quad \frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\ldots\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{(p-1)\Delta x\, x^{p-1|\Delta x}}-\frac{1}{(p-1)\Delta x(x+(2n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}}.$$

Vereinigt man diese Gleichung mit 7) und theilt durch 2, so entsteht

$$22)\quad \frac{1}{x^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+4\Delta x)^{p|\Delta x}}\cdots\frac{1}{(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}}$$
$$=\frac{1}{2(p-1)x^{p-1|\Delta x}}-\frac{1}{2(p-1)(x+(2n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}}$$
$$+\frac{1}{4(x+(2n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{p.\Delta x}{8(x+(2n+1)\Delta x)^{p+1|\Delta x}}$$
$$+\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{16(x+(2n+1)\Delta x)^{p+2|\Delta x}}+\cdots\frac{1}{4x^{p|\Delta x}}+\frac{p\Delta x}{8x^{p+1|\Delta x}}+\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{16x^{p+2|\Delta x}}$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{32x^{p+3|\Delta x}}+\cdots.$$

Für $x=1$, $\Delta x=1$ geht hieraus hervor:

$$23)\quad \frac{1}{1^{p|1}}+\frac{1}{3^{p|1}}+\frac{1}{5^{p|1}}+\frac{1}{7^{p|1}}+\cdots\frac{1}{(2n+1)^{p|1}}$$
$$=\tfrac{1}{2}M_p+\tfrac{1}{2}K_p-\frac{1}{2(p-1)(2n+2)^{p-1|1}}+\frac{1}{4(2n+2)^{p|1}}$$
$$+\frac{p}{8(2n+2)^{p+1|1}}+\frac{p(p+1)}{16(2n+2)^{p+2|1}}\cdots;$$

diess führt zu folgenden besonderen Fällen:

$$24)\quad \frac{1}{1.2}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{7.8}+\cdots\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$$
$$=0{,}693\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309\ 4\ldots$$
$$-\frac{1}{2(2n+2)}+\frac{1}{4(2n+2)^{2|1}}+\frac{1}{4(2n+2)^{3|1}}+\frac{3}{8(2n+2)^{4|1}}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1^{3|1}}+\frac{1}{3^{3|1}}+\frac{1}{5^{3|1}}+\frac{1}{7^{3|1}}+\cdots\frac{1}{(2n+1)^{3|1}}$$
$$=0{,}193\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309\ 4\ldots$$
$$-\frac{1}{2.2(2n+2)^{2|1}}+\frac{1}{4(2n+2)^{3|1}}+\frac{3}{8(2n+2)^{4|1}}+\frac{3}{4(2n+2)^{5|1}}+\cdots,$$

$$\frac{1}{1^{4|1}}+\frac{1}{3^{4|1}}+\frac{1}{5^{4|1}}+\frac{1}{7^{4|1}}+\cdots\frac{1}{(2n+1)^{4|1}}$$
$$=0{,}045\ 421\ 453\ 706\ 630\ 206\ 278\ldots$$
$$=\frac{1}{6(2n+2)^{3|1}}+\frac{1}{4(2n+2)^{4|1}}+\frac{1}{2(2n+2)^{5|1}}+\frac{5}{4(2n+2)^{6|1}}+\cdots$$

u. s. w. Nennt man die begleitenden Zahlen, welche die Grenzwerthe für unendliche Reihen dieser Art bilden, der Reihe nach $N_2$, $N_3$, $N_4$, ...., so hat man hiefür folgende Tafel:

$$25)\quad \begin{aligned}
N_2 &= 0,\ 693\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309\\
N_3 &= 0,\ 193\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309\\
N_4 &= 0,\ 045\ 421\ 453\ 706\ 630\ 206\ 27\\
N_5 &= 0,\ 008\ 826\ 837\ 964\ 426\ 214\\
N_6 &= 0,\ 001\ 447\ 401\ 850\ 937\ 162\\
N_7 &= 0,\ 000\ 204\ 678\ 395\ 256\ 829\\
N_8 &= 0,\ 000\ 020\ 413\ 933\ 036\ 342\\
N_9 &= 0,\ 000\ 002\ 810\ 399\ 358\ 858\ 8\\
N_{10} &= 0,\ 000\ 000\ 280\ 066\ 700\ 557\ 7\\
N_{11} &= 0,\ 000\ 000\ 025\ 394\ 096\ 529\ 8
\end{aligned}$$

u. s. w.

Die Werthe der $N$ lassen sich auch direct und auf folgende Art berechnen. Wird $-a$ statt $a$ in 11) gesetzt und werden sämmtliche Glieder mit $-1$ verbunden, so ist

$$26)\quad -\int_{0,x}^{r} \lg(b-ax)(\partial x)^r = -\frac{\lg b.x^r}{1^{r|1}}+\frac{ax^{r+1}}{b.1^{r+1|1}}+\frac{a^2x^{r+2}}{b^2.2^{r+1|1}}+\frac{a^3x^{r+3}}{b.^3 3^{r+1|1}}\cdots$$

$$=(-)^{r+1}\frac{(b-ax)^r\lg(b-ax)}{1^{r|1}a^r}(-)^{r+2}\frac{C(1,2\ldots.r)^{r-1}(b-ax)^r}{1^{r|1}\,1^{r|1}\,a^r}$$

$$+\frac{1}{1^{r-1|r}}\left(-\frac{b\lg b}{a}+\frac{b}{a}\right)x^{r-1}$$

$$+\frac{1}{1^{r-2|1}}\left(\frac{b^2\lg b}{a^2.1.2}-\frac{3b^2}{4.a^2}\right)x^{r-2}$$

$$+\frac{1}{1^{r-3|1}}\left(-\frac{b^3\lg b}{a^3.1.2.3}+\frac{11.b^3}{36.a^3}\right)x^{r-3}$$

$$+\frac{1}{1^{r-4|1}}\left(\frac{b^4\lg b}{a^4 1.2.3.4}-\frac{50.b^4}{24^2.a^4}\right)x^{r-4}$$

$$+\frac{1}{1^{r-5|1}}\left(-\frac{b^5.\lg b}{a^5.1^{5|1}}+\frac{274b^5}{120^2.a^5}\right)x^{r-5}$$

. . . . . . . . . . . .

Nun ist

$$\int_{0,x}^{r} \lg(b+ax)(\partial x)^r-\int_{0,x}^{r} \lg(b-ax)(\partial x)^r=\int_{0,x}^{r} \lg\frac{b+ax}{b-ax}(\partial x)^r.$$

**Zählt man daher die Gleichungen 25) und 11) zusammen und theilt mit 2, so wird mit Rücksicht auf 12):**

$$26)\quad \frac{a.x^{r+1}}{b.1^{r+1|1}}+\frac{a^3x^{r+3}}{b^3.3^{r+1|1}}+\frac{a^5x^{r+5}}{b^5.5^{r+1|r}}+\frac{a^7x^{r+7}}{b^7.7^{r+1|1}}+\dots=\tfrac{1}{2}\int_0^x{}^r\lg\frac{b+ax}{b-ax}(\partial x)^r$$

$$=\frac{1}{2.1^{r|1}.a^r}[(b+ax)^r\lg(b+ax)(-)^{r+1}(b-ax)\lg(b-ax)]$$

$$-\frac{C(1,2\dots r)^{r-1}}{2.1^{r|1}1^{r|1}a^r}[(b+ax)^r(-)^{r+1}(b-ax)^r]$$

$$-\frac{1}{1^{r-1|1}}\left(\frac{b\lg b}{a}-\frac{b}{a}\right)x^{r-1}$$

$$-\frac{1}{1^{r-3|1}}\left(\frac{b^3\lg b}{a^3.1.2.3}-\frac{C(1,2,3)^2b^3}{1^{3|1}1^{3|1}.a^3}\right)x^{r-3}$$

$$-\frac{1}{1^{r-5|1}}\left(\frac{b^5.\lg b}{a^5.1^{5|1}}-\frac{C(1,2,\dots 5)^4.b^5}{1^{5|1}1^{5|1}a^5}\right)x^{r-5}$$

$$-\frac{1}{1^{r-7|1}}\left(\frac{b^7\lg b}{a^7.1^{7|1}}-\frac{C(1,2\dots 7)^6b^6}{1^{6|1}1^{6|1}a^7}\right)x^{r-7}$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

Diese Reihe bricht ab, wenn der Exponent von $x^{p-q}$ in 1 oder 0 übergeht. Ersteres ist bei einem geraden, letzteres bei einem ungeraden $r$ der Fall.

Setzt man nun $a=1$, $b=1$ und $x=1$ oder nimmt das Integral zwischen den Grenzen von 0 bis 1, schreibt man ferner $p-1$ statt $r$, so entsteht:

$$27)\quad \frac{1}{1^{p|1}}+\frac{1}{3^{p|1}}+\frac{1}{5^{p|1}}+\frac{1}{7^{p|1}}+\dots=N_p$$

$$=\frac{2^{p-2}\lg 2}{1^{p-1|1}}-\frac{2^{p-2}C(1,2\dots p-1)^{p-2}}{1^{p-1|1}1^{p-1|1}}+\frac{1}{1^{p-2|1}}+\frac{C(1,2,3)^2}{1^{p-4|1}.1^{3|1}.1^{3|1}}$$

$$+\frac{C(1,2,\dots 5)^4}{1^{p-6|1}.1^{5|1}.1^{5|1}}+\frac{C(1,2,\dots 7)^6}{1^{p-8|1}.1^{7|1}.1^{7|1}}+\frac{C(1,2,\dots 9)^8}{1^{p-10|1}.1^{9|1}.1^{9|1}}+\dots$$

Hieraus kann man die Werthe der $N$ direct berechnen. Der Zusammenhang zwischen $N$, $M$ und $K$ ist

$$28)\quad N_p=\tfrac{1}{2}M_p+\tfrac{1}{2}K_p.$$

Hieraus bestimmt sich z. B.

$$K_{11}=0{,}000\ 000\ 023\ 230\ 873\ 835\ 7\dots=\frac{1}{1^{11|1}}-\frac{1}{2^{11|1}}+\frac{1}{3^{11|1}}-\dots$$

Aus den Gleichungen 11), 12), 26) und 27) leiten sich eine Menge hierher gehöriger Reihen ab. Der Werth von $x$ in 11) und 12) kann jede beliebige Zahl sein; eben so $a$ und $b$. In 26) ist diess nicht der Fall, denn es muss $b \geqq ax$ sein. Dasselbe gilt von 26).

Zugleich zeigt sich aus 11), 12), 26) und 27), dass alle hierher gehörige und den genannten Bedingungen unterliegende Reihen Grenzwerthe haben oder convergiren.

Setzt man $a=1$, $b=1$, $x=\frac{1}{q}$ und schreibt $p-1$ statt $r$ in 26), so entsteht

$$28)\quad \frac{1}{1^{p|1}q^p}+\frac{1}{3^{p|1}q^{p+2}}+\frac{1}{5^{p|1}q^{p+4}}+\dots$$

$$=\frac{1}{2.1^{p-1|1}}\left[\left(\frac{q+1}{q}\right)^{p-1}\lg\frac{q+1}{q}(-)^p\left(\frac{q-1}{q}\right)^{p-1}\lg\frac{q-1}{q}\right]$$

$$-\frac{C(1,2,\dots p-1)^{p-2}}{2.1^{p-1|1}1^{p-1|1}}\left[\left(\frac{q+1}{q}\right)^{p-1}(-)^p\left(\frac{q-1}{q}\right)^{p-1}\right]$$

$$+\frac{1}{1^{p-1|1}q^{p-2}}+\frac{C(1,2,3)^2}{1^{p-4|1}.1^{3|1}1^{3|1}q^{p-4}}+\frac{C(1,2,\dots 5)^4}{1^{p-6|1}1^{5|1}1^{5|1}q^{p-6}}+\dots$$

Dieselben Werthe lassen sich in 11) und 12), sowie in 25) einführen, wodurch andere Reihen entstehen.

Nimmt man 11) und 12) negativ und vereinigt die hierdurch sich ergebenden Resultate mit 26), theilt dann durch 2, so entsteht:

$$29)\quad \frac{1}{2}\int_{0,x}^{r}\frac{(\partial x)^r}{\lg(b^2-a^2x^2)}=-\frac{\lg b.x^r}{1^{r|1}}+\frac{a^2.x^{r+2}}{b^2.2^{r+1|1}}+\frac{a^4x^{r+4}}{b^4.4^{r+1|1}}+\frac{a^6.x^{r+6}}{b^6.6^{r+1|1}}+\dots$$

$$=-\frac{(b+ax)^r.\lg(b+ax)}{2.1^{r|1}a^r}(-)^{r+1}\frac{(b-ax)^r\lg(b-ax)}{2.1^{r|1}a^r}$$

$$+\frac{C(1,2\dots r)^{r-1}}{2.1^{r|1}1^{r|1}a^r}\left[(b+ax)^r(-)^{r+2}(b-ax)^r\right]$$

$$+\frac{1}{1^{r-2|1}}\left(\frac{b^2\lg b}{a^2.1^{2|1}}-\frac{C(1,2)^1b^2}{1^{2|1}1^{2|1}a^2}\right)x^{r-2}$$

$$+\frac{1}{1^{r-4|1}}\left(\frac{b^4\lg b}{a^4 1^{4|1}}-\frac{C(1,2,3,4)^3b^4}{1^{4|1}1^{4|1}a^4}\right)x^{r-4}$$

$$+\frac{1}{1^{r-6|1}}\left(\frac{b^6\lg b}{a^6.1^{6|1}}-\frac{C(1,2\dots 6)^5b^6}{1^{6|1}1^{6|1}a^6}\right)x^{r-6}$$

. . . . . . . . . . . . . . . .

und hieraus für $a=1$, $b=1$, $x=1$:

$$30)\quad \frac{1}{2^{r+1|1}}+\frac{1}{4^{r+1|1}}+\frac{1}{6^{r+1|1}}+\frac{1}{8^{r+1|1}}+\cdots$$

$$=-\frac{2^{r-1}\lg 2}{1^{r|1}}+\frac{C(1,2\ldots.r)^{r-1}.2^{r-1}}{1^{r|1}.1^{r|1}}-\frac{C(1,2)^1}{1^{r-2|1}.1^{2|1}.1^{2|1}}-\frac{C(1,2,3,4)^3}{1^{r-4|1}1^{4|1}1^{4|1}}$$

$$-\frac{C(1,2,\ldots.6)^5}{1^{r-6|1}1^{6|1}1^{6|1}}-\frac{C(1,2,\ldots.8)^7}{1^{r-8|1}1^{8|1}1^{8|1}}-\cdots$$

Diese Gleichungen eröffnen eine neue Gattung von Reihen. Zieht man 7) von 21) ab und theilt das Resultat durch 2, so entsteht zur Bestimmung der Summe einer Reihe von beschränkter Gliederanzahl:

$$31)\quad \frac{1}{(x+\Delta x)^{p|\Delta x}}+\frac{1}{(x+3\Delta x)^{p|\Delta x}}+\cdots\frac{1}{(x+(2n-1)\Delta x)^{p|\Delta x}}$$

$$=\frac{1}{2(p-1).\Delta x.x^{p-1|\Delta x}}-\frac{1}{2(p-1).\Delta x(x+(2n+1)\Delta x)^{p-1|\Delta x}}$$

$$-\frac{1}{4(x+(2n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}}-\frac{p.\Delta x}{8(x+(2n+1)\Delta x)^{p+1|\Delta x}}$$

$$-\frac{p^{2|1}.(\Delta x)^2}{16(x+(2n+1)\Delta x)^{p+2|\Delta x}}-\frac{1}{4.x^{p|\Delta x}}-\frac{p.\Delta x}{8.x^{p+1|\Delta x}}$$

$$-\frac{p(p+1)(\Delta x)^2}{16.x^{p+2|\Delta x}}-\cdots.$$

Wird hierin $x=1$ und $\Delta x=1$ gesetzt, so treten die bekanntenGrenzwerthe (14) und 20)) auch hier ein und es entsteht:

$$32)\quad \frac{1}{2^{p|1}}+\frac{1}{4^{p|1}}+\frac{1}{6^{p|1}}+\cdots\frac{1}{(2n)^{p|1}}=\tfrac{1}{2}M_p-\tfrac{1}{2}K_p-\frac{1}{2(p-1)(2n+2)^{p-1|1}}$$

$$-\frac{1}{4(2n+2)^{p|1}}-\frac{p}{8(2n+2)^{p+1|1}}-\frac{p(p+1)}{16(2n+2)^{p+2|1}}-\cdots$$

Aus der Gleichung

$$33)\quad Q_p=\tfrac{1}{2}M_p-\tfrac{1}{2}K_p$$

kann man die Grenzwerthe für diese Art Reihen leicht berechnen. Man wird erhalten:

34) $Q_2 = 0,\ 306\ 852\ 819\ 440\ 054\ 691$

$Q_3 = 0,\ 056\ 852\ 819\ 440\ 054\ 691$

$Q_4 = 0,\ 010\ 124\ 101\ 848\ 925\ 360$

$Q_5 = 0,\ 001\ 589\ 828\ 702\ 240\ 452$

$Q_6 = 0,\ 000\ 219\ 264\ 815\ 729\ 514$

$Q_7 = 0,\ 000\ 026\ 803\ 086\ 224\ 653$

$Q_8 = 0,\ 000\ 007\ 930\ 738\ 165\ 471$

$Q_9 = 0,\ 000\ 000\ 289\ 799\ 053\ 839\ 5$

$Q_{10} = 0,\ 000\ 000\ 026\ 125\ 735\ 264$

$Q_{11} = 0,\ 000\ 000\ 002\ 163\ 222\ 694$

u. s. w.

## IV. Bestimmung der Grenzwerthe der Fakultäten-Reihen für ganze Zahlen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind.

### §. 9.

Nach dem Vorhergehenden ist

1) $x^{p|\Delta x} - (x+\Delta x)^{p|\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x} \ldots . (-)^n (x+n\Delta x)^{p|\Delta x}$
$$= (-)^n \zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x} + \zeta^{-1} x^{p|\Delta x},$$

2) $x^{p|\Delta x} - (x+\Delta x)^{p|\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x} \ldots . (-)^{n+1}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}$
$$= (-)^{n+1}\zeta^{-1}(x+(n+2)\Delta x)^{p|\Delta x} + \zeta^{-1} x^{p|\Delta x}.$$

Wird 1) und 2) zusammengezählt und durch die Zahl 2 getheilt, so entsteht

3) $x^{p|\Delta x} - (x+\Delta x)^{p|\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x} \ldots .$
$$\ldots . (-)^n (x+n\Delta x)^{p|\Delta x} (-)^{n+1} \tfrac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}$$
$$= (-)^n \tfrac{1}{2}\zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x} (-)^{n+1} \tfrac{1}{2}\zeta^{-1}(x+(n+2)\Delta x)^{p|\Delta x}$$
$$+ \zeta^{-1} x^{p|\Delta x}.$$

Wächst nun $n$ in's Unendliche, so gehen die zwei ersten Glieder auf der rechten Seite in 3) in 0 über und man hat:

4) $\mathrm{Lim}\left[S(-)^n (x+n\Delta x)^{p|\Delta x} (-)^{n+1} \tfrac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}\right] = \zeta^{-1} x^{p|\Delta x},$

Nun ist nach §. 83. der **Lehre von den aufsteigenden Functionen**

$$5)\quad \zeta^{-1}x^{p|\Delta x}=\frac{x^{p|\Delta x}}{2}-\frac{\Delta x^{p|\Delta x}}{4}+\frac{\Delta^2 x^{p|\Delta x}}{8}-\frac{\Delta^3 x^{p|\Delta x}}{16},+\ldots.$$

$$=\frac{x^{p|\Delta x}}{2}-\frac{p(x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}}{4}(\Delta x)^1+\frac{p^{2|-1}(\Delta x)^2(x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}}{8}-\ldots$$

Hiernach ist

$$6)\quad \mathrm{Lim}\left[S(-)^n(x+n\Delta x)^{p|\Delta x}(-)^{n+1}\tfrac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}\right]$$

$$=\frac{x^{p|\Delta x}}{2}-\frac{p.\Delta x(x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}}{4}+\frac{p^{2|-1}(\Delta x)^2(x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}}{8}-\ldots$$

Hieraus ergeben sich folgende besondere Fälle für $x=1$, $\Delta x=1$ und $n-1$ statt $n$:

$$7)\quad \mathrm{Lim}\left[S(-)^{n-1}n^{2|1}(-)^n\tfrac{1}{2}(n+1)^{2|1}\right]=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^{n-1}n^{3|1}(-)^n\tfrac{1}{2}(n+1)^{3|1}\right]=\frac{3}{8},$$

$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^{n-1}n^{4|1}(-)^n\tfrac{1}{2}(n+1)^{4|1}\right]=\frac{3}{4},$$

$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^{n-1}n^{5|1}(-)^n\tfrac{1}{2}(n+1)^{5|1}\right]=\frac{15}{8},$$

u. s. w.

Für $x=1$, $\Delta x=2$ wird:

$$8)\quad \mathrm{Lim}\left[S(-)^{n-1}n^{2|2}(-)^n\tfrac{1}{2}(n+1)^{2|2}\right]=-\frac{1}{2},$$

$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^{n-1}n^{3|2}(-)^n\tfrac{1}{2}(n+1)^{3|2}\right]=-3,$$

$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^{n-1}n^{4|2}(-)^n\tfrac{1}{2}(n+1)^{4|2}\right]=-19{,}5,$$

$$\mathrm{Lim}\left[S(-)^{n-1}n^{5|2}(-)^n\tfrac{1}{2}(n+1)^{5|2}\right]=-150,$$

u. s. w.

## V. Bestimmung des Grenzwerthes der unendlichen Factorenfolge $\frac{1.3.5.7.9\ldots.}{2.4.6.8.10\ldots.}$.

### §. 10.

Im §. 25. Nr. 13. meiner **Theorie der analytischen Facultäten** habe ich gezeigt, dass

$$1)\quad \lg\frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)}{2.4.6.8\ldots.2n}=\lg 1-\lg 2+\lg 3-\lg 4\ldots.+\lg(2n-1)-\lg 2n$$

$$=-\tfrac{1}{2}\lg(2n+1)+\tfrac{1}{2}\lg\frac{2}{\pi}-\frac{1}{4(2n+1)}+\frac{1}{24.(2n+1)^3}-\frac{1}{20.(2n+1)^5}$$

$$+\frac{17}{16.7(2n+1)^7}-\ldots.$$

ist. Hieraus entsteht

$$2)\quad \lg\frac{1^{n|2}}{2^{n|2}}+\tfrac{1}{2}\lg(2n+1)=\tfrac{1}{2}\lg\frac{2}{\pi}-\frac{1}{4(2n+1)}+\frac{1}{24(2n+1)^3}-\frac{1}{20(2n+1)^5}+\ldots.$$

Für ein unendlich wachsendes $n$ erhält man als Grenzwerth

$$3)\quad \operatorname{Lim}\lg\frac{1^{n|2}\sqrt{2n+1}}{2^{n|2}}=\lg\sqrt{\frac{2}{\pi}}=-0,\ 225\ 811\ 352\ 644\ 727\ 4\ldots.$$

oder wenn man auf die Zahlen zurückgeht:

$$4)\quad \operatorname{Lim}\frac{1.3.5.7\ldots.(2n-1)\sqrt{2n+1}}{2.4.6.8\ldots.2n}=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}=0,\ 797\ 884\ 560\ 803\ldots.$$

Aus 1) und 2) folgt durch Zeichenänderung

$$-\lg 1+\lg 2-\lg 3+\lg 4\ldots.-\lg(2n-1)+\lg 2n-\tfrac{1}{2}\lg(2n+1)$$

$$=\tfrac{1}{2}\lg\pi-\tfrac{1}{2}\lg 2+\frac{1}{4(2n+1)}-\frac{1}{24(2n+1)^3}+\frac{1}{20(2n+1)^5}-\ldots.$$

oder

$$5)\quad \lg\frac{2^{n|2}}{1^{n|2}\sqrt{2n+1}}=\tfrac{1}{2}\lg\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4(2n+1)}-\frac{1}{24(2n+1)^3}+\frac{1}{20(2n+1)^5}-\ldots.$$

Der Grenzwerth ist hiefür:

$$6)\quad \operatorname{Lim}\lg\frac{2^{n|2}}{1^{n|2}\sqrt{2n+1}}=\lg\sqrt{\tfrac{1}{2}\pi}=0,225\ 811\ 352\ 644\ 727\ 4\ldots.$$

Bei dem Uebergang auf die Zahlen ergibt sich

$$7)\quad \operatorname{Lim}\frac{2.4.6.8\ldots.2n}{1.3.5.7\ldots.(2n-1)\sqrt{2n+1}}=\tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}=1,253\ 314\ 137\ 315\ldots.$$

Die hier gegebenen Bestimmungen gelten in aller Schärfe und bestätigen die Richtigkeit in der Anwendung auf besondere Fälle sogar bei kleinen Werthen für $n$. So ist z. B.

$$\frac{1.3.5.7\sqrt{9}}{2.4.6.8}=\frac{105}{128}=0{,}820\ 312\ 5\ldots.$$

$$\frac{1.3.5.7\ldots.23.\sqrt{25}}{2.4.6.8\ldots.22.24}=0{,}805\ 901\ 287\ldots.$$

Der erste Quotient ist um 0,0224...., der zweite um 0,00801.... von dem oben angegebenen verschieden. Eben so ist

$$\frac{2.4.6.8}{1.3.5.7.\sqrt{9}}=\frac{128}{105}=1{,}219\ 046\ 66\ldots.,$$

$$\frac{2.4.6.8\ldots.24}{1.3.5.7\ldots.23\sqrt{25}}=1{,}240\ 846\ldots.$$

Der erste Quotient ist um 0,034, der zweite um 0,012..,. von dem Werthe in 7) verschieden.

Euler hat sich mit Bestimmung des Grenzwerthes von 7) (Differential-Rechnung. 2. Thl. §. 11.) beschäftigt und denselben auf fünf Decimalstellen richtig angegeben. Den Factor $\sqrt{2n+1}$ hat er nicht berücksichtigt. Lacroix hat (Traité d. calc. diff. et intégr. T. III. p. 349.) das von Euler angegebene Verfahren wiederholt.

---

# II.

# Ueber Legendre's Beweis eines Fundamentalsatzes der Geometrie.

Von

Herrn Doctor *A. Uhde*,

Schulrath und Professor am Herzoglichen Collegio Carolino
zu Braunschweig.

---

Legendre giebt in seinen „Elementen der Geometrie, IV. Buch, 9. Satz" nach Crelle's Uebersetzung (4. Aufl. S. 102. und 103.) wörtlich folgenden Lehrsatz und Beweis:

„Lehrsatz.

Jede krumme oder gebrochene Linie, welche von einem Ende bis zum andern eine ausgebogene (convexe) Linie *AMB* umschliesst, ist länger als die umschlossene Linie *AMB*. (Taf. I. Fig. 1.)

Beweis. Gesetzt nun, die Linie *AMB* wäre nicht kürzer als alle, welche sie umgeben: so muss es unter den letzteren nothwendig eine geben, die kürzer ist als die übrigen, und zugleich kürzer als *AMB*, oder höchstens *AMB* gleich. *ACDEB* sei diese kürzeste, umschliessende Linie; alsdann ziehe man zwischen den beiden Linien an einer beliebigen Stelle eine gerade Linie *PQ*, welche *AMB* nicht trifft oder sie höchstens nur berührt: so ist die gerade *PQ* kürzer als *PCDEQ*; setzt man also *PQ* an die Stelle von *PCDEQ*, so hat man eine umgebende *APQB* (nicht *ABQP*, wie unrichtig gedruckt steht), welche kürzer ist als *APDQB*. Nach der Voraussetzung ist diese aber schon die kürzeste von allen: also ist die Voraussetzung nicht möglich; mithin sind alle umschliessenden Linien länger als *AMB*."

Der verdienstvolle Uebersetzer macht hierzu folgende Anmerkung:

„Dieser neunte Satz ist auch für die Lehre von den krummen Linien wichtig. Er kommt z. B. bei einer begründeten Ausmessung der Länge krummer Linien zur Anwendung. Man sehe desshalb etc. .... Legendre's scharfsinniger Beweis des Satzes ist sehr merkwürdig."

Auch der Uebersetzer hat also an dem Beweise keinen Anstoss gefunden. Mir aber scheint dieser Beweis keineswegs stichhaltig zu sein, und da der Satz selbst als Grundlage der Lehre von der Rectification krummer Linien wichtig genug ist, der hier gegebene Beweis desselben aber auf die Autorität von zwei so bedeutenden Namen hin von Vielen leicht ohne Weiteres als richtig hingenommen werden wird; so bedarf es, glaube ich, keiner Rechtfertigung, wenn ich meine Einwendungen gegen denselben hier zu weiterer Prüfung vorlege.

„Gesetzt also", so beginnt der Beweis, „die Linie *AMB* wäre nicht kürzer als alle, welche sie umgeben, so muss es unter den letzteren nothwendig eine geben, die kürzer ist als die übrigen und zugleich kürzer als *AMB*, oder höchstens *AMB* gleich." — Ist dem wirklich so? — Man trenne nur einmal die beiden Behauptungen, welche hierin liegen. Zunächst ist gesagt: wenn *AMB* nicht kürzer wäre als alle, welche sie umgeben, so müsse es unter den letzteren nothwendig — mindestens — eine geben, welche kürzer wäre als sie, oder höchstens ihr gleich. Dagegen ist nichts einzuwenden: die Folgerung enthält nicht mehr als die Voraussetzung. — Sodann ist aber auch behauptet: jene angenommene Linie müsse zugleich kürzer sein, als die übrigen, eine kürzeste unter den umschliessenden. Ist auch das zuzugeben? — Wenn die Linie *AMB* nicht kürzer wäre als alle, welche sie umgeben, so könnten diese entweder alle kürzer sein als sie, oder unter den umschliessenden könnten erst von einer gewissen Grenze an die folgenden kürzer sein als die umschlossene. Im einen wie im andern Falle soll unter den umschliessenden nothwendig eine die kürzeste sein? Wesshalb? Wesshalb soll nicht, wie in so vielen anderen Fällen, die Länge dieser Linien in's Unendliche abnehmen können, ohne doch jemals eine bestimmte Grenze der Kleinheit erreichen zu müssen? Wenn z. B. — um nur an einen ähnlichen Fall zu erinnern — die Coordinaten einer Hyperbel in die Richtung ihrer Asymptoten gelegt sind, wer wird dann behaupten wollen, unter den Ordinaten derselben müsse nothwendig eine die kürzeste sein?

Auf diesem Punkte aber beruht der ganze Beweis: weil unter den umschliessenden Linien nothwendig eine die kürzeste sein müsste, unter ihnen aber keine die kürzeste sein kann, so muss die umschlossene Linie selbst die kürzeste sein. Kann und darf nun aber der Vordersatz nicht zugegeben werden, so fällt damit auch die ganze Schlussfolgerung über den Haufen.

Täusche ich mich nicht, so liegt Legendre's Beweise etwa folgender Gedankengang zum Grunde. Zwischen zwei Punkten $A$ und $B$ ist die gerade Linie $AB$ der kürzeste Weg (Axiom). Ein beliebiger anderer Zug $APQB$, der dieselben beiden Punkte mit einander verbindet, ist länger. Indem man irgend zwei Punkte desselben durch eine gerade Linie (Sehne) mit einander verbindet und diese statt des abgeschnittenen Stücks eintreten lässt, wird der Zug verkürzt. Man kann ihn auf diesem Wege der letzten Grenze aller Verkürzung (der geraden Linie $AB$) immer näher und näher bringen. Liegt nun zwischen jenem Zuge $APQB$ und der geraden Linie $AB$ ein anderer (ausgebogener, convexer) Zug $AMB$, so muss der umschliessende Zug bei stetiger Annäherung an die letzte Grenze aller Verkürzung diese Zwischengrenze $AMB$ nothwendig einmal erreichen und überschreiten. Der umschliessende Zug $APQB$ lässt sich aber fort und fort verkürzen, ohne darum aufzuhören, die Linie $AMB$ zu umschliessen: es giebt unter den umschliessenden keinen kürzesten Zug. Folglich muss die Linie $AMB$ selbst diese kürzeste Grenze sein, welche so lange nicht erreicht und überschritten wird, als der Zug noch ausserhalb oder jenseits derselben bleibt. — Wäre in der That Legendre's Beweis etwa so ausgedrückt, so träte das Unhaltbare in demselben deutlicher zu Tage. Denn wer sieht nicht, dass die ganze Schlussfolge auf der Annahme beruhen würde, die Linie $AMB$ liege auch der Länge nach zwischen der umschliessenden $APQB$ und der geraden Linie $AB$, als letzter Grenze aller Verkürzung, und jene nähere sich dieser bei stetiger Verkürzung immer nur von derselben Seite der Zwischengrenze $AMB$, von der Seite des Grösseren, — dass mithin stillschweigend schon vorausgesetzt wäre, der umschliessende Zug $APQB$ sei länger als der umschlossene $AMB$, gerade das, was erst bewiesen werden soll.

Vielleicht aber zeigt folgender Einwurf noch schlagender das Unhaltbare des Legendre'schen Beweises.

Allerdings setzt Legendre eine ausgebogene (convexe) Linie $AMB$ voraus, von welcher er beweisen will, dass sie kürzer sei als alle sie umschliessenden, und bestimmt zuvor ganz richtig den Begriff der Convexität. Aber man setze einmal in seinem Beweise statt des convexen Zuges $AMB$ jeden beliebigen

anderen, nur von $APQB$ umschlossenen, z. B. $AmB$, und der ganze Beweis lässt sich Wort für Wort auch auf diesen anwenden. Es ist noch ebensowohl zu behaupten: wenn die Linie $AmB$ nicht kürzer wäre, als alle, welche sie umgeben, so müsse es unter den letzteren nothwendig eine geben, die kürzer wäre als die übrigen und zugleich kürzer als $AmB$ oder höchstens ihr gleich; $ACDEB$ sei diese kürzeste, umschliessende Linie u. s. f.; weil nun $APQB$ noch kürzer sei, so sei die Voraussetzung nicht möglich, mithin seien alle umschliessenden Linien, wie $ACDEB$ und $APQB$, länger als die umschlossene $AmB$. Wer wird das zugestehen? — Ich wenigstens finde nicht, dass in Legendre's Beweise von der Voraussetzung, die umschlossene Linie $AMB$ müsse eine ausgebogene (convexe) sein, bei den weiteren Schlüssen irgend Notiz genommen, oder dass aus derselben irgend Etwas gefolgert sei, was die weiteren Schlüsse gerade nur auf solche convexe Züge beschränkte und die Anwendung derselben auf jeden beliebigen anderen umschlossenen Zug (wie $AmB$) verböte.

Meiner Meinung nach ist also der in Rede stehende Satz durch Legendre's Beweis nicht, und überhaupt noch nicht bewiesen, ja ich glaube, er lässt sich schwerlich im eigentlichen strengen Sinne beweisen, und begnüge mich, beim Unterrichte, — wenn ich auch das noch hinzufügen darf, — die Ueberzeugung von seiner Richtigkeit etwa auf folgende Art noch mehr zu begründen.

Man verbinde (Taf. I. Fig. 2.) zwei Punkte $A$ und $B$ durch einen convexen gebrochenen Zug, z. B. $ACDEB$, und ausserdem durch einen beliebigen anderen, welcher diesen umschliesst, z. B. $APQB$. Die Convexität eines Zuges ist dadurch bedingt, dass man sich beim Durchlaufen desselben von einem Ende bis zum anderen immer nur nach derselben Seite, niemals rückwärts, zu drehen hat. Wird nun jede Seite des erstgenannten Zuges über die Ecke hinaus, an welcher man sich beim Durchlaufen desselben in die Richtung der anstossenden Seite zu drehen hat, in ihrer eigenen Richtung bis zum Zusammentreffen mit dem umschliessenden Zuge fortgesetzt, also $AC$ bis $x$, $CD$ bis $y$, u. s. f.; so erhält man nach dem bekannten Axiome, dass die gerade Linie der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist,

$$\begin{aligned} AC + Cx &< APx, \\ CD + Dy &< Cx + xQy, \\ DE + Ez &< Dy + yz, \\ EB \quad &< Ez + zB, \end{aligned}$$

folglich $AC + CD + DE + EB + Cx + Dy + Ez < APx + xQy + yz + zB$
$+ Cx + Dy + Ez,$

und nach Aufhebung der gleichen Grössen auf beiden Seiten

$$ACDEB < APQB.$$

Dasselbe lässt sich augenscheinlich von jedem gebrochenen convexen Zuge, aus wie vielen einzelnen geraden Linien er auch zusammengesetzt sein mag, und einem beliebigen, ihn umschliessenden Zuge beweisen. Setzt man nun statt des umschlossenen gebrochenen einen gekrümmten convexen Zug, wie *AMB*, und denkt sich in denselben einen gebrochenen Zug eingeschrieben, so lässt sich die Länge des letzteren durch beständige Vermehrung seiner Seiten der Länge des gekrümmten Zuges in's Unendliche näher bringen, ohne dieselbe jedoch jemals erreichen oder überschreiten zu können. Und dann wird der Schluss erlaubt sein: was ohne Einschränkung von allen Werthen gilt, die sich einer gegebenen Grenze in's Unendliche nähern, das muss auch für diese Grenze selbst gelten. — Freilich macht dieser Schluss einen Sprung, im Uebertragen dessen, was von unstetigen Grössen gilt, auf stetige. Ein ähnlicher Sprung ist indessen bekanntlich bei vielen mathematischen Bestimmungen gar nicht zu vermeiden.

Schliesslich will ich noch bemerken, dass meiner Meinung nach die vorstehenden Einwürfe mit den entsprechenden Abänderungen auch gegen den Beweis zu erheben sind, welchen Legendre im VIII. Buche seiner Geometrie (Lehrsatz II., Seite 214. ff. der oben citirten Uebersetzung) von dem entsprechenden Satze aus der Flächenbestimmung aufstellt, dass nämlich „jede convexe Fläche kleiner ist als eine beliebige andere sie umschliessende Fläche von dem nämlichen Umfange.“ Denn Legendre's Beweisführung für diesen Satz ist im Wesentlichen dieselbe, wie für den hier besprochenen Satz.

---

# III.

## Allgemeiner, leicht elementar zu beweisender Satz von der Rectification und Quadratur der Curven. Elementare Rectification der Parabel.

Von
dem Herausgeber.

---

In einer an Franz Schooten, der bekanntlich Professor in Leyden war, gerichteten Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas. Dat. Salmurii, die 13 Januarii A°. 1659, welche in Renati Descartes Geometria. Francofurti ad Moenum 1695. p. 517. abgedruckt ist, hat van Heuraet *) einen allgemeinen Satz von den Curven bewiesen, den ich in mehreren Beziehungen für wichtig und merkwürdig halte. Im mathematischen Wörterbuche. Thl. IV. S. 233. thut Mollweide dieses im Allgemeinen wohl nur wenig bekannten Satzes allerdings Erwähnung, scheint mir aber dessen Bedeutung nicht eigentlich erkannt zu haben, wie ich schon daraus schliessen zu dürfen glaube, dass Mollweide den Satz mittelst der Differentialrechnung sehr kurz beweiset, indem mir vielmehr die Bedeutung dieses Satzes für manche Untersuchungen darin zu liegen scheint, dass er sich sehr leicht ganz elementar beweisen lässt. Ich werde nun den Satz zuerst aussprechen, und dann einen ganz elementaren Beweis für ihn geben, worauf ich vermittelst dieses Satzes die Parabel auf ganz elementarem

---

*) So ist der Name am so eben angegebenen Orte geschrieben. Mollweide im mathematischen Wörterbuche (s. nachher) schreibt Hevraet. Die erstere Schreibart haben auch Lacroix und Klügel (mathem. Wörterb. Thl. III. S. 725.) beibehalten. Freilich weiss man, dass in alten lateinischen Schriften u und v oft verwechselt werden.

Wege rectificiren werde, was aber jetzt nur dadurch möglich gemacht ist, weil ich in einem früheren Aufsatze (Thl. XXV. Nr. V.) eine ganz elementare Quadratur der Hyperbel gegeben habe, die früher bekanntlich nur mit Hülfe der Integralrechnung möglich war. Diese von mir gefundene elementare Quadratur der Hyperbel, mit Einschluss der ganz elementaren Theorie der Logarithmen, und die nun von mir gefundene, gleichfalls ganz elementare Rectification der Parabel werden, so hoffe ich, wesentlich zur Förderung des Vortrags der Lehre von den Kegelschnitten und des Unterrichts in diesem so ungemein wichtigen und interessanten Theile der Mathematik beitragen. Deshalb, und zugleich noch aus anderen Gründen, glaube ich auch, dass der Satz von van Heuraet in die Elemente der Mathematik aufgenommen werden muss, indem er mir überhaupt mancher wichtigen und interessanten Anwendungen fähig zu sein scheint, wie ich am Schluss dieses, wenn auch durchaus eigentlich nur der elementaren Rectification der Parabel mit Hülfe der von mir früher gefundenen elementaren Quadratur der Hyperbel gewidmeten Aufsatzes, noch an einem, schon von van Heuraet selbst gebrauchten Beispiele zeigen werde, zugleich aber die Leser des Archivs auffordere, ihre Aufmerksamkeit der weiteren Anwendung dieses Satzes zu widmen.

### Satz von van Heuraet.

In Taf. I. Fig. 3 seien $A'F'$ und $A_1F_1$ zwei ganz beliebige Curven, und $AF$ sei eine beliebige gerade Linie, auf welcher $AA_1$ und $FF_1$ senkrecht stehen. Wenn dann $\lambda$ eine beliebige gerade Linie von bestimmter Länge bezeichnet, und für **jeden** Punkt $P'$ der Curve $A'F'$, in welchem die bis zur Linie $AF$ verlängerte Normale der Curve die Linie $P'N$ ist, die Proportion

$$PP':P'N=\lambda:PP_1$$

oder die Gleichung

$$PP'.PP_1=\lambda.P'N,$$

wo $PP_1$ auf $AF$ senkrecht steht, Statt findet, so ist die Fläche $AA_1FF_1$ gleich dem Rechtecke unter der Linie $\lambda$ und einer der Curve $A'F'$ gleichen geraden Linie, oder es ist:

$$AA_1FF_1=\lambda.A'F'.$$

Beweis.

I. In Taf. I. Fig. 4. stehe auch $QQ_1$ auf $AF$ senkrecht. Denkt man sich nun durch den Punkt $P'$ die Berührende $P'p'$ an die Curve $A'F'$ gezogen und bis zur Linie $QQ_1$ verlängert, so sind, wenn man noch durch $P'$ und $P_1$ mit $AF$ die Parallelen $P'q'$ und $P_1q_1$ zieht, die Dreiecke $PP'N$ und $P'p'q'$ offenbar einander ähnlich, also

$$PP' : P'N = P'q' : P'p' = PQ : P'p',$$

folglich

$$PP' . P'p' = PQ . P'N.$$

Nach der Voraussetzung ist aber

$$PP' . PP_1 = \lambda . P'N,$$

also, wenn man in diese Gleichung mit der vorhergehenden dividirt:

$$\frac{PP_1}{P'p'} = \frac{\lambda}{PQ},$$

folglich

$$PP_1 . PQ = \lambda . P'p',$$

oder

$$PP_1Qq_1 = \lambda . P'p'.$$

II. In Taf. I. Fig. 5. theile man nun die Linie $AF$ in eine beliebige Anzahl gleicher Theile $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EF$, und errichte durch alle Theilpunkte Perpendikel auf $AF$, welche die beiden Curven in den Punkten $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$ und $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $E_1$, $F_1$ schneiden. Durch die Punkte $A'$, $B'$, $C'$, $D'$, $E'$, $F'$ denke man sich an die Curve, in der diese Punkte liegen, Berührende gelegt, und verlängere diese Berührenden, bis sie sich in den Punkten $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, $e'$ schneiden, durch welche Durchschnittspunkte man dann lauter auf $AF$ senkrecht stehende Linien legt, wie die Figur zeigt. Endlich lege man durch $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$, $E_1$, $F_1$ Parallelen mit $AF$, welche jene Senkrechten in den Punkten $\alpha_1$, $\beta_1$, $b_1$, $\gamma_1$, $c_1$, $\delta_1$, $d_1$, $\varepsilon_1$, $e_1$, $\zeta_1$ schneiden. Dann hat man nach I. die folgenden Gleichungen:

$$AA_1a\alpha_1 = \lambda . A'a',$$

$$BB_1a\beta_1 = \lambda . B'a',$$

$$BB_1bb_1 = \lambda . B'b',$$

$$CC_1 b\gamma_1 = \lambda . C'b',$$
$$CC_1 cc_1 = \lambda . C'c',$$
$$DD_1 c\delta_1 = \lambda . D'c',$$
$$DD_1 dd_1 = \lambda . D'd',$$
$$EE_1 d\varepsilon_1 = \lambda . E'd',$$
$$EE_1 ee_1 = \lambda . E'e',$$
$$FF_1 e\zeta_1 = \lambda . F'e';$$

also, wenn man auf beiden Seiten dieser Gleichungen addirt:

$$AA_1 aa_1 + a\beta_1 bb_1 + b\gamma_1 cc_1 + c\delta_1 dd_1 + d\varepsilon_1 ee_1 + FF_1 e\zeta_1$$
$$= \lambda . (A'a' + a'b' + b'c' + c'd' + d'e' + e'F').$$

Lässt man nun die Anzahl der gleichen Theile, in welche man die Linie $AF$ getheilt hat, in's Unendliche wachsen, so nähert sich die Summe

$$AA_1 aa_1 + a\beta_1 bb_1 + b\gamma_1 cc_1 + c\delta_1 dd_1 + d\varepsilon_1 ee_1 + FF_1 e\zeta_1$$

dem Curvenstück $AA_1FF_1$ als Gränze, und die Summe

$$A'a' + a'b' + b'c' + c'd' + d'e' + e'F'$$

nähert sich dem Curvenbogen $A'F'$ als Gränze; also ist, wenn man in der obigen Gleichung auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zu den Gränzen übergeht:

$$AA_1FF_1 = \lambda . A'F',$$

wie bewiesen werden sollte.

## Elementare Rectification der apollonischen Parabel.

Wir wollen jetzt annehmen, dass die vorher betrachtete Linie $A'F'$, d. h. in Taf. I. Fig 6. die Linie $AF'$, eine gewöhnliche oder apollonische Parabel mit dem Scheitel $A$ und der Axe $AB$ sei, und dass die Linie $AF$ in $A$ auf der Axe $AB$ senkrecht stehe. Ist dann $P'$ ein beliebiger Punkt dieser Parabel und $P_1$ der diesem Punkte der Parabel entsprechende Punkt der Linie $A_1F_1$, so findet nach dem Vorhergehenden die Gleichung

$$PP'.PP_1 = \lambda . P'N$$

Statt, woraus

$$PP_1 = AQ_1 = \lambda . \frac{P'N}{PP'}$$

folgt. Nun ist aber

$$\frac{P'N}{PP'} = \frac{P'S}{SQ'}, \quad \left(\frac{P'N}{PP'}\right)^2 = \frac{P'S^2}{SQ'^2};$$

also

$$\left(\frac{P'N}{PP'}\right)^2 = \frac{SQ'^2 + P'Q'^2}{SQ'^2} = \frac{SQ'^2 + P_1Q_1^2}{SQ'^2};$$

und weil $P'N$ oder $P'S$ die Normale der Parabel $AF'$ in dem Punkte $P'$, also $SQ'$ die diesem Punkte entsprechende Subnormale ist, so ist, wenn wir den Parameter der Parabel $AF'$ durch $p$ bezeichnen, nach einem bekannten Elementar-Satze von der Parabel $SQ' = \frac{1}{2}p$, folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\left(\frac{P'N}{PP'}\right)^2 = \frac{\frac{1}{4}p^2 + P_1Q_1^2}{\frac{1}{4}p^2} = 1 + \left(\frac{P_1Q_1}{\frac{1}{2}p}\right)^2.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\frac{P'N}{PP'} = \frac{AQ_1}{\lambda}, \quad \left(\frac{P'N}{PP'}\right)^2 = \left(\frac{AQ_1}{\lambda}\right)^2;$$

also

$$\left(\frac{AQ_1}{\lambda}\right)^2 = 1 + \left(\frac{P_1Q_1}{\frac{1}{2}p}\right)^2 \text{ oder } \left(\frac{AQ_1}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{P_1Q_1}{\frac{1}{2}p}\right)^2 = 1.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die Curve $A_1F_1$ eine Hyperbel mit dem Mittelpunkte $A$ und der Axe $AB$ ist; die beiden Halbaxen dieser Hyperbel sind $\lambda$ und $\frac{1}{2}p$; und da nun nach dem Satze von van Heuraet

$$AA_1PP_1 = \lambda . AP', \text{ also } AP' = \frac{AA_1PP_1}{\lambda}$$

ist, so wird man den parabolischen Bogen $AP'$ bestimmen, folglich die Parabel rectificiren können, wenn man den Flächeninhalt des hyperbolischen Stücks $AA_1PP_1$ zu ermitteln im Stande ist.

Nun habe ich in dem Aufsatze Thl. XXV. Nr. V. S. 97. auf ganz elementarem Wege gezeigt, dass

$$A_1P_1Q_1 = \frac{1}{2}.AQ_1 . P_1Q_1 - \frac{1}{4}\lambda p \operatorname{lognat}\left(\frac{AQ_1}{\lambda} + \frac{P_1Q_1}{\frac{1}{2}p}\right)$$

ist; also ist

$$AA_1PP_1 = APP_1Q_1 - A_1P_1Q_1 = AQ_1.P_1Q_1 - A_1P_1Q_1$$

$$= \tfrac{1}{2}.AQ_1.P_1Q_1 + \tfrac{1}{4}\lambda p \operatorname{lognat}\left(\frac{AQ_1}{\lambda} + \frac{P_1Q_1}{\frac{1}{2}p}\right).$$

Nach dem Obigen ist aber

$$AQ_1 = \lambda\sqrt{1+\left(\frac{P_1Q_1}{\frac{1}{2}p}\right)^2} = \lambda\sqrt{1+\left(\frac{P'Q'}{\frac{1}{2}p}\right)^2},$$

also, wenn man

$$AQ' = x,\quad P'Q' = P_1Q_1 = y$$

setzt:

$$AA_1PP_1 = \lambda\left\{\tfrac{1}{2}y\sqrt{1+\left(\frac{y}{\frac{1}{2}p}\right)^2} + \tfrac{1}{4}p \operatorname{lognat}\left(\frac{y}{\frac{1}{2}p} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{\frac{1}{2}p}\right)^2}\right)\right\}$$

oder

$$AA_1PP_1 = \lambda\left\{\frac{y\sqrt{p^2+4y^2}}{2p} + \tfrac{1}{4}p \operatorname{lognat}\frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{p}\right\},$$

folglich nach dem Obigen:

$$AP' = \frac{y\sqrt{p^2+4y^2}}{2p} + \tfrac{1}{4}p \operatorname{lognat}\frac{2y+\sqrt{p^2+4y^2}}{p},$$

wodurch also die Parabel im Allgemeinen, und auf ganz elementarem Wege, rectificirt ist.

Setzt man $p = 4a$, $y^2 = 4ax$, so erhält man leicht:

$$AP' = \sqrt{x(a+x)} + a \operatorname{lognat}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{a+x}}{\sqrt{a}},$$

und bezeichnet man den dem Punkte $P'$ entsprechenden Vector durch $v$, so ist bekannt $v = \tfrac{1}{4}p + x = a + x$, also

$$AP' = \sqrt{xv} + a \operatorname{lognat}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{v}}{\sqrt{a}},$$

welches der einfachste Ausdruck für den parabolischen Bogen $AP'$ sein dürfte.

## Rectification der Neil'schen Parabel.

Ich will nun noch zeigen, wie sich mittelst des Satzes von van Heuraet die Neil'sche Parabel rectificiren lässt, werde

aber dabei der Kürze wegen den Ausdruck der Subnormale für jetzt mittelst der bekannten Formeln der Differentialrechnung suchen, jedoch am Ende dieses Aufsatzes noch zeigen, wie man zu diesem Ausdrucke auch durch ganz elementare Betrachtungen gelangen kann.

In Taf. I. Fig. 7. sei die Curve $AF'$ eine Neil'sche oder cubische Parabel, so dass, wenn man $AP=x$, $PP'=y$ setzt,

$$y^2=\frac{x^3}{a}$$

ist. Die Subnormale dieser Curve in dem Punkte $P'$ ist

$$PN=\frac{y\partial y}{\partial x}=\frac{3x^2}{2a}.$$

Ist nun ferner $P_1$ der dem Punkte $P'$ in der Curve $AF'$ entsprechende Punkt der Curve $A_1F_1$, so ist bekanntlich

$$PP'.PP_1=\lambda.P'N \text{ oder } PP_1=\lambda.\frac{P'N}{PP'},$$

und folglich

$$PP_1{}^2=\lambda^2.\frac{P'N^2}{PP'^2}=\lambda^2.\frac{PP'^2+PN^2}{PP'^2}=\lambda^2\left\{1+\left(\frac{PN}{PP'}\right)^2\right\}.$$

Nach dem Obigen ist nun

$$\left(\frac{PN}{PP'}\right)^2=\frac{9x^4}{4a^2}\cdot\frac{1}{y^2}=\frac{9x^4}{4a^2}\cdot\frac{a}{x^3}=\frac{9}{4}\cdot\frac{x}{a},$$

also

$$PP_1{}^2=\lambda^2(1+\frac{9}{4}\cdot\frac{x}{a})=\frac{9\lambda^2}{4a}(x+\frac{4}{9}a),$$

und folglich, wenn man die willkührliche Linie $\lambda=\frac{1}{3}a$ setzt:

$$PP_1{}^2=\tfrac{1}{4}a(x+\frac{4}{9}a)=\frac{1}{4}a(\frac{4}{9}a+AP).$$

Hieraus sieht man, dass die Curve $A_1F_1$ eine gewöhnliche oder apollonische Parabel ist, deren Parameter $\frac{1}{4}a$; deren Scheitel, wenn $AS=\frac{4}{9}a$ ist, der Punkt $S$; und deren Axe die Linie $SF$ ist.

Nach dem Satze von van Heuraet ist

$$AP'=\frac{AA_1PP_1}{\lambda}=\frac{3.AA_1PP_1}{a},$$

und nach der Quadratur der apollonischen Parabel, die sich bekanntlich sehr leicht auf elementarem Wege ausführen lässt, ist

$$AA_1PP_1 = \frac{2}{3}(SP.PP_1 - SA.AA_1).$$

Nach dem Obigen ist aber

$$SP = \frac{4}{9}a + x = \frac{4}{9}a(1 + \frac{9x}{4a}),$$

$$PP_1 = \frac{1}{2}\sqrt{a\left(\frac{4}{9}a + x\right)} = \frac{1}{3}a\sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}$$

und

$$SA = \frac{4}{9}a, \quad AA_1 = \sqrt{\frac{1}{9}a^2} = \frac{1}{3}a;$$

also

$$SP.PP_1 = \frac{4}{27}a^2\sqrt{(1 + \frac{9x}{4a})^3}, \quad SA.AA_1 = \frac{4}{27}a^2;$$

folglich nach dem Obigen:

$$AA_1PP_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{27}a^2\left\{\sqrt{(1+\frac{9x}{4a})^3} - 1\right\},$$

also:

$$AP' = \frac{8}{27}a\left\{\sqrt{(1 + \frac{9x}{4a})^3} - 1\right\},$$

wodurch die Neil'sche Parabel rectificirt ist.

Will man den Ausdruck für die Subnormale der Neil'schen Parabel auf elementarem Wege entwickeln, so kann man auf folgende Art verfahren. Man lasse sich $x$ um $\Delta x$ verändern, und nehme an, dass dann $y$ sich um $\Delta y$ verändere; dann ist, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ die veränderlichen oder laufenden Coordinaten bezeichnen,

$$\mathfrak{y} - y = \frac{(y + \Delta y) - y}{(x + \Delta x) - x}(\mathfrak{x} - x)$$

oder

$$\mathfrak{y} - y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(\mathfrak{x} - x)$$

die Gleichung der durch die, durch die Coordinaten $x$, $y$ und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ bestimmten Punkte gehenden Geraden. Also ist

$$\mathfrak{y}-y=\text{Lim}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}.(\mathfrak{x}-x),$$

unter der Voraussetzung, dass $\Delta x$ sich der Null nähert, die Gleichung der Berührenden der Neil'schen Parabel im Punkte $(xy)$ Es ist aber

$$y^2=\frac{x^3}{a},\quad (y+\Delta y)^2=\frac{(x+\Delta x)^3}{a};$$

also

$$y^2+2y\Delta y+\Delta y^2=\frac{x^3}{a}+\frac{3x^2\Delta x}{a}+\frac{3x\Delta x^2}{a}+\frac{\Delta x^3}{a},$$

und folglich, wenn man $y^2=\frac{x^3}{a}$ auf beiden Seiten aufhebt, und dann auf beiden Seiten durch $2y\Delta x$ dividirt:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{1}{2y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\Delta y=\frac{3x^2}{2ay}+\frac{3x}{2ay}\Delta x+\frac{\Delta x^2}{2ay},$$

also, wenn man $\Delta x$ sich der Null nähern lässt, und zu den Gränzen übergeht:

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2}{2ay}.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{y}-y=\frac{3x^2}{2ay}(\mathfrak{x}-x)$$

die Gleichung der Berührenden im Punkte $(xy)$. Offenbar ist

$$\text{Subtang}\times\frac{3x^2}{2ay}=y,$$

also

$$\text{Subtang}=\frac{2ay^2}{3x^2}.$$

Ferner ist offenbar

$$\text{Subtang}:y=y:\text{Subnorm},$$

also

$$\frac{2ay^2}{3x^2}:y=y:\text{Subnorm},$$

folglich

$$\text{Subnorm}=\frac{3x^2}{2a},$$

ganz eben so, wie oben mittelst der Differentialrechnung gefunden worden ist.

Auf diese Weise kann also auch die Neil'sche Parabel auf ganz elementarem Wege rectificirt betrachtet werden, was jedoch jetzt weniger als die Rectification der gewöhnlichen Parabel auf elementarem Wege mit Hülfe der von mir gefundenen elementaren Quadratur der Hyperbel mein Zweck war.

---

# IV.

## Integration der Differentialgleichung

## $xy^{(n)}-y=0$.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Privatdocenten der Mathematik am k. k. polytechnischen Institute zu Wien.

---

Die Gleichung $xy'-y=0$ lässt sich sehr leicht integriren; es ist nämlich $y=Cx$, wie man sich augenblicklich überzeugen kann. Schwieriger ist schon die Gleichung

$$(1) \qquad xy''-y=0$$

zu integriren. Schlägt man den gewöhnlichen Weg ein, um das Integral in Reihenform zu erhalten, so findet man für $y$ folgenden Werth:

$$y=C\left(x+\frac{x^2}{1!\,2!}+\frac{x^3}{2!\,3!}+\frac{x^4}{3!\,4!}+\dots\right),$$

unter $C$ eine willkührliche Constante verstanden. Diese Reihe ist für jeden Werth von $x$ convergent und genügt auch der Differentialgleichung (1), denn man hat:

$$y'' = C\left(1 + \frac{x}{1!\,2!} + \frac{x^2}{2!\,3!} + \frac{x^3}{3!\,4!} + \ldots\right),$$

und folglich $xy'' = y$; aber sie enthält bloss eine willkührliche Constante, ist somit nicht das vollständige Integral der Gleichung (1), sondern bloss ein particuläres Integral.

Euler verfährt nun auf folgende Weise, um das vollständige Integral zu finden, er setzt:

$$y = p + q \log x,$$

dadurch geht die Gleichung (1) über in:

$$\left(xp'' - p + 2q' - \frac{q}{x}\right) + (xq'' - q) \log x = 0.$$

Nun nimmt er

$$q = B\left(x + \frac{x^2}{1!\,2!} + \frac{x^3}{2!\,3!} + \frac{x^4}{3!\,4!} + \ldots\right)$$

an, dadurch verwandelt sich obige Gleichung in:

$$xp'' - p + 2q' - \frac{q}{x} = 0$$

und liefert für $p$ folgenden Ausdruck:

$$p = A\left(x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \ldots\right) + B\left(1 - \frac{3x^2}{1!2!2!} - \frac{14x^3}{2!3!3!} - \frac{70x^4}{3!4!4!} - \frac{404x^5}{4!5!5!} - \ldots\right).$$

Man hat daher für das vollständige Integral der vorgelegten Differentialgleichung:

$$\begin{aligned} y = {} & A\left(x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \ldots\right) \\ & + B\Big\{\left(x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \ldots\right) \log x \\ & \qquad + 1 - \left(\frac{3x^2}{1!2!2!} + \frac{14x^3}{2!3!3!} + \frac{70x^4}{3!4!4!} + \frac{404x^5}{4!5!5!} + \ldots\right)\Big\}, \end{aligned}$$

wo die in der letzten Reihe vorkommenden Zahlen 3, 14, 70, 404, .... auf folgende Weise zusammenhängen:

$$14 = 3 . \; 3 + 5 . 1!$$
$$70 = 4 . \; 14 + 7 . 2!$$
$$404 = 5 . \; 70 + 9 . 3!$$
$$2688 = 6 . 404 + 11 . 4!$$

. . . . . . .

Ich will nun das von Euler so gefundene Integral anders darstellen und schreibe es vorerst so auf:

$$(2) \quad y = A\left(x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \dots\right)$$
$$+ B\left[1 + \left(x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \dots\right)\log x\right]$$
$$- B\left\{\frac{x^2}{1!2!}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{2!3!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right]\right.$$
$$+ \frac{x^4}{3!4!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]$$
$$\left. + \frac{x^3}{4!5!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\right] + \dots\right\} .$$

Die mit $A$ multiplicirte Reihe genügt der Gleichung (1), wie wir bereits gesehen haben; versuchen wir nun, ob auch der mit $B$ multiplicirte Ausdruck genügt. Setzen wir denselben $= y_1$, so ist:

$$y_1 = 1 + \left(x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \dots\right)\log x$$
$$- \left\{\frac{x^2}{1!2!}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^3}{2!3!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\right] + \frac{x^4}{3!4!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{x^5}{4!5!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\right] + \dots\right\} ,$$

ferner

$$y_1' = 1 + \left(1 + x + \frac{x^2}{2!2!} + \frac{x^3}{3!3!} + \frac{x^4}{4!4!} + \dots\right)\log x$$
$$- \left\{x + \frac{x^2}{2!2!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] + \frac{x^3}{3!3!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}\right]\right.$$
$$\left. + \frac{x^4}{4!4!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\right] + \dots\right\}$$

und

$$y_1''=\frac{1}{x}+\left(1+\frac{x}{1!2!}+\frac{x^2}{2!3!}+\frac{x^3}{3!4!}+\frac{x^4}{4!5!}+\ldots\right)\log x$$

$$-\left\{\frac{x}{1!2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)+\frac{x^2}{2!3!}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{x^3}{3!4!}\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]+\ldots\right\};$$

folglich ist wirklich $xy_1''=y_1$; es ist daher der mit zwei willkührlichen Constanten $A$ und $B$ versehene Ausdruck (2) das vollständige Integral der Gleichung (1). Benützen wir nun die beiden Formeln:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{u^n-1}{u-1}du,$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}=\int_0^1\frac{u^{n-1}-u}{u-1}du;$$

so hat man durch Addition derselben:

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-2}+\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{(u+1)(u^{n-1}-1)}{u-1}du.$$

Es lässt sich demnach der mit $-B$ multiplicirte Ausdruck der Gleichung (2) auch so schreiben:

$$\frac{x^2}{1!2!}\int_0^1\frac{(u+1)(u-1)}{u-1}du+\frac{x^3}{2!3!}\int_0^1\frac{(u+1)(u^2-1)}{u-1}du$$

$$+\frac{x^4}{3!4!}\int_0^1\frac{(u+1)(u^3-1)}{u-1}du+\ldots;$$

und bringt man nun Alles unter ein Integralzeichen, so hat man:

$$\int_0^1\frac{u+1}{u-1}\left\{\frac{x^2(u-1)}{1!2!}+\frac{x^3(u^2-1)}{2!3!}+\frac{x^4(u^3-1)}{3!4!}+\ldots\right\}du.$$

Es ist somit das Integral unserer Differentialgleichung:

$$(3)\quad y=A\left(x+\frac{x^2}{1!2!}+\frac{x^3}{2!3!}+\frac{x^4}{3!4!}+\ldots\right)$$

$$+B\left\{1+\left(x+\frac{x^2}{1!2!}+\frac{x^3}{2!3!}+\frac{x^4}{3!4!}+\ldots\right)\log x\right.$$

$$\left.-\int_0^1\frac{u+1}{u-1}\left[\frac{x^2(u-1)}{1!2!}+\frac{x^3(u^2-1)}{2!3!}+\frac{x^4(u^3-1)}{3!4!}+\ldots\right]du\right\}.$$

Nennt man der Kürze halber:

$$x+\frac{x^2}{1!2!}+\frac{x^3}{2!3!}+\frac{x^4}{3!4!}+\ldots=\varphi_2(x),$$

so ist:

$$x+\frac{x^2u}{1!2!}+\frac{x^3u^2}{2!3!}+\frac{x^4u^3}{3!4!}+\ldots=\frac{1}{u}\varphi_2(ux),$$

und folglich:

$$\frac{x^2(u-1)}{1!2!}+\frac{x^3(u^2-1)}{2!3!}+\frac{x^4(u^3-1)}{3!4!}+\ldots=\frac{\varphi_2(ux)-u\varphi_2(x)}{u},$$

wodurch die Gleichung (3) sich so schreiben lässt:

$$y=A\varphi_2(x)+B\left\{1+\varphi_2(x)\log x-\int_0^1\frac{u+1}{u-1}\cdot\frac{\varphi_2(ux)-u\varphi_2(x)}{u}du\right\},$$

was das gesuchte Integral in sehr einfacher Form ist.

Wenden wir für die Gleichung

$$xy'''-y=0$$

dasselbe Verfahren an, so findet man:

$$y=A\left(x+\frac{1}{1}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{1.3}\cdot\frac{x^5}{5!}+\frac{1}{1.3.5}\,\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{1.3.5.7}\,\frac{x^9}{9!}+\ldots\right)$$

$$+B\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2.4}\,\frac{x^6}{6!}+\frac{1}{2.4.6}\,\frac{x^8}{8!}+\ldots\right)$$

$$+C\left\{1+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2.4}\,\frac{x^6}{6!}+\frac{1}{2.4.6}\,\frac{x^8}{8!}+\ldots\right)\log x\right.$$

$$-\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{2.4}\,\frac{x^6}{6!}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)\right)\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2.4.6}\,\frac{x^8}{8!}\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\right)+\ldots\right]\right\}.$$

Nun ist:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2n+2}\right)=\int_0^1 \frac{u^{2n+1}-u}{u^2-1}\,du$$

$$+\int_0^1 \frac{u^{2n+2}-u^2}{u^2-1}\,du+\int_0^1 \frac{u^{2n+3}-u^3}{u^2-1}\,du$$

$$=\int_0^1 \frac{(u^3+u^2+u)(u^{2n}-1)}{u^2-1}\,du,$$

folglich ist die letzte in $y$ vorkommende unendliche Reihe gleich

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}\int_0^1 \frac{(u^3+u^2+u)(u^2-1)}{u^2-1}\,du+\frac{1}{2.4}\,\frac{x^6}{6!}\int_0^1 \frac{(u^3+u^2+u)(u^4-1)}{u^2-1}\,du$$

$$+\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{x^8}{8!}\int_0^1 \frac{(u^3+u^2+u)(u^6-1)}{u^2-1}\,du+\ldots,$$

und bringt man Alles unter ein Integralzeichen, so erhält man hiefür:

$$\int_0^1 \frac{u^3+u^2+u}{u^2-1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4(u^2-1)}{4!}+\frac{1}{2.4}\,\frac{x^6(u^4-1)}{6!}+\frac{1}{2.4.6}\,\frac{x^8(u^6-1)}{8!}+\ldots\right\}du.$$

Es ist somit:

$$y=A\left(x+\frac{1}{1}\cdot\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{1.3}\,\frac{x^5}{5!}+\frac{1}{1.3.5}\,\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{1.3.5.7}\,\frac{x^9}{9!}+\ldots\right)$$

$$+B\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2.4}\,\frac{x^6}{6!}+\frac{1}{2.4.6}\,\frac{x^8}{8!}+\ldots\right)$$

$$+C\left\{1+\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^6}{6!}+\frac{1}{2.4.6}\cdot\frac{x^8}{8!}+\ldots\right)\log x\right.$$

$$-\int_0^1 \frac{u^3+u^2+u}{u^2-1}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4(u^2-1)}{4!}+\frac{1}{2.4}\cdot\frac{x^6(u^4-1)}{6!}\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2.4.6}\,\frac{x^8(u^6-1)}{8!}+\ldots\right]du\right\}.$$

Wendet man die Formel

$$\frac{1}{1.3.5.7....(2m+1)}=\frac{1}{2^m.m!}\int_0^1(1-u^2)^m du$$

an und setzt der Kürze halber:

$$\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{2.1!4!}+\frac{x^6}{2^2.2!6!}+\frac{x^8}{2^3.3!8!}+....=\varphi_3(x),$$

so kann man $y$ auch so schreiben:

$$y=A\left\{x+\int_0^1\left[\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5(1-u^2)}{2.1!5!}+\frac{x^7(1-u^2)^2}{2^2.2!7!}+\frac{x^9(1-u^2)^3}{2^3.3!9!}+...\right]du\right\}$$

$$+B\varphi_3(x)+C\left\{1+\varphi_3(x)\log x-\int_0^1\frac{u^2+u+1}{u^2-1}\cdot\frac{\varphi_3(ux)-u^2\varphi_3(x)}{u}du\right\},$$

und diess ist das gesuchte Integral.

Für die Gleichung $xy^{(n)}-y=0$ hat man:

$$y=A\left(x+\frac{x^4}{4!}+\frac{1}{4}\cdot\frac{x^7}{7!}+\frac{1}{4.7}\cdot\frac{x^{10}}{10!}+\frac{1}{4.7.10}\cdot\frac{x^{13}}{13!}+....\right)$$

$$+B\left(\frac{x^2}{2!}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5!}+\frac{1}{2.5}\cdot\frac{x^8}{8!}+\frac{1}{2.5.8}\cdot\frac{x^{11}}{11!}+\frac{1}{2.5.8.11}\cdot\frac{x^{14}}{14!}+....\right)$$

$$+C\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{6!}+\frac{1}{3.6}\cdot\frac{x^9}{9!}+\frac{1}{3.6.9}\cdot\frac{x^{12}}{12!}+\frac{1}{3.6.9.12}\cdot\frac{x^{15}}{15!}+....\right)$$

$$+D\left\{1+\left(\frac{x^3}{3!}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{6!}+\frac{1}{3.6}\cdot\frac{x^9}{9!}+\frac{1}{3.6.9}\cdot\frac{x^{12}}{12!}+\frac{1}{3.6.9.12}\cdot\frac{x^{15}}{15!}+....\right)\log x\right.$$

$$-\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{6!}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\frac{1}{3.6}\cdot\frac{x^9}{9!}\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)\right)\right.$$

$$+\frac{1}{3.6.9}\cdot\frac{x^{12}}{12!}\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}\right)\right)+....\right]\right\}.$$

Macht man nun von folgenden Formeln Gebrauch:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)+\dots+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{3n}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\dots+\frac{1}{3n+1}\right)$$

$$+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\frac{1}{11}+\dots+\frac{1}{3n+2}\right)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\dots+\frac{1}{3n+3}\right)$$

$$=\int_0^1\frac{u^{3n+2}-u^2}{u^3-1}du+\int_0^1\frac{u^{3n+3}-u^3}{u^3-1}du+\int_0^1\frac{u^{3n+4}-u^4}{u^3-1}du$$

$$+\int_0^1\frac{u^{3n+5}-u^5}{u^3-1}du=\int_0^1\frac{(u^5+u^4+u^3+u^2)(u^{3n}-1)}{u^3-1}du$$

$$\frac{1}{4.7.10\dots(3m+1)}=\frac{1}{3^m.m!}\int_0^1(1-u^3)^m du,$$

$$\frac{1}{2.5.8\dots(3m+2)}=\frac{1}{3^m.m!}\int_0^1 u(1-u^3)^m du,$$

und setzt der Kürze halber:

$$\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{3.1!6!}+\frac{x^9}{3^2.2!9!}+\frac{x^{12}}{3^3.3!12!}+\frac{x^{15}}{3^4.4!15!}+\dots=\varphi_4(x);$$

so lässt sich das Integral der Gleichung $xy^{(n)}-y=0$ auch so schreiben:

$$y=A\left\{x+\int_0^1\left[\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7(1-u^3)}{3.1!7!}+\frac{x^{10}(1-u^3)^2}{3^2.2!10!}+\frac{x^{13}(1-u^3)^3}{3^3.3!13!}+\dots\right]du\right\}$$

$$+B\left\{\frac{x^2}{2!}+\int_0^1 u\left[\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8(1-u^3)}{3.1!8!}+\frac{x^{11}(1-u^3)^2}{3^2.2!11!}+\frac{x^{14}(1-u^3)^3}{3^3.3!14!}+\dots\right]du\right\}$$

$$+C\varphi_4(x)$$

$$+D\left\{1+\varphi_4(x)\log x-\int_0^1\frac{u^3+u^2+u+1}{u^3-1}\cdot\frac{\varphi_4(ux)-u^3\varphi_4(x)}{u}du\right\}.$$

Endlich hat man für das Integral der Gleichung $xy^{(n)}-y=0$ folgenden Ausdruck:

$$(4)\quad y=C_1\Big\{x+\int_0^1\Big[\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{2n-1}(1-u^{n-1})}{(n-1)1!(2n-1)!}+\frac{x^{3n-2}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(3n-2)!}$$

$$+\frac{x^{4n-3}(1-u^{n-1})^3}{(n-1)^3.3!(4n-3)!}+\ldots\Big]du\Big\}$$

$$+C_2\Big\{\frac{x^2}{2!}+\int_0^1 u\Big[\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{2n}(1-u^{n-1})}{(n-1)1!(2n)!}$$

$$+\frac{x^{3n-1}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(3n-1)!}+\frac{x^{4n-2}(1-u^{n-1})^3}{(n-1)^3.3!(4n-2)!}+\ldots\Big]du\Big\}$$

$$+C_3\Big\{\frac{x^3}{3!}+\int_0^1 u^2\Big[\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{2n+1}(1-u^{n-1})}{(n-1)1!(2n+1)!}+\frac{x^{3n}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(3n)!}$$

$$+\frac{x^{4n-1}(1-u^{n-1})^3}{(n-1)^3.3!(4n-1)!}+\ldots\Big]du\Big\}$$

$$+\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+C_{n-2}\Big\{\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\int_0^1 u^{n-3}\Big[\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}+\frac{x^{3n-4}(1-u^{n-1})}{(n-1).1!(3n-4)!}$$

$$+\frac{x^{4n-5}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(4n-5)!}+\frac{x^{5n-6}(1-u^{n-1})^3}{(n-1)^3.3!(5n-6)!}+\ldots\Big]du\Big\}$$

$$+C_{n-1}\varphi_n(x)$$

$$+C_n\Big\{1+\varphi_n(x)\log x-\int_0^1\frac{u^{n-1}+u^{n-2}+..+u^2+u+1}{u^{n-1}-1}\cdot\frac{\varphi_n(ux)-u^{n-1}\varphi_n(x)}{u}du\Big\},$$

unter $\varphi_n(x)$ folgende unendliche Reihe verstanden:

$$\varphi_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^{2n-2}}{(n-1)1!(2n-2)!}+\frac{x^{3n-3}}{(n-1)^2.2!(3n-3)!}$$

$$+\frac{x^{4n-4}}{(n-1)^3.3!(4n-4)!}+\ldots$$

Es verdient bemerkt zu werden, dass alle hier auftretenden unendlichen Reihen sich sehr leicht summiren lassen, falls sich nur eine von ihnen, etwa die folgende:

$$\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + \frac{x^{3n-4}(1-u^{n-1})}{(n-1).1!(3n-4)!} + \frac{x^{4n-5}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(4n-5)!} + \ldots,$$

summiren lässt; diese aber kann man durch bestimmte Integrale ausdrücken, und zwar mittelst einer von Parseval gelehrten Methode, nach welcher man die Summe der Reihe

$$A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots$$

durch bestimmte Integrale anzugeben vermag, falls die Summen der folgenden zwei Reihen bekannt sind:

$$A_0 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \ldots,$$

$$B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_3}{z^3} + \ldots.$$

Bezeichnen wir die erste derselben durch $\varphi(z)$, die zweite durch $\psi(z)$, so hat man:

$$\varphi(z).\psi(z) = A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots + S[\alpha z^m] + S_1\left[\frac{\beta}{z^m}\right],$$

wo unter $S[\alpha z^m]$ alle jene Glieder des Produktes $\varphi(z).\psi(z)$ verstanden sind, welche $z$ in positiver Potenz, und unter $S_1\left[\frac{\beta}{z^m}\right]$ jene Glieder desselben Produktes, welche $z$ in negativer Potenz enthalten.

Macht man nun successive die beiden Substitutionen:

$$z = \cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega, \quad z = \cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega;$$

so erhält man:

$$\begin{aligned}\varphi(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega).\psi(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega) \\ = A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots \\ + S[\alpha(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega)] + S_1[\beta(\cos m\omega - \sqrt{-1}\sin m\omega)],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega).\psi(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega) \\ = A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots \\ + S[\alpha(\cos m\omega - \sqrt{-1}\sin m\omega)] + S_1[\beta(\cos m\omega + \sqrt{-1}\sin m\omega)],\end{aligned}$$

und durch Addition derselben:

$$\begin{aligned}\varphi(e^{\omega\sqrt{-1}})\psi(e^{\omega\sqrt{-1}}) + \varphi(e^{-\omega\sqrt{-1}})\psi(e^{-\omega\sqrt{-1}}) \\ = 2(A_0B_0 + A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \ldots) + 2S[\alpha\cos m\omega] + 2S_1[\beta\cos m\omega].\end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $d\omega$ und integrirt innerhalb der Grenzen 0 und $\pi$, so verschwinden die beiden Summen, weil jedes Glied derselben $\sin m\omega$ als Factor hat, was sowohl für $\omega=0$, als auch für $\omega=\pi$ gleich Null ist, und man erhält:

$$\int_0^\pi \{\varphi(e^{\omega\sqrt{-1}})\psi(e^{\omega\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-\omega\sqrt{-1}})\psi(e^{-\omega\sqrt{-1}})\}\,d\omega$$

$$=2\pi(A_0B_0+A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\ldots),$$

woraus folgt:

$$A_0B_0+A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3+\ldots$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{\varphi(e^{\omega\sqrt{-1}})\psi(e^{\omega\sqrt{-1}})+\varphi(e^{-\omega\sqrt{-1}})\psi(e^{-\omega\sqrt{-1}})\}\,d\omega,$$

und diess ist richtig, insofern den Convergenz-Bedingungen gehörig Rechnung getragen wird. Setzen wir nun:

$$F(x,u)=\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!}+\frac{x^{3n-4}(1-u^{n-1})}{(n-1).1!(3n-4)!}+\frac{x^{4n-5}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(4n-5)!}+\ldots,$$

so sind, wie man leicht sieht, alle in (4) vorkommenden Reihen Differentialquotienten hievon, und zwar ist:

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{2n-1}(1-u^{n-1})}{(n-1).1!(2n-1)!}+\frac{x^{3n-2}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(3n-2)!}+\ldots=\frac{\partial^{n-3}F(x,u)}{\partial x^{n-3}},$$

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{2n}(1-u^{n-1})}{(n-1).1!(2n)!}+\frac{x^{3n-1}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(3n-1)!}+\ldots=\frac{\partial^{n-4}F(x,u)}{\partial x^{n-4}},$$

$$\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{2n+1}(1-u^{n-1})}{(n-1).1!(2n+1)!}+\frac{x^{3n}(1-u^{n-1})^2}{(n-1)^2.2!(3n)!}+\ldots=\frac{\partial^{n-5}F(x,u)}{\partial x^{n-5}},$$

. . . . . . . . . . . . .

$$\varphi_n(x)=\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^{2n-2}}{(n-1).1!(2n-2)!}+\frac{x^{3n-3}}{(n-1)^2.2!(3n-3)!}+\ldots$$

$$=\frac{\partial^{n-2}F(x,u)}{\partial x^{n-2}},$$

und somit lässt sich der Ausdruck (4) auch so darstellen:

$$y = C_1 x + C_2 \frac{x^2}{2!} + C_3 \frac{x^3}{3!} + \dots + C_{n-2} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

$$+ \int_0^1 \Big\{ C_1 \frac{\partial^{n-3} F(x; u)}{\partial x^{n-3}} + C_2 u \frac{\partial^{n-4} F(x, u)}{\partial x^{n-4}} + C_3 u^2 \frac{\partial^{n-5} F(x, u)}{\partial x^{n-5}} + \dots$$

$$+ C_{n-3} u^{n-3} F(x, u) \Big\} du$$

$$+ C_{n-1} \varphi_n(x)$$

$$+ C_n \Big\{ 1 + \varphi_n(x) . \log x - \int_0^1 \frac{u^n - 1}{(u-1)(u^{n-1}-1)} . \frac{\varphi_n(ux) - u^{n-1} \varphi_n(x)}{u} du \Big\}.$$

Nach dem Parseval'schen Theoreme kann man $F(x, u)$ in geschlossener Form ausdrücken, falls man folgende zwei einfache Reihen:

$$\frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + \frac{x^{3n-4} z}{(3n-4)!} + \frac{x^{4n-5} z^2}{(4n-5)!} + \dots,$$

$$1 + \frac{1 - u^{n-1}}{(n-1) . 1! z} + \frac{(1 - u^{n-1})^2}{(n-1)^2 . 2! z^2} + \dots$$

summiren kann. Die letztere ist aber $e^{\frac{1-u^{n-1}}{(n-1)z}}$; die erste setzen wir gleich $R$, betrachten dasselbe als Funktion von $x$ und differentiiren dann beiderseits $(n-1)$mal bezüglich $x$, wodurch man erhält:

$$R = \frac{x^{2n-3}}{(2n-3)!} + \frac{x^{3n-4} z}{(3n-4)!} + \frac{x^{4n-5} z^2}{(4n-5)!} + \dots,$$

$$R^{(n-1)} = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \frac{x^{2n-3} z}{(2n-3)!} + \frac{x^{3n-4} z^2}{(3n-4)!} + \dots,$$

und somit

$$(5) \qquad R^{(n-1)} = zR + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}.$$

Diess ist eine complete lineare Differentialgleichung mit constanten Coefficienten; um deren Integrale zu finden, differentiire man dieselbe noch $(n-1)$mal nach $x$, man erhält dadurch:

$$(6) \qquad R^{(2n-2)} = z R^{(n-1)}.$$

Bezeichnet man nun die Wurzeln der Gleichung $\alpha^{n-1} = z$ mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_{n-1}$, so ist das Integral der Gleichung (6):

$$R = A_1 e^{\alpha_1 x} + A_2 e^{\alpha_2 x} + \dots + A_{n-1} e^{\alpha_{n-1} x} + B_1 + B_2 x + B_3 x^2 + \dots + B_{n-1} x^{n-2}.$$

Diess in (5) substituirt gibt:

$$z(A_1 e^{\alpha_1 x}+A_2 e^{\alpha_2 x}+\ldots\ldots+A_{n-1}e^{\alpha_{n-1}x})$$
$$=z(A_1 e^{\alpha_1 x}+A_2 e^{\alpha_2 x}+\ldots+A_{n-1}e^{\alpha_{n-1}x}+B_1+B_2 x+B_3 x^2+\ldots+B_{n-1}x^{n-2})$$
$$+\frac{x^{n-2}}{(n-2)!},$$

woraus folgt:

$$B_1=0,\quad B_2=0,\quad B_3=0,\ldots\ldots B_{n-2}=0,\quad B_{n-1}=-\frac{1}{z.(n-2)!}.$$

Man hat daher für das Integral der Gleichung (5) folgenden Ausdruck:

$$R=A_1 e^{\alpha_1 x}+A_2 e^{\alpha_2 x}+\ldots\ldots+A_{n-1}e^{\alpha_{n-1}x}-\frac{x^{n-2}}{z(n-2)!}.$$

Die hier auftretenden $n-1$ Constanten müssen so gewählt werden, dass für $x=0$

$$R=0,\quad R'=0,\quad R''=0,\ldots\ldots R^{(n-2)}=0$$

wird, denn der Ausdruck, den wir $R$ genannt haben, hat diese Eigenschaft. Diess führt zu folgenden Gleichungen:

$$(7)\left\{\begin{array}{lllll} A_1 & +A_2 & +A_3 & +\ldots+A_{n-1} & =0, \\ A_1\alpha_1 & +A_2\alpha_2 & +A_3\alpha_3 & +\ldots+A_{n-1}\alpha_{n-1} & =0, \\ A_1\alpha_1^2 & +A_2\alpha_2^2 & +A_3\alpha_3^2 & +\ldots+A_{n-1}\alpha_{n-1}^2 & =0, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_1\alpha_1^{n-3} & +A_2\alpha_2^{n-3} & +A_3\alpha_3^{n-3} & +\ldots+A_{n-1}\alpha_{n-1}^{n-3} & =0, \\ A_1\alpha_1^{n-2} & +A_2\alpha_2^{n-2} & +A_3\alpha_3^{n-2} & +\ldots+A_{n-1}\alpha_{n-1}^{n-2} & =\frac{1}{z}. \end{array}\right.$$

Um nun $A_1$ zu finden, verfahren wir so. Es ist

$$\alpha^{n-1}-z=(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)\ldots\ldots(\alpha-\alpha_{n-1}),$$

und differentiirt man diese Gleichung nach $\alpha$, so erhält man:

$$(n-1)\alpha^{n-2}=(\alpha-\alpha_2)(\alpha-\alpha_3)\ldots\ldots(\alpha-\alpha_{n-1})$$
$$+(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_3)\ldots\ldots(\alpha-\alpha_{n-1})+(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\ldots\ldots(\alpha-\alpha_{n-1})+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+(\alpha-\alpha_1)(\alpha-\alpha_2)\ldots\ldots(\alpha-\alpha_{n-2}),$$

und setzt man in dieser Gleichung $\alpha_1$ statt $\alpha$, so hat man:

$$(n-1)\alpha_1^{n-2}=(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots.(\alpha_1-\alpha_{n-1})$$

$$=\alpha_1^{n-2}+C_1\alpha_1^{n-3}+C_2\alpha_1^{n-4}+\ldots.+C_{n-4}\alpha_1^2+C_{n-3}\alpha_1+C_{n-2}.$$

Das Polynom

$$\alpha_1^{n-2}+C_1\alpha_1^{n-3}+C_2\alpha_1^{n-4}+\ldots.+C_{n-4}\alpha_1^2+C_{n-3}\alpha_1+C_{n-2}$$

hat, wie man aus dem ihm identisch gleichen Ausdruck

$$(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots.(\alpha_1-\alpha_{n-1})$$

sieht, die Eigenschaft, gleich Null zu werden, wenn man statt $\alpha_1$ $\alpha_2$ oder $\alpha_3$ oder $\alpha_4$ oder $\ldots.\alpha_{n-1}$ setzt; also hat man:

$$\alpha_2^{n-2}+C_1\alpha_2^{n-3}+C_2\alpha_2^{n-4}+\ldots.+C_{n-4}\alpha_2^2+C_{n-3}\alpha_2+C_{n-2}=0,$$

$$\alpha_3^{n-2}+C_1\alpha_3^{n-3}+C_2\alpha_3^{n-4}+\ldots.+C_{n-4}\alpha_3^2+C_{n-3}\alpha_3+C_{n-2}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\alpha_{n-1}^{n-2}+C_1\alpha_{n-1}^{n-3}+C_2\alpha_{n-1}^{n-4}+\ldots.+C_{n-4}\alpha_{n-1}^2+C_{n-3}\alpha_{n-1}+C_{n-2}=0.$$

Multiplicirt man nun die Gleichungen (7) der Reihe nach mit $C_{n-2}$, $C_{n-3}$, $C_{n-4}$, .... $C_2$, $C_1$. 1 und addirt sie alle, so hat man, unter Berücksichtigung der eben aufgeschriebenen Gleichungen:

$$A_1(n-1)\alpha_1^{n-2}=\frac{1}{z},\quad \text{d. h. } A_1=\frac{1}{z(n-1)\alpha_1^{n-2}}=\frac{\alpha_1}{(n-1)z^2};$$

eben so findet man:

$$A_2=\frac{\alpha_2}{(n-1)z^2},\quad A_3=\frac{\alpha_3}{(n-1)z^2},\ldots.;$$

folglich ist

$$R=\frac{\alpha_1e^{\alpha_1x}+\alpha_2e^{\alpha_2x}+\ldots.+\alpha_{n-1}e^{\alpha_{n-1}x}}{(n-1)z^2}-\frac{x^{n-2}}{z.(n-2)!};$$

und jetzt lässt sich unmittelbar die Parseval'sche Methode zur Bestimmung von $F(x,u)$ anwenden.

So hat man in dem einfachen Beispiele

$$x+\frac{x^2}{1!2!}+\frac{x^3}{2!3!}+\frac{x^4}{3!4!}+\ldots.,$$

welches bei der Entwickelung von $xy''-y=0$ vorkömmt:

$$(8)\quad\begin{cases} x+\dfrac{x^2z}{2!}+\dfrac{x^3z^2}{3!}+\dfrac{x^4z^3}{4!}+\ldots.=\dfrac{e^{xz}-1}{z}, \\[2ex] 1+\dfrac{1}{1!z}+\dfrac{1}{2!z^2}+\dfrac{1}{3!z^3}+\ldots.=e^{\frac{1}{z}}; \end{cases}$$

folglich:

$$x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)(e^{x(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)} - 1)\, e^{\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega}$$

$$+ (\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)(e^{x(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)} - 1)\, e^{\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega}\}\, d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{(1+x)\cos\omega}\cos(\omega + \sin\omega - x\sin\omega) - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{\cos\omega}\cos(\omega + \sin\omega)\, d\omega.$$

Geht man, statt von den beiden Reihen (8), von folgenden beiden Reihen aus:

$$x + \frac{x\sqrt{x}}{2!\,z} + \frac{x^2}{3!\,z^2} + \frac{x^2\sqrt{x}}{4!\,z^3} + \ldots = z\sqrt{x}\,(e^{\frac{\sqrt{x}}{z}} - 1),$$

$$1 + \frac{z\sqrt{x}}{1!} + \frac{z^2 x}{2!} + \frac{z^3 x\sqrt{x}}{3!} + \ldots = e^{z\sqrt{x}};$$

so findet man:

$$x + \frac{x^2}{1!2!} + \frac{x^3}{2!3!} + \frac{x^4}{3!4!} + \ldots = \frac{\sqrt{x}}{2\pi}\int_0^\pi \{e^{\sqrt{x}(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)}(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)(e^{\sqrt{x}(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)} - 1)$$

$$+ e^{\sqrt{x}(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)}(\cos\omega - \sqrt{-1}\sin\omega)(e^{\sqrt{x}(\cos\omega + \sqrt{-1}\sin\omega)} - 1)\}\, d\omega$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^\pi \cos\omega\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\, d\omega - \frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^\pi \cos(\omega + \sqrt{x}\sin\omega)\, e^{\sqrt{x}\cos\omega}\, d\omega.$$

Nun ist

$$\frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\omega\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\,d\omega$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\omega\left(1+2\sqrt{x}\cos\omega+\frac{4x\cos^2\omega}{2!}+\frac{8x\sqrt{x}.\cos^3\omega}{3!}+\ldots\right)d\omega$$

$$=x+\frac{x^2}{1!\,2!}+\frac{x^3}{2!\,3!}+\frac{x^4}{3!\,4!}+\ldots,$$

folglich muss

$$\int_0^{\pi}\cos(\omega+\sqrt{x}\sin\omega)\,e^{\sqrt{x}\cos\omega}\,d\omega=0$$

sein. Man kann daher setzen:

$$x+\frac{x^2}{1!\,2!}+\frac{x^3}{2!\,3!}+\frac{x^4}{3!\,4!}+\ldots=\frac{\sqrt{x}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\omega\, e^{2\sqrt{x}\cos\omega}\,d\omega$$

oder

$$x+\frac{x^2}{1!\,2!}+\frac{x^3}{2!\,3!}+\frac{x^4}{3!\,4!}+\ldots=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\omega+\sin\omega-x\sin\omega)\,e^{(1+x)\cos\omega}\,d\omega.$$

Die Gleichungen

$$xy^{(n)}-ay=0,\quad xy^{(n)}+ay=0$$

lassen sich auf dieselbe Weise integriren und liefern unendliche Reihen, oder, wenn man will, geschlossene Ausdrücke von ganz ähnlicher Form, als die Gleichung $xy^{(n)}-y=0$ liefert. Setzt man daher die Integrale dieser Gleichungen als bekannt voraus, so kann man auch leicht die Integrale folgender gleichzeitigen Differentialgleichungen angeben:

$$xy^{(n)}=az,\quad xz^{(n)}=ay;$$

denn man hat durch Addition und Subtraction derselben:

$$x(y+z)^{(n)}=a(y+z),\quad x(y-z)^{(n)}=-a(y-z).$$

Die erste dieser Gleichungen liefert $y+z$, die zweite $y-z$, jede als Function von $x$ mit $n$ willkührlichen Constanten; folglich kann man $y$ und $z$ als Functionen von $x$ mit $2n$ willkührlichen Constanten versehen, angeben.

Sehr leicht lässt sich auch die Gleichung $(ax+b)y^{(n)}=y$ integriren; denn setzt man $ax+b=\xi$ und $\frac{1}{b^n}=\alpha$, so erhält man $\xi\frac{d^ny}{d\xi^n}=\alpha y$, dessen Integral wir ja schon als bekannt annahmen.

**Anmerkung.** Die Parseval'sche Methode kann auch dienen zur Bestimmung von bestimmten Integralen. So fanden wir mittelst derselben das merkwürdige Integral:

$$\int_0^\pi \cos(\omega + a\sin\omega)e^{a\cos\omega}d\omega = 0,$$

und so wollen wir noch einige andere bestimmen. Es ist:

$$1+\binom{m}{1}z+\binom{m}{2}z^2+\binom{m}{3}z^3+\ldots = (1+z)^m,$$

$$1+\binom{n}{1}\frac{1}{z}+\binom{n}{2}\frac{1}{z^2}+\binom{n}{3}\frac{1}{z^3}+\ldots = (1+\frac{1}{z})^n;$$

aus ihnen folgt:

$$(9)\qquad 1+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\binom{m}{3}\binom{n}{3}+\ldots$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\frac{u}{2})^{m+n}\cos\left(\frac{m-n}{2}u\right)du,$$

was richtig ist, falls $m$ und $n$ positive Zahlen sind.

Für $m = n$ hat man:

$$1+\binom{m}{1}^2+\binom{m}{2}^2+\binom{m}{3}^2+\ldots = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\frac{u}{2})^{2m}du;$$

ist $m$ eine ganze Zahl, so wird der Werth der hier angeführten Reihe $= \binom{2m}{m}$.

Für $n = 0$ hat man:

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\frac{u}{2})^m\cos\frac{mu}{2}du \quad \text{oder} \quad \int_0^\pi (2\cos\frac{u}{2})^m\cos\frac{mu}{2}du = \pi.$$

Die Reihe

$$1+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\binom{m}{2}\binom{n}{2}+\binom{m}{3}\binom{n}{3}+\ldots$$

ist eine endliche, so bald eine der beiden Zahlen $m$ oder $n$ ganz und positiv ist; ist keine der beiden Zahlen ganz und positiv, so ist die Reihe eine unendliche; für $m+n+1>0$ ist die Reihe convergent, für $m+n+1<0$ ist die Reihe divergent.

Auf dem hier betretenen Wege wäre es nicht schwierig, auch folgende Reihe zu summiren:

$$1+\binom{m}{1}^2+\binom{m}{2}^2+\binom{m}{3}^2+\ldots,$$

aber die Formeln, die man erlangt, sind äusserst complicirt.

---

# V.

## Beobachtungen von Nordlichtern in den Jahren 1840 bis 1852.

Von

Herrn *I. F. Julius Schmidt*,

Astronomen der Sternwarte zu Olmütz.

---

Als ich mich entschlossen hatte, eine ziemlich umfassende Beobachtungsreihe über das Nordlicht zu veröffentlichen, legte ich keinen besondern Werth darauf, ganz erschöpfende Beschreibungen einzelner Phänomene zu geben, weil nach meiner Meinung dieselben ohne begleitende Abbildungen nicht zum Ziele führen, weil die Schilderung feiner Beobachtungen über die oft höchst wunderbaren Variationen des Polarlichtes zuletzt doch nur dem völlig verständlich ist, der selbst schon viele derartige Phänomene mit Sorgfalt und Ausdauer beobachtet hat. Die Nordlichter zeigen im Ganzen genommen, so zu sagen, einen mittleren Typus, der in den meisten Fällen sich in irgend einer Phase darstellt; aber die Ausnahmserscheinungen sind überaus mannigfaltig, so wohl was die Gestalt und die Farbe, die Bewegung und eine merkwürdige Umwandlung in Wolken gewöhnlicher Art betrifft. Alle meine Beobachtungen wurden in Deutschland angestellt, etwa zwischen den Breiten von 54½° und 48½°. Innerhalb dieser Zone nenne ich die Erscheinung des Nordlichtsbogens und der gewöhnlichen Strahlen häufig, die der Krone und der Corruscationen aber äusserst selten. Die meisten Nordlichter sah ich zu Eutin in Holstein, zu Hamburg und zu Bonn. In 3 Jahren kam mir weder in Olmütz noch in Wien ein Nordlicht zu Gesicht. (1852. 53. 54.) Ich sehe

den etwaigen Werth dieser Mittheilungen nur darin, weil unsere Kenntnisse von der Häufigkeit und der Vertheilung der Polarlichter dadurch etwas vervollständigt werden, sie liefern einen Beitrag mehr für spätere Forscher, die sich damit beschäftigen werden, einen Catalog für die Nordlichtbeobachtungen zu entwerfen, um das Auftreten dieser räthselhaften Erscheinung mit den Perturbationen des Erdmagnetismus vergleichen zu können. Erwägt man den Umstand, dass erst neuerdings u. A. durch die Untersuchungen von R. Wolf in Bern der Zusammenhang zwischen der 11jährigen Periode des Erdmagnetismus und der gleichlangen der Sonnenflecken nachgewiesen ist, und erinnert man sich, dass das Nordlicht, auch unsichtbar, sich durch die Perturbationen des Magnetismus verräth, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass wir es mit einem eben so dunklen als grossartigen Probleme zu thun haben. Niemand aber kann sich verhehlen, dass die Erscheinungen des Nordlichtes noch der ernstesten und umfassendsten Untersuchungen bedürfen. Wer das von Arago zusammengestellte Verzeichniss durchsieht, und selbst viele Polarlichter beobachtet hat, wird diese Meinung nicht unbegründet finden, und zugeben, dass selbst jede Beobachtung einen Werth hat, die nur Datum und Stunde der Erscheinung angiebt. — In meinen Tagebüchern finde ich nur 76 Nordlichter oder diesen ähnliche Erscheinungen verzeichnet; darunter sind einige sehr grosse; andererseits viele höchst schwache und selbst zweifelhafte. Aber ich werde Alles aufnehmen, weil es heutzutage nicht mehr erlaubt ist, selbst nur eine ungewöhnliche Helle an dem wolken- und mondlosen Himmel mit Stillschweigen zu übergehen, und weil es noch vorzukommen scheint, dass gelegentlich der Schweif eines grossen Cometen mit dem Zodiakallichte, und dieses mit der Milchstrasse oder selbst mit dem Nordlichte verwechselt wird. Heis' Beobachtungen, wie auch meine eigenen, zeigen, dass das Zodiakallicht den grössten Theil des Jahres hindurch gesehen werden kann; aber die Erscheinung dieses Lichtes ist auf einen gewissen Raum zu beiden Seiten der Ekliptik beschränkt. Wenn Nachts mitten im Winter die Bilder des Thierkreises südlich vom Zenithe hoch über dem Horizonte culminiren, so liegt gleichzeitig der entgegengesetzte Theil des Thierkreises tief unter dem nördlichen Horizonte; im Sommer kehrt sich das Verhältniss zwar um, aber in den nördlichen Zonen der Erde, wo zumeist die Polarlichter gesehen werden, lässt die nächtliche Dämmerung nicht zu, ein Nord- oder Zodiakallicht zu beobachten. Zeigt sich aber wirklich zu diesen Zeiten ein Nordlicht, (wie ich solches 1850 Juni 13 zu Bonn beobachtet habe), so wird das Strahlenwerfen wohl keinen Zweifel an der Realität der Erscheinung aufkommen lassen.

Der Meteorologe, der meist nur zu gewissen Stunden seine Instrumente abliest, wird nicht viele Nordlichter sehen, desto mehr aber der Astronom, dessen Aufmerksamkeit nicht ausschliesslich auf Messungen im Thurme seiner Sternwarte, oder auf die Culminationen am Meridiankreise gerichtet ist. In der Zeit von 1838 bis 1853 habe ich gegen 100 Nordlichter gesehen, aber keineswegs alle genau beobachtet und noch weniger alle notirt. Ehemals, noch in meiner Heimath, glaubte ich, weil in verschiedenen Schriften mit grosser Bestimmtheit über das Wesen des Nordlichtes verhandelt würde, dass alles hinreichend ergründet sei; aber es dauerte nicht lange, als ich merkte, dass unsere Kenntnisse über das Nordlicht ebenso lückenhaft seien, wie über die Meteore, über das Gewitter und über noch viele andere Erscheinungen, welche Himmel und Erde betreffen. Es ist bekannt, dass manche Beobachter während des Nordlichtes ein Geräusch gehört haben wollen. Ich habe es nie gehört, obgleich ich, namentlich zur Zeit sehr grosser Nordlichter sorgfältig darauf achtete; aber dies negative Resultat hat mich noch nicht bestimmt, die Aussagen der Beobachter in Zweifel zu ziehen, welche das Geräusch gehört haben. Ich weiss, dass Vermuthungen und Hypothesen ausgesprochen worden sind, theils um das Geräusch zu erklären, theils um die Wahrnehmung desselben auf Täuschung zurückzuführen. Was das Letztere betrifft, so bin ich jedesmal einigermaassen überrascht gewesen über die Zuversicht, mit welcher dem Beobachter Täuschungen verschiedener Art zugeschrieben werden. Wer die Möglichkeit einer Täuschung darlegt, ist noch sehr weit davon entfernt, die Wahrscheinlichkeit derselben erwiesen zu haben. Wer den Beobachter daran erinnert, dass das Geräusch während des Nordlichtes durch das Krachen des Eises, durch das Zusammenziehen der Schneekruste könnte bedingt sein, muss zunächst ermitteln, ob zur Zeit solcher Wahrnehmung Eis und Schnee vorhanden war, und doch einsehen, dass Beobachter, die ihre Studien nicht zwischen Büchern, sondern vorzugsweis in der freien Natur machten, zum grössten Theile doch wohl Phänomene kennen werden, die Jedem bekannt sind. Nur 3 grosse Nordlichter habe ich im strengen Winter gesehen, während der Boden mit Schnee, das Wasser mit Eis bedeckt war. Ich habe auf der Eisdecke eines Sees beobachtet, und fortwährend das sehr bekannte Krachen des Eises gehört, ohne im Geringsten daran zu denken, dass es Beziehung zum Nordlichte habe. Ich erinnere an noch andere mögliche Täuschungen, die man bis jetzt, so viel ich weiss, nicht angeführt hat. Zuweilen sind im Winter die Bäume mit Reif oder mit Glatteis bedeckt; ein geringer Luftzug setzt die Zweige in Bewegung, und mit leisem Rieseln und Knistern fallen die Eisstücke auf die Schneefläche herab. Mehr-

fach habe ich dies bei Nordlichtern wahrgenommen, aber hierauf, als auf eine der alltäglichsten Erscheinungen, begreiflicher Weise keine Rücksicht genommen. Oft ziehen hoch durch die Luft, und mitten in der Nacht, Züge von Enten und andern Wasservögeln, die bald ein pfeifendes, bald ein rauschendes Getöse von wechselnder Intensität verursachen; auch dieses habe ich während der Nordlichtbeobachtungen wahrgenommen; ich habe jedoch nie für möglich gehalten, dass so bekannte Hergänge zu Täuschungen veranlassen sollten. Aber man ist noch weiter gegangen, um das Nordlichtgeräusch zu beseitigen; man hat für möglich und selbst wahrscheinlich erachtet, der Beobachter habe sich im Anblicke der gewaltsamen Bewegungen des Nordlichts so hinreissen lassen, ein gleichzeitiges Geräusch h i n z u z u d e n k e n, und später zu glauben, er habe es wirklich gehört. Dies ist sehr stark; dergleichen soll man wohl irgend einem Poeten zumuthen, nicht aber dem ernsten nüchternen Beobachter. Wohin werden wir kommen, wenn wir in allen Fällen, wo schwierige Phänomene besprochen werden, die entweder zweifelhaft sind, oder mit gewissen Theorien nicht auf dem besten Fusse stehen, dem Beobachter nicht nur eine Menge von möglichen Täuschungen aufbürden, sondern ihn obenein noch geradezu kindische Eigenschaften zu schreiben, dadurch seine Fähigkeit und Glaubwürdigkeit indirect in Zweifel ziehen, und dahin gelangen, dass nur eine bequeme Kritik auf dem Papiere das Rechte getroffen oder vermuthet habe! Einwürfe solcher Art sind aber nicht consequent; warum muthet man dem Beobachter nicht zu, auch zu glauben, während der Erscheinung eines Feuermeteores, einer Sternschnuppe, das Rauschen der Bewegung zu hören, während des Anblicks eines sehr fernen Wetterleuchtens den Donner, während einer Vesuveruption, gesehen aus 8 Meilen Entfernung, das Getöse der sichtbaren Explosionen zu vernehmen? Das Nordlicht ist doch eine sehr gewöhnliche Erscheinung, die für den erfahrenen Beobachter nichts Ueberraschendes darbietet, und es sind doch nicht immer Anfänger, denen wir genaue Beobachtungen dieses Phänomens verdanken. — Ich kann nicht umhin, zu bemerken, dass der redliche und besonnene Beobachter recht viele Täuschungen zugeben wird, aber er wird zunächst darauf bestehen müssen, dass wenn von Täuschungen die Rede ist, dieselben ihm selbst am meisten bekannt sein müssen. Während meiner astronomischen Thätigkeit sind mir Täuschungen (wirklicher Augenbetrug) nicht vorgekommen, wohl mitunter falsche Deutungen des Gesehenen, die früher oder später entweder beseitigt wurden, oder bis heute unerledigt blieben. Wer aber zu sehen glauben kann, was nach seiner Meinung sichtbar sein müsste, wer zu hören glaubt, was gehört werden könnte,

sollte sich jeder Beobachtung enthalten, oder wenigstens Nichts darüber drucken lassen.

Die folgenden Beobachtungen gebe ich abgekürzt nach dem Wortlaute meiner Tagebücher; ich füge diejenigen Nordlichter bei, welche mir gelegentlich durch meine Correspondenz bekannt geworden sind.

1839.

In dem meteorologischen Tagebuche des Dr. Med. **Roth** zu Eutin finde ich folgende Nordlichtbeobachtungen:

Februar 21.

October 22, sehr grosses Nordlicht.

October 23, schwächeres Nordlicht.

November 1, zweifelhaftes Nordlicht.

Ich bemerke für die Nordlichter im October, die sich einige Jahre um den 23sten einstellten, dass um diese Zeit auch ein von Heis und mir nachgewiesener periodischer Sternschnuppenfall stattfindet.

1840.

Am 21. December beobachtete ich zu Eutin in Holstein, bei sehr heiterem Himmel und starkem Froste, ein überaus grosses und prachtvolles Nordlicht. Gleich nach dem Ende der Dämmerung zeigte sich unter den 7 Sternen des Bären eine auffallende Helligkeit, welche sich bald zu einem regelmässigen Bogensegmente entwickelt hatte; dieses stand in gelbweisser Farbe 15 Minuten lang. Nun wurde der helle Lichtsaum breiter und zeigte in der Mitte seiner Erstreckung eine dunkle Zone. Um einen freien Horizont zu haben, begab ich mich sodann auf die Eisfläche des Sees. Um $5^{u}$ $30^{m}$ zeigte der Lichtsaum östlich, und unter $\gamma$ Ursae einen senkrechten Abschnitt, der an Helligkeit das Uebrige ansehnlich übertraf; diese Anomalie war bald ausgeglichen, und um $5^{u}$ $45^{m}$ erhob sich am westlichen Ende des Lichtbogens die erste säulenförmige Lichtmasse von rother Farbe, während der übrige weisse Theil des Bogens in der Gegend von $\gamma$ und $\beta$ Ursae an Breite zunahm. Mit geringen Veränderungen dauerte dies Schauspiel bis $6^{u}$ $30^{m}$. Nun hatte der Bogen nach oben eine schiefere Begränzung erlangt; unten gegen den Horizont hin war er wie von grauen Nebeln verhüllt. Um $6^{u}$ $31^{m}$ zeigte sich in dem Bogen eine zitternde Bewegung, und plötzlich hatte es den Anschein, als würde die ganze Masse durch den heftigsten Wirbelsturm aufgeregt. Schichtenweis rollte eine Lichtmasse von Osten

nach Westen über und durch die andere hin, und entwickelte hierbei die lebhaftesten prismatischen Farben, unter denen nur das Blau fehlte. Es war, als senkten sich die wirbelnden Lichtwolken von den Hügeln auf die Fläche des See's herab. Diese Bewegung dauerte höchstens 20 Secunden; dann hörte sie plötzlich auf, und es zeigte sich der gewöhnliche Bogen wieder in matt weisslich gelber Farbe. Um $7^u$ bildete sich in demselben wieder ein dunkler Raum, eine Spalte, die 10 Minuten sichtbar blieb, und nach einer neuen Bewegung vergrösserte sich der Lichtschein schnell 20° weiter gegen Westen. Um $7^u$ $15^m$ schossen geradlinigte weisse Strahlen in grosser Menge aus dem Bogen auf, in 1—3 Secunden das Zenith erreichend; westlich war der Bogen jetzt weiss, östlich gelb. Um $8^u$ hörte das Strahlenwerfen auf; der Bogen war westlich gelb, in der Mitte weiss, und östlich roth; nur 3 weisse Strahlen blieben allein noch lange sichtbar. In dem Maasse, wie diese Strahlen abnahmen, verlor der Bogen seine Krümmung, und verwandelte sich in einen geraden hellrothen Streifen von 20° Neigung gegen den Horizont. (Ich finde nicht angegeben, wo er den Horizont berührte). Aus diesem Streifen, der soviel ich vermuthe, sich östlich senkte, erhob sich oberhalb ein dunklerer Bogen, mit seiner Krümmung gegen $\eta$ $\xi$ $\delta$ und $\gamma$ Ursae gerichtet; er verschwand, als sich um $8^u$ $45^m$ der erwähnte gerade Streifen wieder zum gewöhnlichen Lichtsaume umgewandelt hatte; westlich war er breit, östlich verlief er mit einer schmalen Spitze. Ein intensiv gelber Strahl schoss aus diesem mit 30° Neigung hervor. Um $9^u$ war Alles beinahe verschwunden, so dass ich die Beobachtung aufgab, aber um $10^u$ hatte sich das Nordlicht in seiner ganzen Grösse und Helligkeit wieder ausgebildet. Mit unglaublicher Geschwindigkeit schossen grüne Strahlen aus dem gelben Bogen gegen das Zenith; Roth zeigte sich nirgends. Um $10^u$ $30^m$ hatte der Bogen zahlreiche dunkle Lücken; er ward roth, und sandte einen 7° breiten höchst glänzend grünen Strahl empor; der Anblick war ausserordentlich, wie ich ihn nie wieder gesehen habe. Diese Säule leuchtete nur 5 Minuten, bis sie plötztich erlosch. Um $11^u$ war der ganze Bogen grün, ein Hauptstrahl bläulich. Um $11^u$ $36^m$ war Alles zu einer formlosen Masse verschmolzen, aus welcher mattgelbe Streifen aufstiegen. Bald nach Mitternacht hatte die Erscheinung ein Ende.

## 1841.

Januar (Datum unbekannt). Ebenfalls zu Eutin sah ich Abends von 6 bis 12 Uhr ein grosses blutrothes Nordlicht, welches um Mitternacht hoch am Himmel die vollkommene rothe Krone ausbildete; sie senkte sich östlich wolkenähnlich gegen den Horizont. Einige Tage später (Datum unbekannt) kam ein Nordlicht

mit ausserordentlichen Erscheinungen. Von 8 bis 11 Uhr wallten ununterbrochen gelbe concentrische Lichtwellen mit grosser Geschwindigkeit von NW. gegen das Zenith empor. Diese und die vorherige Erscheinung habe ich später nie wieder gesehen. Das Datum wird sich wohl aus der Wahrnehmung von magnetischen Störungen zu jener Zeit ermitteln lassen.

1843.

Januar 2. (Hamburg.) Um 6 Uhr zeigte sich südlich vom Drachen die schwache Spur eines Nordlichtes. Anfangs weiss, nahm es um 7 Uhr eine röthliche Färbung an.

März 2. Ein grosses zu Hamburg gesehenes Nordlicht. (briefl. Mitth.)

März 8. sah ich im NO. die schwache Spur eines Nordlichtes.

April 5. schien eine besondere Helligkeit zwischen den Wolken ein Nordlicht zu verrathen.

August 3. Abends zwischen 11 und 12 Uhr zeigte sich nördlich bei den Füssen des grossen Bären ein grünlicher Schimmer, der um 12 Uhr die scheinbare Höhe von $\alpha$ und $\beta$ Ursae erreichte.

1844.

Januar 12. (Hamburg.) Bei vollkommen heiterem Himmel sah ich schon Mittags das kreisförmige Segment eines Nebelbogens, der bis zur Dunkelheit anhielt, und Abends eine so grosse Helligkeit über den Himmel ergoss, als wollte der Mond aufgehen. Ungeachtet völliger Klarheit der Luft waren die Sterne der 5ten bis 6ten Grösse schwer zu erkennen. Um $10^h$ schwand das Licht. Temperatur $= -7^0$ R.

Januar 13. Um $10^h$ wieder der gelbe Schimmer am nördlichen Himmel, aber schwächer als am vorigen Tage.

Januar 19. Um $10^h$ von Lyra bis Leo major ein gelber Schimmer.

Februar 20. Um $9^h$ $30^m$ schwacher Schein im Nordosten.

April 17. Gegen $10^h$ $45^m$ zeigte sich im Nordwesten unter Perseus und bis zur Cassiopea ein sehr deutliches Nordlicht von weissgelber Farbe. Um $10^h$ $59^m$ erlosch der Hauptstreifen; eine Minute später der schwächere Strahl.

August 9. Zwischen 11 und 12 Uhr bemerkte ich um $\chi$ Ursae den deutlichen gelben Schein des Polarlichtes, der sich bald ausdehnte, bald verringerte; es kam nicht zur Ausbildung.

**November 14.** Von 7 Uhr bis Mitternacht zeigte sich im Norden und Osten von $\alpha$ Canum bis zu den Zwillingen ein weissgelber Schimmer, bald heller bald dunkler. Um 8 Uhr war der Mond untergegangen. Um 12 Uhr trat plötzlich dichter Nebel ein.

1845.

**Januar 10.** (Hamburg.) Ein sehr schwacher und unbestimmter Bogen stand nördlich bis 10 Uhr; er verschwand zuweilen und kam wieder. Der ganze Himmel war hell wie in einer Juninacht; die kleinsten Sterne schwer sichtbar; bald darauf dichter Nebel.

**August 29.** (Sternwarte zu Bilk bei Düsseldorf.) Um $9^u\,15^m$ gewahrte ich unterhalb des grossen Bären das helle weissgelbe Segment eines Nordlichts; es erstreckte sich horizontal von $\beta$ Aurigae bis $\eta$ Bootis, vertical vom Horizonte bis $\chi$ Ursae; auch ein grosser weisser Strahl ward 5 Minuten lang sichtbar. Der obere Rand des Segmentes berührte um $9^u\,35^m$ $\beta$ und $\gamma$ Ursae; war aber um $9^u\,40^m$ wieder bis $\chi$ Ursae zurückgetreten. Zu dieser Zeit lag unter dem Segmente eine graue Nebelschicht. Um $10^u\,12^m$ bildete sich links von $\chi$ Ursae ein grosser weissröthlicher Lichtfleck, er senkte sich westlich zum Bootes. Temperatur $= +15^0$ R.

**August 30.** Ganz ähnliche Erscheinungen wie am 29sten beobachtete ich während einer nächtlichen Rheinfahrt von Düsseldorf bis Köln.

**September 1.** Auf dem Drachenfels im Siebengebirge sah ich, bei äusserst heiterem Himmel, wieder die eigenthümliche Helligkeit eines unentwickelten Nordlichtes.

**September 24.** (Bilk.) Bei völlig heiterem Himmel zeigte sich zwischen $8\frac{1}{4}$ und 10 Uhr der schwache Schimmer im Norden.

**September 25.** (Bilk.); wieder dieselbe Erscheinung, aber viel deutlicher und heller als am 24. September. Um $11^u$ kamen Wolken aus NW.

**September 26.** (Bilk.) Abends $11^u$. Die ungewöhnliche Helligkeit im Norden und Nordwesten, die in Zwischenräumen der Wolken sich zeigte, liess ein schwaches Nordlicht vermuthen. Am 25. und 29. September war der Himmel vollkommen heiter, aber von dem gelblichen Schimmer zeigte sich nicht die geringste Spur.

**December 3.** (Eutin.) Die ausserordentlichen Erscheinungen dieses höchst merkwürdigen Nordlichtes habe ich mit aller Sorgfalt viele Stunden lang beobachtet und gezeichnet. Hier muss ich

mich darauf beschränken, das Wesentlichste aus dem Manuscripte hervorzuheben, welches ich gleich am Tage darauf über das Nordlicht ausgearbeitet habe. Bereits um 6 Uhr Abends, als ein heftiger Westwind angefangen hatte, die Wolkenmassen zu zertheilen, bemerkte ich gegen Norden eine besondere gelbröthliche Helligkeit, die nicht wohl von dem sichelförmigen Monde herrühren konnte. Um 7 Uhr war der Himmel ganz heiter. Von Westen bis gegen Nordosten lag eine tiefdunkle, nach oben scharf abgeschnittene Wolkenbank von 3° — 4° Höhe. Darüber lagerte der graue Nebelbogen in Form eines Kreissegmentes, und von ihm aus verbreitete sich durch das Sternbild des Bären bis 15° Höhe eine starke Helligkeit, wechselnd zwischen weiss, grünlich und orange. Um 7ᵘ begann der Lichtsaum grosse senkrechte und schräge Strahlen zu werfen; sie waren weiss, gelblich oder grün, ½° bis 2° breit, und nicht über 30° hoch. Oft erschien es, als erglühten sie langsam von unten auf; bald war das Maximum der Helligkeit am Fusse, bald an den Rändern der Strahlen, Alles bei stetem Wechsel der Farbe und der Dimensionen. Als ich am Seeufer besser bis an den Horizont sehen konnte, bemerkte ich, dass die Wolkenmassen sich westlich und nördlich vermehrt hatten; mitunter flammte im Westen der rothe Schein eines gewöhnlichen Wetterleuchtens auf; meist dunkelroth, aber unzweifelhaft nur einem fernen Gewitter angehörend. Bis 8 Uhr dauerte das Nordlicht mit geringen Veränderungen, von 10 zu 10 Minuten bald dunkel, bald wieder heller aufstrahlend.

Um 7ᵘ 45ᵐ umfasste der strahlenwerfende Bogen 70° bis 80°; ich sah zuweilen 10 und 20 Lichtsäulen gleichzeitig; aber sehr auffallend war das Verharren des Hauptstrahles an demselben Orte, während die schwächeren mit gleichförmiger Bewegung von NO. durch N. nach W. vorüberzogen und dann erloschen. Ich sah einen hohen grünen Strahl von 2° Breite bis über η Ursae hinaufreichen; an seiner rechten Seite wurde er rasch sehr hell, grün und scharf abgeschnitten, aber das grüne Fluidum schien sich in 2 Secunden bis an den linken Rand zu bewegen, worauf die Säule verschwand. Zwischen 8ᵘ und 8ᵘ 30ᵐ hörte das Strahlenwerfen auf. Um 8ᵘ 45ᵐ kamen die Strahlen wieder und zugleich zeigte sich eine neue merkwürdige Erscheinung. Während nämlich im Norden kleine schwache und bewegliche Lichtsäulen aufschossen und wieder zurücksanken, bildete sich plötzlich genau über dem Westpunkte des Horizontes eine eigenthümlich helle, 45° hohe weisse Lichtgarbe; unten verlief sie spitz, oben war sie fächerförmig ausgebreitet. Sie reichte durch das Sternbild des Schwans, deckte dort die Milchstrasse, und sandte oben nach Rechts durch den Cepheus und kleinen Bären, durch den Fuhr-

mann bis zum östlichen Horizonte einen weissen, 2° breiten Bogen, der ganz einer zweiten Milchstrasse glich, aber nach 5 Minuten wieder erlosch. Die mittlere gerade Aufsteigung der erstgenannten westlichen Lichtgarbe hatte oben im Fächer etwa $20^u$ $40^m$, die Declination des oberen Endes +50°. Gegen den Horizont stand sie völlig senkrecht. Auch sie erlosch nach 10 Minuten, allein um $9^u$ $5^m$ erblickte ich sie wieder im vollen Glanze und grösserer Ausdehnung. Sie rückte langsam von W.—S.; sie hatte 50° Höhe und unten 2° Breite, und verlief oben mit 3 über einander weg-liegenden flammenartig geschwungenen Queerstreifen, so dass dort ihre Breite gegen 15° betragen mochte. Um $9^u$ $10^m$ hatte sich die grosse Garbe in 2 kleinere getheilt, die untere, nach links, also südlicher gelegene, war unten spitz, oben breiter, hell fächerförmig, intensiv weiss; sie bedeckte oben $\varepsilon$ Pegasi. Die obere, rechts gelegene begann erst in 20° über dem Horizonte und glich vollkommen dem Schweife eines grossen Cometen, welche Täuschung sich noch vermehrte, als um $9^u$ $15^m$ $\varepsilon$ Pegasi gewissermassen den Kopf des Cometen bezeichnete. Dieser Stern lag jetzt am untern Ende des Strahls; im obern Fächer standen $\beta$ und $\eta$ Pegasi.

Beide nahe gleich helle Streifen waren zwischen 45° und 50° gegen den Horizont geneigt, der südliche und tiefer stehende bis zum Horizonte hinabreichend. Um $8^u$ $19^m$ waren 3 Streifen sichtbar; der untere Nr. 1 weiter gegen Süden gerückt, reicht bis $\vartheta$ Pegasi, der nächsthöhere Nr. 2 hat seine Bewegung vergrössert, weil er jetzt anfängt, Nr. 1 zu bedecken (oder hinter ihm fortzuziehen); ein neuer schwächerer Strahl Nr. 3, nahe parallel zu den erstern, steht höher und westlicher als Nr. 2. Um $9^u$ $24^m$ hat der Strahl Nr. 2 den Strahl Nr. 1 überschritten. Jetzt erloschen alle 3 fast spurlos; aber um $9^u$ $30^m$ gewahrte ich zwischen Cygnus, Cassiopea und Pegasus 5 helle, gegen den Horizont um 30° schräg geneigte lange Lichtwolken von weisser nebelartiger Farbe, welche sich langsam von N.—S. bewegten. In derselben Minute erglänzte an der Stelle von Nr. 1, Nr. 2 und Nr. 3 ein langer weisser Strahl, an dessen oberm verwaschenen Ende die 5 kleinern Wolken, zu denen noch mehrere Flecken hinzugekommen waren, sich anschliessen zu wollen schienen.

Um $9^u$ $45^m$ bemerkte ich eine neue auffallende Erscheinung. Bisher war die Nordlichtmaterie von N.—S. fortgeschritten; jetzt entstand ein wenig rechts unter $\alpha$ Persei (der hoch im SW. dem Zenith nahe war) ein weisses Wölkchen, welches sich von SO.—NW. bewegte und bei $\nu$ Andromedae erlosch. Diesen Weg beschrieb es in 5 Minuten. Ein anderer weisser Fleck bei $\beta$ und $\vartheta$ Aurigae rückte von O.—W. Nachdem der vorhin genannte südliche

Strahl um $9^h$ $45^m$ abermals erloschen war, entwickelte sich i SW. schnell eine neue $\frac{1}{4}^\circ$ breite, $60^\circ$ lange vollkommen geradlinig Säule, $40^\circ-45^\circ$ gegen den Horizont geneigt, intensiv weiss, lel haft an den Schweif des grossen Cometen von 1843 erinnern Die durch sein Licht hindurch schimmernden Sterne wurden mer lich geschwächt, d. h. sie machten weniger Effect, weil sie a weissem Hintergrunde standen. Für $9^h$ $45^m$ ist der Ort des Strah gegeben durch die Oerter der Sterne $\pi$ $\gamma$ Aquarii, d Pegasi u $\beta$ Andromedae; in der scheinbaren Höhe von $\gamma$ Andromedae l sein Ende.

Während dieser Phänomene im SW. hatte die Helligkeit i N. nicht aufgehört; zuweilen schossen dort noch einzelne Strahle empor. Um $10^h$ erlosch Alles, nur ein gelbes Dämmerlicht blie im Norden übrig. Der Wind kam aus W. und SW. Es blitz 15mal. Sternschnuppen zu der Zeit etwa 12 in 2 Stunden. Ten peratur $=0^\circ$.

December 4. Zwischen $7^h$ und $11^h$ zeigten sich wied deutliche Spuren des Polarlichtes. Um $10^h$ bildete sich das Ne belsegment, doch blieb es dabei. Mit dem 5. December ward di Atmosphäre stürmisch und trübe; Abends $10^h-11^h$ fiel eine u gewöhnliche Menge Schnee. Bei $0^\circ$ Temp. wuchs der Wind zu Sturme an.

December 14. An diesem Abende sah man ungeachtet de hellen Mondscheines die deutlichen Strahlen des Nordlichtes Gewölk verhinderte genaue Beobachtungen; Temp. $=-5^\circ$ R.

## 1846.

Februar 18. (Bonn.) Zwischen $10^h$ und $13^h$ stand im Norde der schwache gelblich weisse Bogen eines strahlenlosen Nordlichtes magnetische Störung zu Genf.

Februar 25. Grosses Nordlicht zu Genf beobachtet; magne tische Störung.

März 14. Nordlicht zu Genf; magnetische Störung am 13 und 14. März.

August 28. (Bonn.) Das Nordlicht dieser Nacht, dessen magnetische Störungen für Genf an dem folgenden Tage sich stärke äusserten, als am 28sten, hat merkwürdige Phänomene gezeigt Der Himmel war vollkommen heiter. Bald nach dem Ende de Dämmerung lagerte im Norden eine schmale dunkle Wolkenbank die bald die regelmässige Form eines Kreissegments annahm. De

höchste Punkt dieses Bogens lag fast im astronomischen Norden, vielleicht ein Weniges westlich. Er spaltete sich später in 2 nahe concentrische Bögen, doch so, dass sie östlich zusammenbiugen. Um 10ᵘ erschien bei ψ Ursae ein 5°—7° hoher sehr matter grüner Strahl, der bald verschwand, worauf nur eine allgemeine gelbliche Helligkeit übrig blieb. Ich fand im magnetischen Observatorium die Nadel sehr unruhig; dies war zwischen 14 und 16 Uhr, also zwischen 2 und 4 Uhr früh am 29. August. Die Anfangs erwähnte Wolkenbank im Norden stieg langsam in Form eines dunklen schmalen und kreissegmentartigen Gürtels höher, und unterhalb von ihm gegen den Horizont ward die Luft wieder klar, so dass daselbst Sterne gesehen werden konnten. Gegen 16¼ Uhr beleuchtete die Morgendämmerung diesen ursprünglichen Nordlichtbogen röthlich, und deutlich erkannte ich jetzt seine cirrusartige Natur. Um 21 Uhr (also um 9 Uhr früh) hatte der Bogen 50° Höhe über dem Horizonte; es war ein wirklicher bogenförmiger Cirrusstreifen, in dem sich um 21ᵘ 30ᵐ die einzelnen Theile zu horizontal über einander gelagerten Wölkchen bildeten, so dass jede Gruppe des Bogens, für sich betrachtet, gewissermassen die äusseren Enden der Speichen an der Peripherie eines Rades bezeichnete.

Um 22ᵘ oder 10ᵘ früh war der Bogen völlig zu einem gewöhnlichen Cirrusstreifen umgewandelt; er sank gegen Norden zurück bis 30° Höhe. Der Himmel blieb wolkenlos.

S e p t e m b e r 22. (B o n n.) Nach Sonnenuntergang senkte sich das Gewölk gegen Norden und bildete daselbst von NO.—NW. eine lange dunkle, oben scharf begränzte Bank. Um 8 Uhr bemerkte ich den gelben Nordlichtschein unter Ursa major. Durch Unwohlsein verhindert, achtete ich nicht weiter darauf, aber um 9¼ Uhr meldete mir A r g e l a n d e r die völlige Ausbildung des strahlenwerfenden Nordlichtes. Am nächsten Morgen standen viele cumulusartige Wolken gedrängt am Himmel, doch wurde es bald heiter. Der Magnet war am 23. früh sehr unruhig; magnetische Störung in G e n f.

N o v e m b e r 11. (B o n n.) Um 8 Uhr zogen Nebelwolken langsam gegen Norden und lagerten sich dort Anfangs in Form einer dunklen Bank, dann in Form eines grossen regelmässigen Kreissegmentes, aus welchem sich bald eine merkliche und dauernde Helligkeit entwickelte, die bis 15° Höhe aufstieg und entschieden einem Nordlichte angehörte. Zwischen 10ᵘ und 11ᵘ war diese Helligkeit am stärksten, doch übertraf sie nicht die hellsten Stellen der Milchstrasse. Die Nacht blieb bei starkem Froste klar. In den Genfer Beobachtungen zeigt sich keine merkliche Störung.

November 13. Während der Sternschnuppenbeobachtungen in dieser Nacht zeigte sich gegen 8ᵘ, etwas westlich vom wahren Nord, die deutliche Helligkeit eines Nordlichtes, die zufällig genau die Form eines 60° gegen den Horizont geneigten Zodiakallichtes annahm, und bis 14 Uhr mannigfaltigen Veränderungen unterworfen war. Am nächsten Morgen war der Himmel bedeckt; starker Reif; Magnet sehr unruhig. In Genf bemerkte man keine magnetische Störung.

November 17. Das glänzende und höchst merkwürdige Nordlicht dieser Nacht habe ich zu Bonn sehr vollständig beobachtet, doch kann ich ohne Zeichnungen nicht Alles erklären. Ich werde mich daher auf einen Auszug beschränken. Den ersten Anfang des Phänomenes habe ich nicht gesehen, doch kann es nur wenige Minuten vor $6^u\ 5^m$ eingetreten sein, da ich noch um $5^u\ 50^m$ gegen Norden beobachtete. Ich richtete meine Aufmerksamkeit namentlich auf die Eigenthümlichkeiten des meist doppelten Lichtsaumes und auf die beiläufige Bestimmung von dem Azimuthe des höchsten Punktes dieses Saumes, weil es von Interesse ist, etwaige vollständige magnetische Beobachtungen mit den azimuthalen Verschiebungen des Nordlichtes zu vergleichen, um zu sehen, ob der Gang der magnetischen Variation mit der des Lichtes am Himmel im Zusammenhange stehe.

Von den sehr raschen Veränderungen nenne ich nur die folgenden:

$6^u\ 5^m$ Ein gebogener weisser Strahl verschwindet gleich nach seinem Aufleuchten fast plötzlich; 4 daneben sind weiss und gelblich.

6 10,5 Neue Strahlen gleichzeitig aufgestiegen, und mit einer sehr schnellen Bewegung von O.—W. verschwinden sehr rasch.

6 12,8 Strahlen von verschiedener Intensität gleichzeitig aufsteigend und schnell erlöschend.

6 14 Die ganze Nordlichtmaterie wird auf kurze Zeit roth, dann wieder gelb und bleibt so. Der äusserst regelmässige und intensiv gelbe Lichtsaum, von 90° Spannweite im Horizonte, begränzt nach oben das dunkle Nebelkreissegment.

6 21,5 Scheitel des Lichtsaumes senkrecht unter $\gamma$ Ursae; inzwischen steigen verschiedene weisse Strahlen auf.

6 28,2 Beide Enden des Lichtsaums zeigen Anschwellungen von stärkerem Lichte.

Hierauf bildet sich über dem Lichtsaum eine bogenförmige Reihe von gelben, langgezogenen Lichtwolken, die in ihrer Ge-

sammtheit, und unter sich verbunden gedacht, nach oben in 1°—2° Abstand den gewöhnlichen Saum des Nebelsegmentes concentrisch überwölben. Um 6ᵘ 38ᵐ besteht dieser obere Bogen, den ich *B* nennen werde, aus 4 hellen Fragmenten. Der gewöhnliche, untere Lichtsaum heisse *A*.

6ᵘ 38ᵐ,5 Der Scheitel von *A* senkrecht unter ε δ Ursae. Die Spannweite von *B* im Horizonte mag 115° betragen.

6 42,5 Die Lichtwolken in *B* haben sich vereinigt und bilden jetzt einen mit *A* völlig concentrischen regelmässigen Bogen.

6 43 *B* berührt χ Ursae. Bei ι κ Ursae eine Lichtwolke.

6 46,5 *B* zerfällt wieder in 3 lange Lichtwolken.

6 48,7 Unter β Ursae eine neue Lichtwolke.

6 49,7 Scheitel von *A* unter ζ Ursae.

6 52,5 *B* wieder zusammenhängend, aber unregelmässig.

6 53,5 Scheitel von *A* senkrecht unter η Ursae.

6 55 *B* besteht wieder aus 3 getrennten Wolken.

7 0,8 Von *B* ist nur noch eine Lichtwolke unter δ ε Ursae übrig.

7 3 *A* verstärkt östlich und westlich sein Licht.

7 4 Neue Lichtwolke unter γ β Ursae; *B* wiederhergestellt 7ᵘ 6ᵐ.

7 8,5 *B* berührt η γ β Ursae.

7 9,5 *A* zeigt senkrecht unter η Ursae einen Einschnitt.

7 10,2 *B* bildet jetzt einen 110° umspannenden glänzenden, wellenförmig gewundenen Gürtel.

7 11,7 *A* zeigt an seinen Enden wieder Anschwellungen stärkeren Lichtes.

7 12,7 *B* und *A* unter δ γ Bootis sehr glänzend.

7 14,5 Scheitel von *A* senkrecht unter ε Ursae.

7 16,0 Scheitel von *A* senkrecht unter φ Ursae.

7 16,5 Augenblickliches helles Erglühen des Ostendes von *B*.

7 17 *B* erstreckt sich in unregelmässiger Krümmung von η Ursae bis α β Geminorum.

7 19,1 *B* zerfällt wieder in 3 getrennte lange Wolken.

7 28,3 Scheitel von *A* unter α Bootis. (?)

7 29,1 *B* fast plötzlich verschwunden.

7 32,5 *A* reicht von η Herculis bis unter υ Ursae.

7 33,5 Von *B* keine Spur mehr.

7 37,7 Eine Lichtwolke um β Geminorum augenblicklich entstanden,

7 38,0 verschwindet plötzlich.

7 38ᵘ,8ᵐ Neue Lichtwolken bei β Herculis und ι Ursae plötzlich entstanden.

7 39,8 Die letztere erglüht rasch im grünen Lichte, und überstrahlt alles Uebrige; nach 15 Secunden verschwindet sie momentan. Inzwischen haben sich Theile von *B* wieder ausgebildet.

7 42,3 Neue Lichtwolken bei μ und β Bootis.

7 43,6 Desgleichen bei ι κ Ursae; augenblickliches Auflodern der ganzen Lichtmaterie.

7 44,3 Ebenvorher verschwunden hat sich *B* fast plötzlich in seiner frühern Ausdehnung, aber mit dunklen Lücken, wiederhergestellt.

7 45,2—46,5 Heller Strahl aus *B* aufsteigend.

7 46,5 Glänzende Lichtwolke bei α Ophiuchi.

7 48,5 Heller Strahl aus *B*, glänzender als *B* selbst.

7 50,5 *B* verschwindet, *A* höchst regelmässig, Scheitel 2° westlich vom Fusspunkte eines aus η Ursae auf *A* gefällten Perpendikels.

7 51,5 Grüne Wolke vor α Ophiuchi;

7 52,4 verschwindet schnell.

7 54,0 *A* sehr hell und regelmässig, Scheitel senkrecht unter η Ursae.

7 57,8 Lichtwolke zwischen α Herculis und α Ophiuchi.

8 1,3 Scheitel von *A* am Orte von γ Bootis, *B* verschwunden.

8 21 Ostende von *A* unter ψ Ursae, Westende unter ε Herculis.

Von nun an zeigte sich von *B* keine Spur mehr; die azimuthale Ausdehnung von *A* blieb lange constant. Der Lichtsaum *A* verflacht sich dann mehr und mehr gegen Osten, wölbt sich stärker im Westen; er sinkt langsam gegen den Horizont, und um 9ᵘ 35ᵐ ist Alles verschwunden.

Das Nebelsegment war bestimmt dunkler als der Himmelsgrund; durch den Contrast kann man nicht Alles erklären. Im Lichtsaum *A* bleiben (im Cometensucher) die Sterne gut sichtbar, selbst noch in dem oberen Theile des Nebelsegmentes. Die Bewegung der gewöhnlichen Strahlen war entschieden von Ost nach West gerichtet, dabei meist ungewöhnlich schnell, mitunter wie momentan verzögert und behindert. Das Maximum der ganzen Erscheinung fiel zwischen 7 und 8 Uhr. Bis 10½ Uhr blieb der Himmel heiter; dann kamen streifenförmige Wolken aus West, Nord und Ost. Es fror und der Wind ging stark aus Osten. Tags darauf war der Himmel mit schweren Wolken bedeckt. Kein

Reif war sichtbar; es schien Nachts ein wenig geregnet zu haben. Die Genfer magnetischen Beobachtungen zeigen nur am Morgen des 18. November eine Störung.

November 21. 17 Uhr = November 22. früh 5 Uhr ist nach der Aussage des Herrn Prof. v. Riese ein beträchtliches strahlenwerfendes und rothes Nordlicht zu Bonn sichtbar gewesen. Zu Genf keine magnetische Störung.

December 11. Zu Rolandseck und zu Bonn sah ich ungeachtet des Mondscheins zwischen 10 und 18 Uhr ein bleiches strahlenwerfendes Nordlicht.

December 13. Von 6—11 Uhr schwacher Nordlichtschimmer.

December 16. 11 Uhr, dieselbe Wahrnehmung.

December 17. Um $10^u$ zeigte sich deutlich der matte Schein des Nordlichtes. Nach Mitternacht war der nördliche Himmel sehr auffallend hell. Temperatur — 12° R.

1847.

Januar 13. (Bonn.) Zweifelhafte Spuren des Nordlichtes.

Januar 14. Viele Stunden lang in dieser heitern Nacht erschienen sehr wechselnde Gestalten der weissen Nordlichtmaterie, ohne je in die normale Phase einzutreten. Temp. — 5° R. Wind aus SO. Am nächsten Morgen fand ich im magnetischen Observatorium die Nadel sehr unruhig. Ich bemerke noch, dass es um 8¼ Uhr den Anschein hatte, als wolle sich der Lichtsaum über einer längst vorhandenen grünen Nebelbank bilden. Durch diesen eigenthümlichen Nebel sah ich die Sterne bis zu wenigen Graden Höhe über dem Horizonte. Die hellen und mannigfaltigen Gebilde übertrafen an Licht den Zodiakalschein, und machten ihn zuletzt ganz unkenntlich, wo sie ihn westlich berührten.

März 17. (Eutin.) Weisses Nordlicht. (Briefl. Mitth.)

October 14. (Bonn.) Es lagerte gegen $9^u$ fast unbeweglich eine graue sehr durchsichtige Nebelbank im Norden, die aber doch mit dem Nebelsegmente des Nordlichtes nicht wohl verglichen werden konnte; sie trübte die dortigen Sterne, und die grössern erschienen umgeben von kleinen Höfen. Gegen Mitternacht wurden die dem Pole des Himmels nahen Regionen stark phosphorisch glänzend, weiss und heller als die Milchstrasse im Schwan. Die Dauer dieser auffallenden Beleuchtung war von $11^u$ bis $13^u$. Die Nacht blieb klar; Wind O. und SO. Am Morgen des 15. October

überzogen jene merkwürdigen Cirrusgebilde den Himmel, die, ausgehend von 2 Punkten an entgegengesetzten Orten des Horizontes, die sichtbare Haemisphäre als grösste Kreise umspannen. Der eine Ausgangspunkt lag WNW., noch viele Grade westlich vom magnetischen Meridiane.

November 2. Um $7^u$ zeigt sich das Segment eines Nordlichts mit schwach entwickeltem Lichtsaume. Es wechselte oft in seiner nur geringen Intensität, ohne sich auszubilden. Aber schon in Aachen, 9 Meilen NW. von Bonn, wurde von Heis ein grosses und schönes Nordlicht beobachtet. (Briefl. Mitth.)

November 19. Ungeachtet des hellen Mondscheines sah ich die tiefe Röthe des Nordlichts, die in wolkenartigen von O.—W. bewegten Massen häufig ihre Intensität veränderte. Es hatte oft den Anschein, als stiegen rothe Dampfmassen büschelförmig aus den Nebeln des Horizonts, doch kamen die gewöhnlichen Strahlen nicht zum Vorschein. Temp. —$2^0$ R. Am nächsten Morgen war der Himmel noch heiter; im Norden lag eine Wolkenbank, und hoch darüber ein Bogen der feinsten Cirri.

December 8. Zwischen $6^u$ und $7^u$ zeigten sich die unverkennbaren Anzeichen des Nordlichtes; durch andere Beobachtungen war ich verhindert, seine Entwickelung zu verfolgen. Argelander hat zwischen $10^u$ und $11^u$ die Entstehung des Lichtsaumes gesehen, und 2 Azimuthe seines Scheitels bestimmt.

December 10. Schwache aber bestimmte Spuren des Nordlichtes.

December 17. Unter allen Nordlichtern, die ich gesehen habe, war dies eins der grössten und prachtvollsten; wie weit sich seine Sichtbarkeit erstreckte, ist mir nicht bekannt geworden, und ich kann nur angeben, dass es auch zu Eutin in Holstein im grössten Glanze sich zeigte. Der Himmel war in dieser Nacht bei starkem Mondschein Anfangs sehr heiter. Um $5\frac{1}{2}^u$ gewahrte ich (Sternwarte zu Bonn) gegen Norden die graue, charakteristische, noch ziemlich formlose Nebelmasse, und gleich darauf entwickelte sich der grosse hellgelbe Lichtsaum, der im Nordpunkte des Himmels beginnend, bis fast gegen Westen nahe $90^0$ im Horizont umspannte; sein Scheitel lag noch $5^0$ unter $\eta$ Ursae. Um die Lage des Scheitels vom Lichtsaume gegen die Lage des magnetischen Meridians zu ermitteln (die sich leicht berechnen lässt), machte ich zunächst folgende Beobachtungen.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Um 5^h 40^m | Scheitel | des Lichtsaums | senkrecht | | unter | $\eta$ | Ursae. |
| 5 46 | „ | „ | „ | „ | „ | $\zeta$ | „ |
| 5 49 | „ | „ | „ | „ | „ | $\eta$ | „ |
| 5 50 | „ | „ | „ | (3° westlich) | „ | $\eta$ | „ |
| 5 51 | „ | „ | „ | (7° westlich) | „ | $\eta$ | „ |
| 5 53 | „ | „ | „ | „ | „ | $\sigma$ | Herculis. |

Um 5^h 59^m zeigte sich der erste rothe Strahl westlich, und zugleich bekam der Lichtsaum an seiner obern Krümmung 3 Einbiegungen, so dass zugleich der östliche Theil am meisten aufragte. Der Scheitel dieses Theiles lag um

5^h 51^m senkrecht unter $\zeta$ Ursae,
5 55 „ „ $\eta$ „

Um 6^h 1^m bildete sich im Lichtsaume senkrecht unter $\eta$ Ursae eine horizontale dunkle Spalte; es hatte bald den Anschein, als schöbe sich der helle östliche Theil des Saumes über den lichtschwächern westlichen hin.

Um 6^h 13^m erschien der zweite Strahl, er war weiss und zog über $\zeta$ und $\eta$ Draconis; um 6^h 15^m der dritte von $\eta$ Ursae bis $\gamma$ Ursae minoris. In 14 Minuten hatte sich der Bogen in 2 übereinanderliegende concentrische Lichtsäume gespalten; dies ist das drittemal dass ich die merkwürdige Erscheinung sah, von der ich nie eine Beschreibung gelesen habe.

Ich merkte nun, wie beide Säume von Osten her gewissermaassen erzeugt würden, oder vielleicht richtiger, stets neuen Zuwachs an leuchtender Materie erhielten, und allemal, wenn sich eine neue wellenförmige Einbucht gebildet hatte, merkwürdige Bewegungen hatten, so dass es schien, als rücke der östliche Theil des höhern Saums gegen den tiefern, über diesen theilweis sich hinschiebend. Der östliche Fuss des grösseren Saumes lehnte sich gegen eine Wolkenbank. Nachdem ich die Umwandlungen der Lichtbogen, das Aufsteigen matter, in der Mitte weiss, westlich roth gefärbter Strahlen noch eine Weile beobachtet hatte, ging ich in das magnetische Observatorium; es war 6^h 40^m. Bei dem ersten Blicke durch das Fernrohr des Gaussischen Apparates sah ich den Magneten sehr grosse (10 Centim.) Oscillationen beschreiben, und gleich darauf verliess er in heftiger Bewegung das Gesichtsfeld gänzlich, um hernach auf der andern Seite wieder zu verschwinden. Mit Mühe konnte die Bewegung beruhigt werden; ich vermuthete sogleich, dass das Nordlicht zugenommen haben müsse. Hinaustretend ins Freie, sah ich den ganzen Nord-

himmel im glänzendsten Roth erglühen; ganz westlich, im Cygnus und Aquila standen 5, 20° hohe bluthrothe schräge Säulen, im Nordosten 5 andere, senkrechte. Der ganze Raum zwischen den erwähnten westlichen und östlichen Säulen war dampfähnlich, gescheckt, und stückweis wie durch glühende Nebel schimmerten die weissen Fragmente des Lichtsaumes hindurch, dessen Scheitel die Höhe von ζ Ursae (aber nicht dessen Azimuth) erreichte. Die Röthe selbst reichte bis zum Zenith. Jetzt kehrte ich zum magnetischen Apparate zurück; der Magnet war nicht zu beruhigen; erst um $6^h$ $47^m$ konnte die erste rohe Beobachtung versucht werden. Bis $6^h$ $59^m$ als der Magnet wieder das Gesichtsfeld verliess (er beschrieb 16 Centim.) hatte sich das Nordlicht nicht besonders verändert.*) Um $7^h$ $8^m$,5 bilden sich zahlreiche weisse Strahlen; einer von ihnen war krumm.

$7^h$ $15^m$ Nordlicht plötzlich sehr schwach.
7 25 Es bildet sich ein ganz neuer Lichtsaum.
7 29 Eine schwache Röthe tritt wieder hervor.
7 33 Westlich schwache weisse Streifen.
7 35 Alles verschwunden, kleines Gewölk im NW.
7 42,5 Die Röthe zeigt sich wieder im Drachen.
7 52 Viel kleine zerstreute graue Wölkchen mit seitlichem rothen Schimmer.
7 57 Wieder eine schwache Röthe sichtbar.
8 0 Die Röthe verschwindet; im Norden bleibt nebst den kleinen Wölkchen eine allgemeine Helligkeit.

Jetzt war das eigentliche Nordlicht zu Ende; jedoch in der Erinnerung an frühere Beobachtungen in Holstein, bei denen ich mit Verwunderung das Entstehen buntgefärbter Cirruswolken aus dem Nordlichte beobachtet hatte, beschloss ich, einen Theil der Nacht den weitern Verlauf der Erscheinung zu verfolgen.

Um $10^h$ stand von N. bis NO. eine 3°—4° hohe graue, oben scharf begränzte Bank, in der keine Sterne sichtbar waren, und deren wolkenartige Natur ausser Zweifel stand. Bald darauf strahlte unter Ursa streifenartig wieder ein rothes Licht aus, und nun begannen die wunderbaren Cirrusbildungen, die plötzlich am sternenhellen Himmel entstanden, ohne dass man sagen konnte, von woher sie gezogen kamen. Ein sturmähnlicher Wind ging aus SO. Die Cirri zogen von SW.—NO. und nahmen mehr und mehr

*) Vergl. die magnetischen Beobachtungen am Schlusse dieses Aufsatzes.

überhand. Sie schienen sich im Zenith zu bilden. Kurz vor 11ᵘ entstand im NO. ein dampfförmiges Gebilde, welches phosphorisch leuchtend abwechselnd verschwand und wieder erschien, und seinen Ort nicht veränderte. Bald war ein grosser Theil des Himmels mit federartigem Stratus überzogen, der im Nordhorizonte radial auslief, und im Zenith mit flammenartigen Aesten endete. Dieser Stratus verschwand sehr rasch, und unmittelbar darauf nahm zusehends der Cirrostratus so überhand, dass bald der ganze Himmel bedeckt wurde. Um $11\frac{1}{4}^u$ hatte sich das Gewölk zu cumulusförmigen Massen ausgebildet, die aus SW. zogen. Um Mitternacht gewahrte ich einen nordöstlich aufsteigenden, 30° geneigten balkenförmigen Streifen, höchst intensiv durch die Wolken und deren Lücken durchscheinend, phosphorisch grüngelb, der, Höhe und Azimuth merklich ändernd, um $13^u$ wegen zunehmender Trübung des Himmels verschwand. Er bewegte sich mit den Sternen gegen die Richtung der Cumuli. Jener Streif war weder eine Wolke, noch ein gewöhnlicher Nordlichtstrahl; er gehört in die Klasse der noch unerklärten sehr seltenen Erscheinungen, eben so wie die vom 3. Dec. 1845. Temp. um $8^u,5$ Ab. $= +0°,2$ R. Der folgende Tag (Dec. 18.) sehr heiter. Temp. um $9^u$ früh $-2°$ R. Mittags befand sich der Magnet noch in grosser Unruhe.

Zu Eutin ward das Nordlicht am 17., 18., 19. und 20. December gesehen.

December 20. Als sich zwischen $5^u$ und $6^u$ Abends gegen Norden die Cirruswolken zertheilten, gewahrte ich alsbald ungeachtet des Vollmondscheines verschiedene bleiche Strahlen, welche sich rasch von O.—W. bewegten. Um $6^u$ entstand eine recht intensive Röthe, und über den tiefstehenden, vom Monde beleuchteten Wolken im Norden das grüngelbe Licht des Saumes. Nach meiner Beobachtung Mittags, und der des Herrn Prof. v. Riese Abends, machte der Magnet ausserordentliche Schwingungen. Selbst an diesem Morgen vor Sonnenaufgang sah Herr v. Riese noch die Röthe des Nordlichts.

## 1848.

Januar 28. (Bonn.) Bei sehr heiterm Himmel sah ich nach Mitternacht, als der abnehmende Mond bereits aufgegangen war, ein ausgezeichnet schönes Nordlicht, welches indessen dem vom 17. Dec. nicht gleich kam. Schon zwischen $6^u$ und $7^u$ Abends merkte ich die Spuren des Polarlichts zwischen den Dunstmassen im Norden; eine allgemeine, mitunter schwach gestreifte Helligkeit erhielt sich fast unverändert bis $13^u$. Um $13^u 36^m$ entwickelte sich

gleichzeitig im Taurus und in der Cassiopea die bekannte Röthe. Das graue Nebelsegment im Norden umspannte 60° im Horizont, und war im Scheitel gegen 2½° hoch, sehr dunkel, und verlor sich nach oben mit einem grünlich gelben, sehr verwaschenen Lichtsaume in den Himmelsgrund, ähnlich der Morgendämmerung. Jetzt begann das Strahlenwerfen. Die Lichtsäulen entstanden auf dem Rande der stark gezackten dunklen Nebelbank; aber Dec. 17. setzten sie abwärts durch bis auf den Horizont, und erschienen im Bezirke des Segmentes wie durch einen Schleier gesehen. (Diese Anmerkung findet sich nicht in meinem Manuscripte über das Nordlicht des 17. Dec.; wohl aber in dem über die Erscheinung des 28. Januar 1848, bei welcher ich mich dieser seltenen Beobachtung vom 17. Dec. erinnert haben muss.) Unten waren die Lichtsäulen grünlich weiss, sie wurden aber schön roth, wie sie bis zur Höhe der Sterne im Perseus und in der Cassiopea emporstiegen. Die weitverbreitete Gluthfarbe lag im Maximo 25° hoch, im Westen und NNW. senkte sie sich bis zum Horizonte herab. Die sehr häufigen Strahlen erreichten kaum 25° Höhe, nur ein östlicher Strahl stieg bis 40°. In der gesammten Lichtmasse war nur die eine Tendenz der Bewegung von Westen nach Osten, nicht wie ich wenigstens es immer gesehen habe, von Osten nach Westen; selbst der Lichtsaum hatte diese Bewegung mit den Strahlen und mit dem rothen Gewölke. Um 14ᵘ überschritt das Ostende des Nordlichts den astronomischen Nordpunkt des Horizontes mit einem höchst prachtvollen roth und weissen Lichtstreifen. Um 14ᵘ 15ᵐ sah ich die letzte Röthe verschwinden. Der Wind stand heftig aus Osten; Temp. —5°,2 R.

Februar 21. Schon am Tage verrieth sich das Nordlicht durch starke Schwingungen des Magneten. Der Himmel war sehr bedeckt, und wo auch die dichten Wolken fehlten, zeigte sich ein trüber grauer Dunst. Um 7ᵘ sah man nur einzelne der hellen Sterne, zugleich aber den ausserordentlichen Gluthschein des Polarlichtes. Im Norden waren die Wolken cumulusartig, ganz dunkel, und auf dem feuerfarbigen Hintergrunde scharf hervorgehoben. Das rothe Licht schien zuweilen das Gewölk nicht bloss seitlich zu erleuchten oder durch die Dünste in den Zwischenräumen durchzuschimmern, sondern das Innere aller Gewölkmassen vollständig zu durchdringen, als seien diese selbstleuchtend. Als tiefer gegen den Horizont ein Riss in den Wolken entstand, gewahrte ich das höchst intensive Grüngelb des Lichtsaumes. Um 7ᵘ 20ᵐ war die azimuthale Dimension des Nordlichts gegen 100° (α Andromedae — η Ursae); 15ᵐ früher stieg die Röthe bis 10° Abstand vom Zenith gegen Norden. Erst um 7ᵘ 27ᵐ durchbrach

ein herrlicher, roth und weisser Strahl das dichte Dunstgewölk; er blieb lange sichtbar, erhob sich bis 50° und bewegte sich bestimmt von O.—W. Kurz vor 8ᵘ lag das Centrum des Polarlichtes 10° Nord zu Ost. Temperatur = + 2°,4 R. Die Intensität dieses Nordlichtes war so gross, dass ungeachtet des fast völlig bedeckten Himmels die benachbarten Gebäude wie von der Morgendämmerung beleuchtet erschienen und dass ich grossen Titeldruck lesen konnte. Am Mittage des 22. Februar hatte sich der Magnet bereits beruhigt. Auch zu Genf hat man das Nordlicht beobachtet.

März 7. Die ungewöhnliche Helligkeit in einer Wolkenspalte liess mich ein Nordlicht vermuthen.

März 19. Ein sehr ausgebreitetes Nordlicht gewahrte ich, während ich in dieser Nacht mit der Beobachtung einer totalen Mondfinsterniss beschäftigt war. Im Norden lag (bei sonst nebligem, zum Theil halb heiterem Himmel) eine 5° hohe schwarze Wolkenbank. Um 8¼ Uhr entwickelte sich gelbrothes Licht und schwaches Strahlenwerfen. Ein Strahl wenigstens hatte eine Bewegung von W.—O. Ich habe die Erscheinung nur wenig beobachtet.

October 19. Ein grosser Nordlichtstrahl war ungeachtet der dicken Nebel sichtbar. Er war 35° hoch und leuchtete einige Minuten. Bewegung O.—W.

October 22. Ein zwar kleines, aber sehr schönes Nordlicht, auf welches ich erst durch Argelander aufmerksam gemacht wurde. Um 11ᵘ sammelten sich im NW. lange graue Nebelstreifen, die eine sehr dunkle Wolkenbank von 5° Höhe bildeten. Um 11¼ᵘ leuchtete plötzlich das Roth auf. Dann stiegen aus carminrothen Lichtmassen sechs weisse Säulen empor, die, sehr schnell erlöschend, sich von O.—W. bewegten. Ihre Höhe ging nicht über 15°. Das Strahlenwerfen war bald vorüber. Ende der Erscheinung gegen 13ᵘ.

October 23. Abermals bei zum grössten Theile sehr heiterem Himmel erschien zu Bonn (und zu Aachen) ein schönes Nordlicht, welches in seiner langen Dauer 4 bis 5 Mal seine Intensität sehr veränderte. Gleich am Ende der Dämmerung ward es sichtbar. Zwischen Nebelstreifen (ganz wie Oct. 22.) im Norden, die sich mehr und mehr zu einer schwarzen Wolkenbank zusammenzogen, erschien die gelbliche Helligkeit, allmälig sich verstärkend, bis um 8ᵘ 32ᵐ die ersten weissen Strahlen mit rothen Spitzen aufstiegen. Die Bewegung dieser war langsam von O.—W., wenngleich es schien, dass ein oder zwei Mal das Gegentheil vorkam.

Um $9^u$ verwandelte sich die gelbliche Helle in Carminroth, trat aber bald in das frühere Stadium zurück. Um $11\frac{1}{4}^u$ strahlte das Nordlicht in bedeutenden Dimensionen wieder auf, anfangs mit vielem Roth, dann grünlichweiss und gelb. Um $15^u$ (3 Uhr früh) war Alles erloschen. Der Himmel bedeckte sich mit Nebeldünsten. Am andern Morgen zeigte der zum Theil klare Himmel viele Cirri. Mittags ganz trübe.

October 24. Um $11^u$ deutete die Helligkeit zwischen Wolken im Norden wieder auf das Polarlicht.

October 25. Fast die ganze Nacht hindurch war der Nordhimmel merklich erleuchtet.

October 26. Von Abends $6^u$ bis Nachts $14^u$ sah ich die Spuren des Nordlichts; um $10^u\ 5^m$ schwaches Strahlenwerfen im Hercules.

October 28. An diesem Tage Mittags zeigten sich ganz ausserordentliche Erscheinungen an den Wolken in der Nähe der Sonne, die ich bei einer anderen Gelegenheit umständlich zu beschreiben für nützlich halte. Abends zwischen $8^u$ und $13^u$ lag wieder eine bedeutende Helligkeit im Norden, welche sehr oft ihr Azimuth veränderte. Es kam nicht zum Strahlenwerfen, wohl aber ein paar Male zum schwachen Erglühen, zur Entwickelung der Röthe. Nach Mitternacht lag das Centrum des Lichtes Nord zu Ost um $\nu$ und $\xi$ Ursae.

October 30. Sehr brillante Fragmente des Nordlichtes glänzten in Zwischenräumen von Wolken, die vor $13^u$ geregnet hatten; das orangefarbige Licht war so hell, dass ich grosse Schrift darin lesen konnte und dass ich im Zimmer die Schatten der Fenstersprossen sah. Die Erscheinung musste sehr ausgedehnt sein. Dem Anblicke nach lag der Sitz des Lichtes bestimmt über den Wolken. Um $13^u$ war das Centrum des Lichtes etwa $7^{\circ}$ Nord zu Ost. Temp. $+ 9^{\circ},6$ R.

November 19. Der bewölkte Himmel verhinderte es, die Einzelheiten des rothen, gewiss ansehnlichen Nordlichtes zu beobachten. Auch in Genf war es sichtbar.

November 21. Zwischen $7^u$ und $11^u$ war die Helligkeit des Nordlichts ungeachtet des sehr bedeckten Himmels deutlich bemerkbar. Gegen $11^u$ klärte sich die Luft von Süden her, und alles Gewölk lagerte sich nördlich in Gestalt einer langen dunkeln Bank, die zu dem gelbrothen, nicht strahlenwerfenden Scheine des Nordlichts einen sehr auffallenden Contrast bildete. Gegen $14^u$ nahm

die Intensität so zu, dass ich in meinem Zimmer deutlich die Schatten der Fenstersprossen erkennen konnte.

November 22. Abermals unverkennbare Spuren des Nordlichts.

1849.

Februar 22. (Bonn.) Während eines grossen Unwetters und Sturmes sah man an vielen Orten der Rheinprovinz ein helles rothes Nordlicht, auch bei Cöln das St. Elmsfeuer. Erst um 11ᵘ Abends bemerkte ich die Gluthröthe im Norden. Februar 23. und 24. waren Nachts die Zwischenräume der Wolken im Norden sehr erhellt.

Februar 25. Nach 12ᵘ war der Himmel bei grosser Klarheit so hell wie eine Juninacht unter dem 54sten Grade der Breite.

Februar 27. Ein schönes Nordlicht, dessen Anfang ich nicht bemerkte, sah ich erst gegen $7\frac{1}{2}^u$, als bereits rothe Strahlen sich durch das Sternbild des Drachen ausgebreitet hatten. Eine gewöhnliche, 7°—8° hohe, mehrfach unterbrochene Wolkenbank lag im Norden; sie verdeckte das Nebelsegment, und nur in einzelnen Stücken blickte das grüngelbe Licht des Saumes hindurch. Jene Wolkenbank bildete also einen zerrissenen Vorhang, hinter welchem das Licht emporstieg. Die Strahlen waren unten weiss, oben roth; oft erschienen acht zugleich, oben sich in die allgemeine Röthe verlierend. Gegen $8^u$ verschwand Alles. Die Gesammtbewegung, namentlich die der Strahlen, ging von O.—W. Die grösste Höhe erreichte um $7^u\ 40^m$ ein rother Strahl, der bis $\beta$ Cassiopeae aufschoss.

September 27. Es zeigen sich mitunter Lufterscheinungen, die den Beobachter in Zweifel darüber lassen, zu welcher Klasse er dieselben zu rechnen habe. Diese Nacht gab dafür folgendes Beispiel. Zwischen $8^u$ und $11^u$ lag von SO. bis NW. ein matter Bogen am Himmel, der in seinem Scheitel kaum die Elevation von $\varepsilon$ Perseï erreichte ($8\frac{3}{4}^u$). Anfangs hatte er zwischen $\chi$ und $o$ Ursae die grösste Intensität, war weissgelb und glich ganz einem von dem Monde beleuchteten Nebelstreifen. In seinen höchsten Theilen war er sehr matt, nahm aber gegen SO. im Cetus wieder an Helligkeit zu. Nebelstreifen pflegen nicht 3 Stunden lang nahe am selben Orte zu verharren, wenn sie (für den Standort des Beobachters) eine hohe Lage am Himmel haben. Aus folgenden Zahlen wird man immer noch die Neigung jenes Streifens gegen den magnetischen Meridian berechnen können, indem ich für beliebige Punkte die geraden Aufsteigungen = AR. und die Declinationen = D. bestimmte.

Um $8^h\ 50^m$ m. Z.

| AR. | D. | AR. | D. |
|---|---|---|---|
| 174° | + 49° | 90° | + 58° |
| 160 | + 55 | 80 | + 54 |
| 150 | + 59 | 70 | + 50 |
| 140 | + 60 | 60 | + 43 |
| 130 | + 61 | 50 | + 36 |
| 120 | + 61,5 | 40 | + 25 |
| 110 | + 61 | 30 | — 1 |
| 100 | + 60 | | |

Der Bogen senkte sich später gegen den Nordhorizont und löste sich in Nebelstreifen auf.

October 22. Schon um $6\frac{1}{2}^h$ sah man bei Mondschein den Anfang des Polarlichtes gerade im Norden; eine allgemeine gelbe Helligkeit wechselte mitunter die Intensität, bis sich um $7\frac{1}{2}^h$ deutlich die mit dem Lichtsaume versehene Nebelbank ausbildete; einzelne streifenförmige Wolken zogen sich von Westen her gegen diesen Punkt zusammen. Alles Licht bewegte sich von O.—W. Nachdem die Luft sich einige Male getrübt hatte, kam das Nordlicht um $9^h$ plötzlich zu voller Entwickelung. Sehr schnell schossen acht bis zehn hohe und breite Strahlen aus dem stark vom grünen Lichte erhellten Theile des Horizonts auf, dessen Region jetzt, an der Stelle des Segmentes, mit einer Menge fasriger Nebelwolken überzogen war. Die Bewegung der Strahlen war rasch von O.—W.; auch erloschen sie sehr schnell; im Drachen zogen sie durch carminroth gefärbten Dunst. Auch das gewöhnliche Gewölk ward (östlich) einige Minuten lang roth, als wenn das hinter und höher stehende Nordlicht die ganze Masse der Wolken durchdrungen und durchscheinend gemacht hätte. Um $9^h\ 20^m$ nahm die Erscheinung ab, doch bemerkte ich schwache Spuren noch nach Mitternacht. Am 23. Vormittags war der Himmel bedeckt.

October 23. Um $10^h$ verkündete der gelbrothe Schein in einer Wolkenspalte wieder ein Nordlicht.

October 24. Sehr heiterer Himmel, nur schwache Spuren des Nordlichts.

November 5. Sehr schwache Anzeichen des Nordlichts.

November 19. Allgemeine Helligkeit am nördlichen Himmel zwischen $7^h$ und $13^h$; einmal schwache Streifen. Bewegung der einzelnen Theile des Nordlichtes stets von O.—W.

## 1850.

**Juni 13.** (Bonn.) In dieser Nacht sah ich zum ersten Male ein Nordlicht im Sommer. Schon vor Mitternacht fiel es mir auf, dass der nächtliche Dämmerungsbogen so weit gegen Westen sich ausdehnte. Um $12^u$ $15^m$, als das Centrum des Dämmerungsbogens schon etwas Nord zu Ost liegen musste, stand die grösste Helligkeit nicht nur im NW. (unter Ursa major), sondern es stiegen ganz deutliche weissschimmernde Strahlen 40° hoch, bis zur Höhe von $\beta$ Ursae major empor; andere erschienen mehr nördlich von der Gegend des Auriga her. Unten verloren sich die Streifen in der Dämmerung, aber nach oben waren sie so deutlich, dass ich leicht ihre von O. — W. gerichtete Bewegung erkannte.

**September 13.** (Hamburg.) Um $8\frac{1}{2}^u$ bemerkte ich über einer gewöhnlichen Wolkenbank im Norden ein schwaches rothes Polarlicht; Strahlen erschienen nicht.

**October 1.** (Hamburg.) Grosses Nordlicht, von mir nicht beobachtet.

**October 2.** (Hamburg.) Gegen $7\frac{1}{4}^u$ sah ich im NW. ein sehr schönes und bedeutendes Nordlicht. Ueber dem grossen, sehr ausgedehnten Lichtsaume standen gelbe und grünliche Lichtsäulen, die sich bis zur scheinbaren Höhe von $\varkappa$ und $\lambda$ Draconis erhoben. Westlich hatte sich carminrothes Licht gewissermassen schichtenweise abgelagert. Die Bewegung der Nordlichtmaterie war von O. — W. gerichtet. Ich war verhindert, eine genaue und anhaltende Beobachtung anzustellen. Zwischen 11 und $12^u$ entwickelte sich das Phänomen zum zweiten Male sehr prachtvoll. Der Morgen darauf war trübe und neblicht.

**October 3.** (Hamburg.) Durch Wolkenspalten schien wieder die Helligkeit des Nordlichtes.

## 1851.

**Februar 2.** (Bonn.) Abends sind stundenlang die Spuren des Nordlichts erkennbar in weissgelblichen schlechtbegränzten Nebelmassen, die zuweilen bogenförmige Gestalten annahmen. Ueberhaupt war der Himmel bei aller Klarheit merkwürdig erhellt.

**October 2.** (Bonn.) Nach $10^u$ beobachtete ich ein rothes Nordlicht mit schönen rothen Strahlen, bei dem das Nebelsegment und der Saum fehlte.

**October 18.** (Bonn.) Zwischen $8^u$ und $9^u$ ein strahlenwerfendes Nordlicht.

1852.

Januar 19. (Bonn.) Vor Mitternacht ein schwaches strahlenloses Nordlicht.

Februar 19. (Bonn.) Von $6^u$ bis $15^u$ leuchtete ein ausserordentliches Nordlicht, welches in Hinsicht seiner Pracht und des Reichthums seiner beweglichen Gestalten von keinem der früher beobachteten übertroffen wurde. Leider war ich verhindert, der grossen Erscheinung meine Aufmerksamkeit zuzuwenden. Auch zu Eutin in Holstein hat man das Nordlicht gesehen.

März 26. (Bonn.) Zwischen $7^u$ und $8^u$ ein rothes Nordlicht ohne Strahlen.

---

## Zusatz.

### Magnetische Beobachtungen während des Nordlichtes.

Durch die Gefälligkeit des Herrn Professor von Riese, der mit unermüdlicher Ausdauer viele Jahre lang die magnetischen Beobachtungen zu Bonn geleitet hat, bin ich in den Stand gesetzt worden, jetzt noch nachträglich die während des grossen Nordlichtes am 17. December 1847 gemachten Beobachtungen berechnen zu können. Um die Bewegungen des Magneten, also die Grösse seiner Schwingungen deutlich zu machen, theile ich hier 6 Sätze mit, welche jedesmal von 12 zu 12 Zeitsecunden die westliche magnetische Declination zu Bonn angeben. Die beigesetzten Zeiten sind noch um $55^s$ zu verkleinern, um mittlere Zeit zu haben. Wegen der grossen Geschwindigkeit der Bewegung konnte von einer scharfen Ablesung nicht die Rede sein. Ich beruhigte den Magneten nur dann, wenn er das Gesichtsfeld verlassen wollte.

| Um | Decl. | Um | Decl. |
|---|---|---|---|
| $6^u$ $47^m$ $0^s$ | $=18^0$ $49'$ $26''$ | $7^u$ $9^m$ $0^s$ | $=18^0 41' 40''$ |
| 47 12 | =18 54 44 | 9 12 | =18 54 33 |
| 47 24 | =19 3 32 | 9 24 | =18 52 39 |
| 47 36 | =19 1 45 | 9 36 | =18 42 2 |
| 47 48 | =18 47 55 | 9 48 | =18 45 4 |
| 48 0 | =18 51 42 | 10 0 | =18 56 38 |
| 48 12 | =19 5 20 | 10 12 | =18 54 34 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Um 6h 55m 0s | Decl. = 18° 42′ 2″ | Um 7h 16m 0s | Decl. = 19° 2′ 55″ |
| 55 12 | = 18 36 51 | 16 12 | = 18 51 31 |
| 55 24 | = 18 36 10 | 16 24 | = 18 48 29 |
| 55 36 | = 18 41 17 | 16 36 | = 18 57 46 |
| 55 48 | = 18 41 17 | 16 48 | = 19 0 18 |
| 56 0 | = 18 34 28 | 17 0 | = 18 50 57 |
| 56 12 | = 18 33 43 | 17 12 | = 18 48 29 |
| | | | |
| 7 4 0 | = 19 7 48 | 7 21 0 | = 18 50 11 |
| 4 12 | = 18 59 51 | 21 12 | = 18 47 9 |
| 4 24 | = 19 5 32 | 21 24 | = 18 54 44 |
| 4 36 | = 19 12 44 | 21 36 | = 18 56 57 |
| 4 48 | = 19 5 9 | 21 48 | = 18 50 35 |
| 5 0 | = 18 55 29 | 22 0 | = 18 47 43 |
| 5 12 | = 19 7 22 | 22 12 | = 18 55 37 |

Die 15 Beobachtungssätze, in denen ich nach der gewöhnlichen Methode von 12 zu 12 Secunden den Stand des Magneten notirte, hat Herr Professor von Riese berechnet und daraus folgende mittlere Declinationen während des Nordlichtes gefunden. Sie gelten für die schon corrigirte mittlere Zeit zu Bonn.

Um 6h 46m 41s Decl. = 18°57′ 10″
6 54 41 „ 18 38 27 Der Magnet geht unter 18°28′; um diese Zeit vermuthlich eine Coruscation.
7 3 41 „ 19 5 6
7 8 41 „ 18 41 57 Es bilden sich an vielen Stellen neue weisse Strahlen.
7 15 41 „ 18 53 48 Nordlicht plötzlich sehr schwach.
7 20 41 „ 18 52 42
7 25 41 „ 18 51 48 Es bildet sich ein neuer Lichtsaum.
7 29 41 „ 18 47 10 Eine neue schwache Röthe.
7 33 41 „ 18 49 45 Westl. schwache weisse Streifen.
7 35 41 „ 18 49 20 Alles verschwunden, schwaches Gewölk im NW.
7 40 41 „ 18 39 56 } Neue Röthe im Drachen.
7 44 41 „ 18 46 38 }
7 53 41 „ 18 56 32 Viel zerstreutes Gewölk im röthlichen Lichte.

Um $7^u 58^m 41^s$ Decl. = 18° 50′ 26″ Noch eine schwache Röthe ist übrig.

8 1 41 „ 18 51 59 Man bemerkt nur noch eine allgemeine Helligkeit im N.

Während dieser Zeit (sofern der Magnet das Gesichtsfeld nicht verliess) waren die grössten Elongationen: um $6^u 58^m$ = 19° 37′,
„ 7 7 = 18 28.
Es ist nicht unwahrscheinlich, dass die stärksten Schwingungen nahe 2° erreicht haben.

Auch in den folgenden Tagen zeigen die Beobachtungen des Herrn Professor von Riese noch bedeutende Bewegungen des Magneten, z. B.:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| December 17. | $19^u$ | $48^m,5$ | Decl. = 18° | 53′,4 |
| | 19 | 59,9 | 18 | 54,8 |
| | 20 | 9,9 | 18 | 55,2 |
| December 18. | 0 | 48,0 | von 19° 22′ bis 18° 48′ | |
| | 0 | 54,5 | 19 | 2,6 |
| | 0 | 59,9 | 19 | 1,5 |
| | 1 | 17,5 | 19 | 4,6 |
| | 2 | 35,1 | 18 | 52,2 |
| | 2 | 39,1 | 18 | 48,6 |
| December 19. | 19 | 59,5 | 18 | 53,2 |
| | 0 | 51,3 | 19 | 12,3 |
| | 1 | 10.5 | 19 | 12,3 |
| | 2 | 41.0 | 19 | 15,2 |
| | 19 | 59,7 | 19 | 13,0 |
| | 20 | 9,7 | 19 | 15,2 |

Am Morgen des 20. December, als sich zur Zeit der Dämmerung noch der rothe Schein des Nordlichts gezeigt hatte, schwankte der Magnet zwischen 19° 18′ und 18° 21′. Gegen 3 Uhr Nachmittags ($2^u 52^m,8$) wuchs die Declination bis 19° 37′,7. Nach der Bemerkung des Herrn von Riese fällt das Maximum an diesem Nachmittage sehr nahe mit dem von Colla in Parma beobachteten zusammen. (l'Institut, 1848. Nr. 733. p. 28.)

1846. November.

Die magnetischen Beobachtungen des Herrn Professor von *Riese* ergeben folgende Zahlen für mittlere Bonner Zeit:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Nov. 13. | 8ᵘ Morg. | =19° 13′ 24″ | 1ᵘ Nachm. | 19° 20′ 3″ | |
| „ 17. | „ | 19 13 34 | „ | 19 21 2 | Ab. 6—9ᵘ Nordl. |
| „ 21. | „ | 19 19 0 | „ | 19 17 28 | |
| „ 22. | „ | 19 11 39 | „ | 19 18 58 | Morg. 3ᵘ Nordl. |
| Dec. 11. | „ | 19 13 27 | „ | 19 16 10 | |

Die mittleren täglichen Variationen der Declination in den einzelnen Dekaden zwischen Nov. 2. und Dec. 11. sind nach einer handschriftlichen Mittheilung des Herrn von Riese folgende:

Nov. 2.—Nov. 11. =6′ 44″,6.
„ 12.— „ 21. =4 3,5.
„ 21.— Dec. 1. =6 0,0.
Dec. 2.— „ 11. =2 20,2.

1850. Juni 13.

Herr Professor von Riese findet nach einer beiläufigen Berechnung seiner Beobachtungen folgende tägliche Variation zwischen der Declination Morgens 8 Uhr und Mittags 1 Uhr:

Juni 13. =16′ 19″,
„ 14. =14 47 .

# VI.

## Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herausgeber.

Wenn $OA$, $OB$, $OC$ (Taf. I. Fig. 8.) die geometrischen Darstellungen dreier sich im Gleichgewichte befindender Kräfte sind, und man zieht die Linien $AB$, $BC$, $CA$, so ist der Punkt $O$, an welchem die drei in Rede stehenden Kräfte wirken, der Schwerpunkt des Dreiecks $ABC$.

---

Wenn $OA$, $OB$, $OC$, $OD$ (Taf. I. Fig. 9.) die geometrischen Darstellungen von vier an dem Punkte $O$ wirkenden, sich im Gleichgewichte befindenden Kräften sind, und man zieht die Linien $AB$, $AC$, $AD$, $BC$, $BD$, $CD$, so ist $O$ der Schwerpunkt der Pyramide $ABCD$.

---

Wenn $D$ (Taf. I. Fig. 10.) ein beliebiger Punkt in der Seite $BC$ des Dreiecks $ABC$ ist und von demselben nach der, der Seite $BC$ gegenüberstehenden Spitze $A$ des Dreiecks die Linie $AD$ gezogen wird, so ist immer:

$$AB^2 . CD + AC^2 . BD = AD^2 . BC + BD . CD . BC.$$

# VII.

## Miscellen.

Von dem Herausgeber.

Wenn $n$ die Anzahl der Grössen $a, b, c, d, e, \ldots.$ ist, so ist offenbar:

$$\begin{aligned}
&(a-b)^2+(a-c)^2+(a-d)^2+(a-e)^2+\ldots.\\
&\qquad +(b-c)^2+(b-d)^2+(b-e)^2+\ldots.\\
&\qquad\qquad +(c-d)^2+(c-e)^2+\ldots.\\
&\qquad\qquad\qquad +(d-e)^2+\ldots.\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{u. s. w.}\\
&=(n-1)(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\ldots.)\\
&\quad -2\left\{\begin{array}{r} ab+ac+ad+ae+\ldots.\\ +bc+bd+be+\ldots.\\ +cd+ce+\ldots.\\ +de+\ldots.\\ \text{u. s. w.}\end{array}\right\},
\end{aligned}$$

also immer

$$(n-1)(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+\ldots.)\overset{=}{>}2\left\{\begin{array}{r} ab+ac+ad+ae+\ldots.\\ +bc+bd+be+\ldots.\\ +cd+ce+\ldots.\\ +de+\ldots.\\ \text{u. s. w.}\end{array}\right\},$$

wo man das obere oder untere Zeichen zu nehmen hat, jenachdem die Grössen $a, b, c, d, e, \ldots.$ sämmtlich unter einander

gleich oder nicht sämmtlich unter einander gleich sind. Es ist also z. B. immer

$$2(a^2+b^2+c^2) \geqq 2(ab+ac+bc),$$

also immer

$$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+ac+bc,$$

das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem die drei Grössen $a$, $b$, $c$ einander gleich oder nicht sämmtlich einander gleich sind.

---

Der von Euclides für den Hauptsatz der Stereometrie: „dass eine gerade Linie, welche auf zwei sich schneidenden geraden Linien in einer Ebene in dem Durchschnittspunkte dieser Linien senkrecht steht, auf der ganzen Ebene senkrecht steht“ gegebene und in die meisten Lehrbücher der Stereometrie übergegangene Beweis, hat, obgleich er auf ganz einfachen Gründen beruhet, für Anfänger doch immer einige Schwierigkeit, und auch ein anderer, auf den pythagoräischen Lehrsatz gegründeter Beweis ist von diesem Vorwurfe nicht frei. Am Besten scheint es daher, bei dem stereometrischen Elementarunterrichte den Beweis auf folgende Art darzustellen, wodurch die Sache sehr einfach erledigt wird.

Zuerst schicke man den folgenden, sich eigentlich ganz von selbst verstehenden und aus einer blossen Anschauung sich unmittelbar ergebenden Satz voraus:

Wenn $ABC$ und $A'B'C'$ in Taf. I. Fig. 11. zwei congruente Dreiecke und in denselben die durch gleiche Buchstaben bezeichneten Winkel einander gleich sind, so sind, wenn man von den Spitzen zweier gleichen Winkel aus, etwa von $A$ und $A'$ aus, auf zwei gleichen Seiten, etwa auf $AB$ und $A'B'$, zwei gleiche Stücke $AD$ und $AD'$ abschneidet, und die Linien $CD$ und $C'D'$ zieht, jederzeit auch die beiden Dreiecke $ACD$ und $A'C'D'$ einander congruent, also $CD=C'D'$.

Es fällt nämlich auf der Stelle in die Augen, dass in den Dreiecken $ACD$ und $A'C'D'$ zwei Seiten und die eingeschlossenen Winkel gleich, diese Dreiecke folglich congruent sind, also $CD=C'D'$ ist.

Wenn nun in Taf. I. Fig. 12. die Linie $AB$ auf den beiden in $A$ sich schneidenden Linien $CC'$ und $DD'$ in der Ebene $MN$ senkrecht steht, so lässt sich auf folgende Art leicht zeigen, dass

$AB$ auch auf jeder anderen, durch $A$ in der Ebene $MN$ gezogenen Linie $EE'$, also auf der Ebene $MN$ senkrecht steht.

Man nehme in den Linien $CC'$ und $DD'$ zwei Punkte $C$ und $D$ beliebig, aber so an, dass die dieselben verbindende Linie $CD$ die Linie $EE'$ in einem gewissen Punkte $E$ schneidet, verlängere $AB$ über $A$ hinaus, mache $AB'=AB$, und verbinde $B$ mit den Punkten $C$, $D$, $E$, so wie $B'$ mit denselben Punkten durch gerade Linien. Nach der Voraussetzung und Construction sind in den Dreiecken $ABC$ und $AB'C$ zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel gleich, also diese Dreiecke congruent; ganz eben so sind die Dreiecke $ABD$ und $AB'D$ congruent; also ist $BC=B'C$ und $BD=B'D$, woraus sich ergiebt, dass in den zwei Dreiecken $BCD$ und $B'CD$ alle drei Seiten gleich, diese Dreiecke also congruent sind; daher ist nach dem obigen Lehrsatze $BE=B'E$, und in den Dreiecken $ABE$ und $AB'E$ sind folglich auch alle drei Seiten gleich, diese Dreiecke also congruent, folglich die Winkel $BAE$ und $B'AE$ einander gleich, woraus sich ergiebt, dass $AB$ auf $EE'$, und eben so auf jeder anderen durch $A$ in der Ebene $MN$ gezogenen geraden Linie, folglich auf der Ebene $MN$ senkrecht steht, w. z. b. w.

---

Wenn man die Reihe

$$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x(x-1)}{1.2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\ldots,$$

wo $x$ eine positive ganze Zahl, die Reihe also eine endliche, jederzeit irgend einmal abbrechende Reihe ist, mit $x+1$ multiplicirt, so ist das Product:

$$\frac{x+1}{1}-\frac{(x+1)x}{1.2}+\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}-\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{1.2.3.4}+\ldots.$$

Nun ist aber nach dem binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten

$$(1-1)^{x+1}=0=1-\frac{x+1}{1}+\frac{(x+1)x}{1.2}-\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}+\ldots,$$

also

$$\frac{x+1}{1}-\frac{(x+1)x}{1.2}+\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}-\ldots=1,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$(x+1)\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x(x-1)}{1.2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\ldots\right\}=1,$$

also

$$1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x(x-1)}{1.2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\ldots=\frac{1}{x+1}.$$

Setzen wir nun der Kürze wegen

$$S_x=x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-1)}{1.2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}-\ldots,$$

also

$$S_{x+1}=(x+1)-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)x}{1.2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}-\ldots,$$

so ist, weil

$$x+1=x+1,$$

$$\frac{(x+1)x}{1.2}=\frac{x(x-1)}{1.2}+x,$$

$$\frac{(x+1)x(x-1)}{1.2.3}=\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}+\frac{x(x-1)}{1.2},$$

$$\frac{(x+1)x(x-1)(x-2)}{1.2.3.4}=\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}+\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3},$$

u. s. w.

ist:

$$S_{x+1}=\left\{x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-1)}{1.2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}-\ldots\right\}$$

$$+\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{x(x-1)}{1.2}-\ldots\right\},$$

folglich nach dem Vorhergehenden:

$$S_{x+1}=S_x+\frac{1}{x+1}.$$

Nach dieser Relation ist also:

$$S_2=S_1+\frac{1}{2},$$

$$S_3=S_2+\frac{1}{3},$$

$$S_4=S_3+\frac{1}{4},$$

u. s. w.

$$S_x=S_{x-1}+\frac{1}{x};$$

folglich, wenn man diese Gleichungen zu einander addirt und aufhebt, was sich aufheben lässt,

$$S_x = S_1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x},$$

also, weil nach dem Obigen offenbar $S_1 = 1$ ist:

$$S_x = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x}$$

oder

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x}$$

$$= x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x-1)}{1.2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4} + \dots$$

Dass dies keine Summation der endlichen harmonischen Reihe

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{x}$$

ist, sondern nur als eine Transformation derselben betrachtet werden darf, versteht sich von selbst, weil beide vorstehende Reihen immer eine gleiche Anzahl von Gliedern enthalten.

Obige Transformation der harmonischen Reihe führt Johann Bernoulli ohne Beweis, den ich hier hinzugefügt habe, in einem Briefe an Leibniz*) an, und sagt freilich: „Item, si progressio harmonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ etc. continuetur, ut numerus terminorum sit $x$, erit summa progressionis $= x - \frac{x.x-1}{1.2.2} + \frac{x.x-1.x-2}{1.2.3.3} - \frac{x.x-1.x-2.x-3}{1.2.3.4.4}$ etc.“, fügt aber auch, woraus erhellet, dass er dies nicht als eine Summation der harmonischen Reihe im eigentlichen Sinne betrachtet wissen will, sogleich hinzu: „Hinc tamen nondum perspicio, quomodo summa progressionis harmonicae finitae expedite per compendium exhiberi possit, uti exhi-

---

*) M. s. Leibnizens mathematische Schriften, herausgegeben von C. J. Gerhardt. Band III. Halle 1855. S. 160.

bentur summae progressionum figuratarum, vel etiam arithmeticae et geometricae: si quem noveris modum pro hoc, mecum haud gravatim communicabis.“ G.

---

Mein verehrter Freund, Herr Director Nizze an dem trefflichen Gymnasium in Stralsund, hat mir, mit Rücksicht auf meine Abhandlung über die elementare Quadratur der Hyperbel (in Thl. XXV. Nr. V. S. 82.) und das dort S. 92. gerechnete Beispiel, eine numerische Berechnung der Gränze von $\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega}$ für ein der Einheit sich näherndes $\omega$ mit zwölfstelligen Logarithmen zugesandt. Indem ich Herrn Director Nizze für diese Mittheilung verbindlichst danke und dieselbe den geehrten Lesern des Archivs im Folgenden mittheile, schicke ich derselben in Bezug auf das von mir auf S. 92. gerechnete Beispiel die folgenden Bemerkungen voraus. Das Beispiel auf S. 92. rechnete ich eine ziemliche Zeit nach Vollendung meiner Abhandlung, und fügte es, keinen besonderen Werth darauf legend, bloss in einer Note bei. Aus allen Ausdrücken, die in meiner Abhandlung vorkommen, z. B. aus dem Ausdrucke

$$\mathfrak{C}=\tfrac{1}{4}ab\frac{\omega^2-1}{\omega}$$

auf S. 87., den ich nach Willkühr herausgreife, der natürlich nicht negativ sein kann, geht hervor, dass $\omega$, geometrisch genommen, nicht kleiner als die Einheit sein kann. Wenn es aber, arithmetisch genommen, bloss auf die Gränze ankommt, der $\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega}$ sich nähert, wenn $\omega$ sich der Einheit nähert, kann, da diese Gränze einen endlichen völlig bestimmten Werth hat und von einer Unterbrechung der Stetigkeit für $\omega=1$ nicht die Rede sein kann, kein Zweifel sein, dass bei der näherungsweisen Berechnung dieser Gränze auch $\omega<1$ angenommen werden kann. Als ich diese Gränze zu berechnen versuchte, nahm ich allerdings $\omega>1$ an, fand aber, dass die Rechnung bei der Anwendung bloss siebenstelliger Logarithmen nicht recht von Statten gehen wollte, und nahm deshalb $\omega<1$ an, wodurch ich freilich bei nur oberflächlicher Berechnung, die ich hier nur bezweckte, auch nur eine sehr schwache Annäherung an die Gränze erhielt, wie auch a. a. O. bemerkt ist. Um so lehrreicher ist es mir gewesen, dass Herr Director Nizze bei Anwendung zwölfstelliger Logarithmen, indem er $\omega>1$ annahm, eine ziemlich schnelle Annäherung

an die Gränze erlangt hat. Ich lasse nun die mir von Herrn Director **Nizze** mitgetheilte Rechnung folgen. G.

**Berechnung von** $\text{Lim}\,\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega}$ **für ein der Einheit sich näherndes $\omega$, mit Bezug auf die Abhandlung in Thl. XXV. Nr. V. über die elementare Quadratur der Hyperbel.**

Von Herrn Director **Nizze** am Gymnasium zu Stralsund.

1) $\omega = 1{,}1 \qquad \omega^2 = 1{,}21 \qquad \omega^2 - 1 = 0{,}21$

$\log\omega = 0{,}041392685158$
$\omega\log\omega = 0{,}045531953673 8$

41392685158
41392685158
455319536738

$$\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega} = \frac{210000000000}{455319536738} = 4{,}61214\ldots.$$

455319536738
1821278146952
2787218530480
2731917220428
553013100520
455319536738
976935637820
910639073476
662965643440
455319536738
2076461067020

2) $\omega = 1{,}01 \qquad \omega^2 = 1{,}0201 \qquad \omega^2 - 1 = 0{,}0201$

$\log\omega = 0{,}004321373783$
$\omega\log\omega = 0{,}004364587520 83$

4321373783
4321373783
436458752083

$$\frac{\omega^2-1}{\omega\log\omega} = \frac{201000000000}{436458752083} = 4{,}60525\ldots.$$

436458752083
1745833008332
2641669916680
2618752512498
2291740418200
2182293760415
1094466577850
872917504166
2214490736840
2182293760415
32196976425

3) $\omega = 1,001 \qquad \omega^2 = 1,002001 \qquad \omega^2 - 1 = 0,002001$

$\log \omega = 0,000434077479$

$\omega \log \omega = 0,000434511556479$

$$\begin{array}{r} 434077479 \\ 434077479 \\ \hline 434511556479 \end{array}$$

$$\frac{\omega^2-1}{\omega \log \omega} = \frac{2001000000000}{434511556479} = 4,6051709\ldots.$$

$$\begin{array}{l} 1738046225916 \\ \hline \quad 2629537740840 \\ \quad 2607069338874 \\ \hline \qquad 2246840196600 \\ \qquad 2172557782395 \\ \hline \qquad\quad 742824142050 \\ \qquad\quad 434511556479 \\ \hline \qquad\quad 3083125855710 \\ \qquad\quad 3041580895353 \\ \hline \qquad\qquad 415449603570 \end{array}$$

4) $\omega = 1,0001 \qquad \omega^2 = 1,00020001 \qquad \omega^2 - 1 = 0,00020001$

$\log \omega = \log 73 + \log 137 - 4 = 0,000043427276$

$\omega \log \omega = 0,0000434316187276$

$$\begin{array}{r} 43427276 \\ 43427276 \\ \hline 434316187276 \end{array}$$

$$\frac{\omega^2-1}{\omega \log \omega} = \frac{2000100000000}{434316187276} = 4,6051702$$

$$\begin{array}{l} 1737264749104 \\ \hline \quad 2628352508960 \\ \quad 2605897123656 \\ \hline \qquad 2245538530400 \\ \qquad 2171580936380 \\ \hline \qquad\quad 739575940200 \\ \qquad\quad 434316187276 \\ \hline \qquad\quad 3052587529240 \\ \qquad\quad 3040213310932 \\ \hline \qquad\qquad 123742083080 \end{array}$$

---

In seinen sehr verdienstlichen Untersuchungen über die Gestalt der Erde theilt Professor von **Paucker** in **Mitau** die beiden folgenden eleganten allgemeinen Constructionen des Krümmungskreises der Kegelschnitte mit, für welche einen analytischen Beweis aufzusuchen vielleicht manchem Leser des Archivs Vergnügen machen wird. Die von **Paucker** a. a. O. gegebenen Beweise sind synthetisch:

I. Ein Punkt des Kegelschnitts sei $p$ (die Figur wird sich ein Jeder leicht selbst entwerfen können). Dessen Berührende, Ordinate und Normallinie treffen die Axe in $h$, $c$, $k$; die Ordinate $pc$ trifft die in $h$ zur Berührenden gezogene senkrechte Linie in $r$; die vom Mittelpunkte $m$ gezogene Linie $mr$ trifft die Normallinie $pk$ in $n$, so ist $n$ die Mitte des Krümmungskreises.

II. Aus dem Normalpunkte $k$ wird eine der Berührenden $ph$ parallele Linie gezogen, welche den Radius vector in $t$ trifft. Aus $t$ wird eine zum Radius vector senkrechte Linie gezogen, welche die Normallinie $pk$ in $n$ trifft, so ist $n$ die Mitte des Krümmungskreises.

---

## Eine Bemerkung über sphärische Dreiecke.

Man weiss, dass die analytische Geometrie, wenn sie von dem Winkel zweier Linien im Raume spricht, im Allgemeinen keinen Unterschied macht, ob die Linien sich wirklich schneiden oder nicht. Ich bin schon längst der Meinung gewesen, dass man von dieser verallgemeinerten Auffassung des Winkels zweier *geraden* Linien im Raume weiteren Gebrauch in der Geometrie überhaupt machen sollte, was zu manchen interessanten geometrischen Beziehungen führen und jungen Mathematikern Stoff zu verschiedenen zweckmässigen Uebungen geben kann. Hierzu einen vorläufigen nur kleinen Beitrag zu liefern, ist der Zweck der folgenden Bemerkungen.

Auf der Oberfläche einer aus dem Mittelpunkte $O$ beschriebenen Kugel liege ein sphärisches Dreieck $ABC$, dessen Winkel und respective Gegenseiten wie gewöhnlich durch $A$, $B$, $C$ und $a$, $b$, $c$ bezeichnet werden. Zieht man nun die Kugelhalbmesser $OA$, $OB$, $OC$, und die Sehnen $BC$, $CA$, $AB$ der Kugel, so kann man nach den Winkeln fragen, welche die Linien $OA$ und $BC$, $OB$ und $CA$, $OC$ und $AB$ mit einander einschliessen, indem man versucht, diese Winkel durch die das sphärische Dreieck bestimmenden Elemente auszudrücken. Die betreffenden Relationen will ich jetzt mit Hülfe der Formeln der analytischen Geometrie aufsuchen, indem ich es dem Leser überlasse, zu denselben durch die gewöhnlichen Hülfsmittel der sphärischen Trigonometrie zu gelangen, was eine zweckmässige Uebung für Schüler darbieten wird und dazu benutzt werden kann.

Die Halbmesser $OA$, $OB$, $OC$ will ich mir sämmtlich von dem Mittelpunkte $O$ der Kugel ausgehend denken; die Sehnen $BC$, $CA$, $AB$ aber sollen respective von den Punkten $B$, $C$, $A$

ausgehend gedacht werden. Dies vorausgesetzt, will ich die von $OA$ und $BC$, $OB$ und $CA$, $OC$ und $AB$ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel respective durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Um nun von diesen drei Winkeln etwa den Winkel $\mathfrak{A}$ zu bestimmen, lege ich durch den Mittelpunkt der Kugel ein rechtwinkliges Coordinatensystem der $xyz$, und bezeichne in Bezug auf dieses System die Coordinaten der Punkte $A$, $B$, $C$ respective durch $x_0$, $y_0$, $z_0$; $x_1$, $y_1$, $z_1$; $x_2$, $y_2$, $z_2$; die 180° nicht übersteigenden Winkel aber, welche die Halbmesser $OA$, $OB$, $OC$ mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen einschliessen, respective durch $f_0$, $g_0$, $h_0$; $f_1$, $g_1$, $h_1$; $f_2$, $g_2$, $h_2$. Ist dann $r$ der Halbmesser der Kugel, so ist bekanntlich:

$$x_0=r\cos f_0,\quad y_0=r\cos g_0,\quad z_0=r\cos h_0;$$
$$x_1=r\cos f_1,\quad y_1=r\cos g_1,\quad z_1=r\cos h_1;$$
$$x_2=r\cos f_2,\quad y_2=r\cos g_2,\quad z_2=r\cos h_2.$$

Ferner wollen wir die von der Sehne $BC$, welche, wie oben erwähnt, als von $B$ ausgehend gedacht wird, mit den positiven Theilen der drei Coordinatenaxen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch $\varphi_0$, $\psi_0$, $\chi_0$ bezeichnen; dann ist nach einer bekannten Formel der analytischen Geometrie:

$$\cos\mathfrak{A}=\cos f_0\cos\varphi_0+\cos g_0\cos\psi_0+\cos h_0\cos\chi_0.$$

Legen wir nun durch den Punkt $B$ ein dem primitiven Coordinatensysteme paralleles Coordinatensystem der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, und bezeichnen in diesem Systeme die Coordinaten des Punktes $C$ durch $\mathfrak{x}'$, $\mathfrak{y}'$, $\mathfrak{z}'$; so ist

$$\mathfrak{x}'=BC.\cos\varphi_0,\quad \mathfrak{y}'=BC.\cos\psi_0,\quad \mathfrak{z}'=BC.\cos\chi_0;$$

also

$$\cos\varphi_0=\frac{\mathfrak{x}'}{BC},\quad \cos\psi_0=\frac{\mathfrak{y}'}{BC},\quad \cos\chi_0=\frac{\mathfrak{z}'}{BC};$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\cos\mathfrak{A}=\frac{\mathfrak{x}'\cos f_0+\mathfrak{y}'\cos g_0+\mathfrak{z}'\cos h_0}{BC}.$$

Nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten ist aber

$$x_2=x_1+\mathfrak{x}',\quad y_2=y_1+\mathfrak{y}',\quad z_2=z_1+\mathfrak{z}';$$

also

$$\mathfrak{x}'=x_2-x_1=r(\cos f_2-\cos f_1),$$
$$\mathfrak{y}'=y_2-y_1=r(\cos g_2-\cos g_1),$$
$$\mathfrak{z}'=z_2-z_1=r(\cos h_2-\cos h_1);$$

folglich, wenn man zugleich

$$BC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2},$$

also

$$BC=r\sqrt{(\cos f_2-\cos f_1)^2+(\cos g_2-\cos g_1)^2+(\cos h_2-\cos h_1)^2}$$

setzt:

$$\cos\mathfrak{A}$$

$$=\frac{\cos f_0(\cos f_2-\cos f_1)+\cos g_0(\cos g_2-\cos g_1)+\cos h_0(\cos h_2-\cos h_1)}{\sqrt{(\cos f_2-\cos f_1)^2+(\cos g_2-\cos g_1)^2+(\cos h_2-\cos h_1)^2}}.$$

Weil nun nach der schon oben angewandten Formel der analytischen Geometrie

$$\cos b=\cos f_0\cos f_2+\cos g_0\cos g_2+\cos h_0\cos h_2,$$

$$\cos c=\cos f_0\cos f_1+\cos g_0\cos g_1+\cos h_0\cos h_1$$

ist, so ist $\cos b-\cos c$ der Zähler vorstehenden Bruchs; und weil

$$\cos f_1^2+\cos g_1^2+\cos h_1^2=1,$$

$$\cos f_2^2+\cos g_2^2+\cos h_2^2=1$$

ist, so ist das Quadrat seines Nenners

$$2\{1-(\cos f_1\cos f_2+\cos g_1\cos g_2+\cos h_1\cos h_2)\},$$

also, weil

$$\cos a=\cos f_1\cos f_2+\cos g_1\cos g_2+\cos h_1\cos h_2$$

ist, das Quadrat des Nenners:

$$2(1-\cos a)=4\sin\tfrac{1}{2}a^2;$$

folglich

$$2\sin\tfrac{1}{2}a=\sqrt{(\cos f_2-\cos f_1)^2+(\cos g_2-\cos g_1)^2+(\cos h_2-\cos h_1)^2}.$$

Daher hat man jetzt für $\cos\mathfrak{A}$, $\cos\mathfrak{B}$, $\cos\mathfrak{C}$ die folgenden sehr einfachen Ausdrücke:

$$\cos\mathfrak{A}=\frac{\cos b-\cos c}{2\sin\frac{1}{2}a}=-\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c)\sin\frac{1}{2}(b+c)}{\sin\frac{1}{2}a},$$

$$\cos\mathfrak{B}=\frac{\cos c-\cos a}{2\sin\frac{1}{2}b}=-\frac{\sin\frac{1}{2}(c-a)\sin\frac{1}{2}(c+a)}{\sin\frac{1}{2}b},$$

$$\cos\mathfrak{C}=\frac{\cos a-\cos b}{2\sin\frac{1}{2}c}=-\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.$$

Auf der Stelle erhält man hieraus die Relation:

$$\sin\tfrac{1}{2}a\cos\mathfrak{A}+\sin\tfrac{1}{2}b\cos\mathfrak{B}+\sin\tfrac{1}{2}c\cos\mathfrak{C}=0.$$

Statt der Seiten $a$, $b$, $c$ des sphärischen Dreiecks kann man in die vorstehenden Formeln leicht dessen Winkel $A$, $B$, $C$ einführen. Es ist nämlich:

$$\cos b=\frac{\cos B+\cos C\cos A}{\sin C\sin A},$$

$$\cos c=\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\sin A\sin B};$$

also:

$$\cos b-\cos c=\frac{\sin B\cos B-\sin C\cos C+\cos A\sin(B-C)}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin 2B-\sin 2C+2\cos A\sin(B-C)}{2\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin(B-C)\cos(B+C)+\cos A\sin(B-C)}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin(B-C)\{\cos A+\cos(B+C)\}}{\sin A\sin B\sin C}$$

$$=\frac{2\sin(B-C)\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin A\sin B\sin C}.$$

Nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie ist aber

$$\sin\tfrac{1}{2}a=\sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}},$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\cos\mathfrak{A}=-\frac{\sin(B-C)\sqrt{-\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}}{\sin A\sqrt{\sin B\sin C}},$$

oder:

$$\cos\mathfrak{A}=-\frac{\sin(B-C)}{\sin A}\sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(B+C-A)}{\sin B\sin C}},$$

$$\cos\mathfrak{B}=-\frac{\sin(C-A)}{\sin B}\sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin C\sin A}},$$

$$\cos\mathfrak{C}=-\frac{\sin(A-B)}{\sin C}\sqrt{-\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B+C)\cos\frac{1}{2}(A+B-C)}{\sin A\sin B}};$$

oder:

$$\cos\mathfrak{A} = -\frac{\sin(B-C)}{\sin A}\sin\tfrac{1}{2}a,$$

$$\cos\mathfrak{B} = -\frac{\sin(C-A)}{\sin B}\sin\tfrac{1}{2}b,$$

$$\cos\mathfrak{C} = -\frac{\sin(A-B)}{\sin C}\sin\tfrac{1}{2}c.$$

Weil

$$\sin A\sin(B-C)+\sin B\sin(C-A)+\sin C\sin(A-B)=0,$$

$$\cos A\sin(B-C)+\cos B\sin(C-A)+\cos C\sin(A-B)=0,$$

ist, so lassen sich aus dem Vorhergehenden noch verschiedene bemerkenswerthe Relationen ableiten, bei deren Entwickelung ich hier nicht länger verweile.

Ich habe die vorhergehenden Gleichungen hier mitgetheilt, wie sie sich mir durch die analytische Geometrie ergeben haben, bemerke aber wiederholt, dass es zweckmässig sein wird, dieselben nun auch durch die gewöhnlichen Formeln der sphärischen Trigonometrie zu beweisen, was vielleicht gar keine Schwierigkeit haben mag. G.

---

## Lehrsatz.

**Wenn, indem $n$ eine positive ganze Zahl bezeichnet, nur $n>1$ ist, so ist $(n+1)^n > 2n^n$ oder $(1+\frac{1}{n})^n > 2$.**

Beweis. Nach dem Binomischen Lehrsatze ist

$$(n+1)^n = n^n + n_1 n^{n-1} + n_2 n^{n-2} + \ldots + n_{n-1} n^1 + n_n,$$

also, weil $n>1$ ist:

$$(n+1)^n > n^n + n_1 n^{n-1}, \quad \text{d. i.} \quad (n+1)^n > n^n + n^n,$$

folglich $(n+1)^n > 2n^n$ oder $(1+\frac{1}{n})^n > 2$, wie bewiesen werden sollte.

Anmerkung. Für $n=1$ ist $(n+1)^n = 2n^n$, weil $(1+1)^1 = 2^1 = 2.1^1$ ist. G.

### Lehrsatz.

Wenn $x > 4$ ist, so ist $x^3 > 3(x+1)^2$.

**Beweis.** Wir wollen annehmen, dass $x > 4$ und

$$x^3 > 3(x+1)^2$$

sei. Dann ist

$$x^3 > 3(x+1).(x+1).$$

Nun ist aber $x > 4$, also $x+1 > 5$, folglich

$$x^3 > 3.5.(x+1), \quad x^3 > 15x+15;$$

folglich auch

$$x^3 > 9x+11,$$

$$x^3+3x+1 > 12x+12,$$

$$x^3+3x^2+3x+1 > 3x^2+12x+12,$$

$$(x+1)^3 > 3(x^2+4x+4),$$

$$(x+1)^3 > 3(x+2)^2.$$

Wenn also

$$x > 4, \quad x^3 > 3(x+1)^2$$

ist, so ist auch

$$x+1 > 4, \quad (x+1)^3 > 3(x+2)^2.$$

Nun ist

$$1^3 < 3.2^2, \quad 2^3 < 3.3^2, \quad 3^3 < 3.4^2, \quad 4^3 < 3.5^2, \quad 5^3 > 3.6^2.$$

Also ist der Satz offenbar allgemein richtig. G.

---

### Lehrsatz.

Wenn die positive ganze Zahl $n > 1$ und die positive Grösse $a$ grösser als die positive Grösse $b$ ist, so ist

$$(a+1)^n - a^n > (b+1)^n - b^n.$$

**Beweis.** Es ist

$$(a+1)^n - a^n = \frac{(a+1)^n - a^n}{(a+1)-a} = (a+1)^{n-1} + (a+1)^{n-2}a + \ldots.$$

$$\ldots. + (a+1)a^{n-2} + a^{n-1},$$

$$(b+1)^n - b^n = \frac{(b+1)^n - b^n}{(b+1)-b} = (b+1)^{n-1} + (b+1)^{n-2}b + \ldots$$
$$\ldots + (b+1)b^{n-2} + b^{n-1};$$

und weil nun $a > b$, also auch $a+1 > b+1$ ist, so ist

$$(a+1)^{n-1} > (b+1)^{n-1},$$
$$(a+1)^{n-2}a > (b+1)^{n-2}b,$$
u. s. w.
$$(a+1)a^{n-2} > (b+1)b^{n-2},$$
$$a^{n-1} > b^{n-1};$$

also

$$(a+1)^{n-1} + (a+1)^{n-2}a + \ldots + (a+1)a^{n-2} + a^{n-1} > (b+1)^{n-1} + (b+1)^{n-2}b + \ldots$$
$$\ldots + (b+1)b^{n-2} + b^{n-1},$$

folglich nach dem Obigen

$$(a+1)^n - a^n > (b+1)^n - b^n,$$

w. z. b. w.

Anmerkung. Für $n=1$ sind die beiden vorstehenden Grössen einander gleich, weil

$$(a+1)^1 - a^1 = (b+1)^1 - b^1 = 1$$

ist. G.

---

Lehrsatz.

Wenn $n > 1$ ist, so giebt es unter den ganzen Zahlen von 1 bis $n$ nicht zwei Werthe von $x$ und $y$, für welche, wenn $z$ eine ganze Zahl bezeichnet,

$$x^n + y^n = z^n$$

ist.

Beweis. Alle im Folgenden vorkommenden Grössen sind positive ganze Zahlen, was man ein für alle Mal zu beachten hat. Wenn nun, unter der Voraussetzung, dass $n > 1$ ist, $x^n + y^n = z^n$ ist, und keine der Grössen $x$ und $y$ verschwindet, so ist $z$ grösser als jede der beiden Grössen $x$ und $y$. Setzen wir also $z = x + u$, so ist $u$ eine nicht verschwindende positive ganze Zahl, und es ist nun nach dem Binomischen Lehrsatze:

$$x^n+y^n=(x+u)^n=x^n+n_1x^{n-1}u+n_2x^{n-2}u^2+\ldots+n_{n-1}xu^{n-1}+n_nu^n,$$

also

$$y^n=n_1x^{n-1}u+n_2x^{n-2}u^2+\ldots+n_{n-1}xu^{n-1}+n_nu^n.$$

Wenn nun $x>n$ ist, so ist, weil nach dem Vorhergehenden $y^n>nx^{n-1}u$ ist, indem nämlich $n>1$ ist, offenbar $y^n>n.n^{n-1}u$, also auch $y^n>n^n$, folglich $y>n$. Wenn ferner $x \overline{\overline{<}} n$ ist, so ist, weil $y^n>nx^{n-1}u$ ist, offenbar $y^n>x.x^{n-1}u$, also auch $y^n>x^n$, folglich $y>x$. Wäre nun aber $y \overline{\overline{<}} n$, so wäre nach einer, der so eben angewandten ganz ähnlichen Schlussweise $x>y$ oder $y<x$, was dem Vorhergehenden, wonach $y>x$ ist, widerspricht. Also kann in diesem Falle nicht $y \overline{\overline{<}} n$ sein, sondern es muss $y>n$ sein. Wenn also $x>n$ ist, so ist $y>n$; und wenn $x \overline{\overline{<}} n$ ist, so ist auch $y>n$. Es mag also $x$ einen Werth haben, welchen es will, so ist immer $y>n$. Weil aber die Gleichung $x^n+y^n=z^n$ in Bezug auf $x$ und $y$ ganz symmetrisch ist, so wird auch ganz auf dieselbe Art, $y$ mag sein, was es will, immer $x>n$ sein müssen. Also kann die Gleichung $x^n+y^n=z^n$ nur dann existiren, wenn gleichzeitig $x>n$, $y>n$ ist; in allen andern Fällen enthält sie einen Widerspruch, oder vielmehr, für keinen Werth von $x$ und $y$ von 1 bis $n$ kann vorstehende Gleichung $x^n+y^n=z^n$ existiren, w. z. b. w. G.

---

## Berichtigung.

Thl. XXV. S. 77. Z. 8. v. o. hinter $D'D''D^{IV}=70$ schalte man ein: $D'D''D^{IV}=42$.

„ „ „ 78. „ 13. v. u. statt „2“ setze man „3“.

„ „ „ 81. „ 8. v. u. statt $\alpha$) setze man (3).

„ „ „ 369. „ 10. v. u. muss die Formel so heissen:

$$t=\operatorname{arc}\left(\cos=\frac{a-2h}{a}\right).\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

„ „ „ 372. „ 17. v. u. statt „hat“ s. m. „hätte.“

„ „ Taf. V. Fig. 3. In dieser Figur muss die untere Klammer {, an welcher $r$ steht, nicht bis ganz an die durch $m$ parallel mit $AB$ gezogene Linie reichen, sondern oben etwas kürzer sein, weil $r$ den Halbmesser des Kreises, dessen Mittelpunkt nicht genau die durch $m$ parallel mit $AB$ gezogene Linie trifft, bezeichnet.

Thl. XXVI. Taf. I. Fig. 9. muss die Linie $OD$ noch gezogen werden.

# Literarischer Bericht

## CI.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

Am 19. August des vorigen Jahres (1855) ist leider wieder einer der verdientesten deutschen Mathematiker, der zugleich auch ein trefflicher Lehrer war, der Kaiserlich Russische Collegienrath und Professor am Gymnasio illustri zu Mitau, Dr. Magnus Georg von Paucker, der Wissenschaft durch den Tod entrissen worden. Der Herausgeber des Archivs, welcher, so lange er das Glück und die Ehre hatte, mit dem Verstorbenen in literarischer Verbindung zu stehen, demselben immer die grösste Achtung bewahrt hat, freut sich, seinen Lesern den folgenden, von dem würdigen Sohne des Verstorbenen, dem beständigen Sekretair der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst, Herrn M. C. von Paucker, ihm freundlichst eingesandten Nekrolog mit nur geringen, hier durch den beschränkten Raum gebotenen Abkürzungen mittheilen zu können. Magnus Georg von Paucker's viele treffliche Schriften und praktische Arbeiten, die allen Mathematikern bekannt sind und daher einer vollständigen Aufzählung hier nicht bedurften, sichern ihm für alle Zeiten einen würdigen Platz in der Geschichte der Wissenschaft, und seine vielen Schüler werden seiner immer mit der grössten Liebe und Dankbarkeit gedenken. Als der Herausgeber in der nur erst ganz vor Kurzem erschienenen Nr. XCIX. des Literarischen Berichts Paucker's verdienstliche Arbeiten über die Gestalt der Erde anzuzeigen die Freude hatte, war ihm sein bereits erfolgter Tod noch ganz unbekannt; desto mehr wurde er durch die von seinem würdigen Sohne ihm gegebene Nachricht von demselben überrascht und betrübt, freut sich aber nun auch um so mehr, ihm jene als Schriftsteller ihm rühmenden und ehrenden Worte in's Grab nachgerufen zu haben. G.

# Nekrolog.

## Magnus Georg von Paucker.

Geboren zu St. Simonis in Ehstland am 15. November 1787.
Gestorben zu Mitau am 19. August 1855.

Sohn eines um seiner Pflichttreue und Rechtschaffenheit, wie um seiner sittlichen Strenge und literarischen Bildung willen in seiner Gemeinde, bei seinen Eingepfarrten und Amtsgenossen in Ansehen und grosser Achtung stehenden Landpredigers in Ehstland, genoss Paucker einer sehr sorgfältigen Erziehung zuerst im elterlichen Hause und seit seinem eilften Jahre bei einem Onkel in der nur wenige Meilen entlegenen Kreisstadt Wesenberg. Zu Ende des Sommers 1801 aber erhielt er, nebst mehreren verwandten Knaben seines Alters, zu Hause in einem aus Erfurt gebürtigen kenntnissreichen Juristen, Herrn Johann Heinrich Fidejustus Heuser, einen trefflichen Lehrer, der seine glücklichen Anlagen rasch zu entwickeln wusste und besonders als gründlicher Geometer ihm eine entschieden vorwaltende Neigung zu den mathematischen Wissenschaften einflösste, deren theoretische Consequenz und praktische Anwendbarkeit den aufstrebenden Jüngling sehr anzog und frühzeitig seinen Scharfsinn übte. Erst 15 Jahre alt war er daher schon im Stande, die zu der von seinem Vater im Jahre 1804 veranlassten Stiftung einer ehstländischen Landprediger-Wittwen- und Waisen-Kasse erforderlichen Berechnungen mit Sicherheit nach den zum Grunde gelegten Mortalitäts-Verhältnissen auszuführen und selbstständig einen Kalender für das Jahr 1805 auszuarbeiten, der handschriftlich noch vorhanden ist. Zu Anfang dieses Jahres bezog er die neugegründete Landes-Universität in Dorpat, wo er sich unter Leitung der ihm sehr wohlwollenden Professoren G. F. Parrot und J. W. Pfaff dem Studium der Physik und der sogenannten exacten Wissenschaften, Astronomie, Mechanik und Hydraulik, mit grösstem Eifer hingab, auch darin solche Fortschritte machte, dass bereits im Jahre 1806 Professor Pfaff „einige astrognostische Notizen" und eine Abhandlung „über den Sehungsbogen der Fixsterne" von ihm der Veröffentlichung durch den Druck werth erachtete und seinen „astronomischen Beiträgen" einverleibte, gleichwie P. auch im Sommer 1808 die „Vermessung des Embachstroms in Livland von seinem Ausfluss aus dem Wirzjärw bis zu seinem Einfluss in den Peipussee in einer Länge von 12 Meilen, mit einem Spiegel-Sextanten durch ein Dreiecknetz" trigonometrisch

ausführte, eine Arbeit, die, begleitet von Tiefenmessungen und einer genauen Karte über den Lauf des Flusses, von der neu errichteten Naturforscher-Gesellschaft in Dorpat jetzt nach bald 50 Jahren noch der Veröffentlichung würdig befunden worden und, nachdem die Karte bereits in Berlin gestochen ist, nächstens in dem „Archiv" der Gesellschaft an's Licht treten wird, da sie, deren letztem Jahresberichte S. 87. zufolge, auch nach dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft nur wenig zu wünschen übrig lässt. Nachdem Professor Pfaff zu Anfang des Jahres 1809 Dorpat verlassen, begab sich auch P. nach St. Petersburg, wo er bei Zarskoe-Selo den ersten Telegraphen in Russland errichtete und dafür mit einem Brillantringe von Kaiserlicher Huld belohnt wurde. Zugleich bereitete er sich hier für den Militärdienst bei dem Corps der Wasser-Communikationen vor, in welches er als Offizier eintreten sollte, als er im Herbste 1810 zum Oberlehrer der Mathematik und Naturwissenschaften an das Gymnasium zu Wiburg berufen ward, welches damals zum Dörptschen Lehrbezirk mitgehörte. Hier wirkte er indessen nur wenige Monate, da schon am 1. December 1810 der Observator und ausserordentliche Professor der mathematischen Wissenschaften in Dorpat, E. Chr. Friedr. Knorre, starb, an dessen Stelle P. zu Anfang des folgenden Jahres vocirt wurde und im Juli 1811 eintrat. Hier beschäftigten ihn die schwierigsten Aufgaben der höheren Mathematik, und verbreiteten sich seine amtlichen Vorträge vornehmlich über die Analysis des Unendlichen, die Differential- und Integral-Rechnung etc., daher die Zahl seiner Zuhörer, die ihm mit Nutzen zu folgen vermochte, begreiflich nur eine geringe war, unter ihnen namentlich auch der unlängst verstorbene Ingenieur-General von Hezel und, wenn wir nicht irren, auch der später berühmte Akademiker Friedr. Georg Wilh. von Struve, der bald nachher sein Amtsnachfolger an der Sternwarte zu Dorpat ward. Denn schon am 12. September 1811 war der Professor Beitler in Mitau verstorben und sein erledigtes Amt am dasigen Gymnasio illustri ward im folgenden Jahre P. angetragen, der indessen zuvor noch im März 1813, nach öffentlicher Vertheidigung seiner Inaugural-Dissertation: de nova explicatione phaenomeni elasticitatis corporum rigidorum, 76 S. 4. unter dem Präsidio des Professor Joh. Gottfr. Huth, als dermaligen Decans der Facultät, die philosophische Doctorwürde erwarb und im Juni als ausserordentlicher Professor bestätigt ward, ehe er zu Anfang August sein neues Lehramt als Oberlehrer der mathematischen und physikalischen Wissenschaften und Observator der Sternwarte in Mitau antrat. Hier eröffnete sich ihm ein zwar nicht sehr weiter, aber reich gesegneter Wirkungskreis für Jugendbildung und Ver

breitung wissenschaftlicher Kenntnisse, dem er mit unermüdlichem Eifer ein volles Menschenalter hindurch seine besten Kräfte und reichen Erfahrungen gewidmet hat. Er begnügte sich aber nicht mit dem bloss mündlichen Unterrichte in allen Zweigen der Mathematik und in der Physik, in welchen seine Schüler bis zum Universitätsstudium vorbereitet wurden, sondern suchte auch durch zahlreiche Schriften der Wissenschaft in weitern Kreisen Anhänger und Freunde zu verschaffen, wobei er später vornehmlich die praktische Anwendung der wissenschaftlichen Errungenschaften auf gemeinnützige Zwecke im Leben und Verkehr der Menschen im Auge hatte und nach allen Seiten durch Wort und Schrift anzubahnen bemüht war. Noch im Jahre 1813 liess er seine „Theorie der Derivationen" zur Eröffnung des Lehrcursus in dem Jahre 1814 erscheinen. Seine beredten Worte „zur Feier des Allerhöchsten Geburtsfestes Sr. Kaiserl. Majestät", gesprochen im grossen Hörsaale des Gymnasium illustre zu Mitau am 12. December 1816, 16 S. 4., hatten die Zugabe eines neuen Lehrstuhls für die praktische Mathematik, das Militär- und Ingenieur-Wesen zum Ziel, damit das Gymnasium im Stande sein möge, dem Zutrauen noch kräftiger und vollständiger zu entsprechen, dessen es bisher gewürdigt worden, wie Aehnliches vor wenigen Jahren von der ehstländischen Ritterschaft bei der Ritter- und Domschule in Reval bewirkt worden ist. In dem zur Eröffnung des Lehrcursus auf dem Gymnasio illustri zu Mitau im Jahre 1817 gedruckten Programm verbreitete er sich „über astronomisch-trigonometrische Landesvermessungen", und in demselben Jahre machte er in Bohnenberger's und Baron Lindenau's Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften Bd. III. S. 364 etc. eine kurze Mittheilung „über die geographische Länge und Breite des Cap Domessness von Kurland." Ueberhaupt entwickelte er im Jahre 1817 eine grosse literarische Thätigkeit, da ihm in der am 23. November 1815 gegründeten und von dem dermaligen Kriegs-Gouverneur zu Riga und Oberbefehlshaber von Liv- und Kurland etc., Marquis Paulucci, sehr bereitwillig am 2. December d. J. bestätigten kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst, nachdem auch deren Statuten am 20. December 1816 confirmirt und gedruckt worden, die Pflichten eines beständigen Sekretärs derselben übertragen wurden, denen er sich mit dem lebendigsten Eifer und einer gewissen Vorliebe unterzog. Dies leuchtet gleich sehr aus der „ersten Beilage zu den Statuten der literarischen Societät in Kurland, die Zwecke derselben und deren Ausführung betreffend" vom 28. März 1817 hervor, welche gewissermassen als Programm ihrer künftigen Wirksamkeit für die historisch-literarischen und rein wissenschaftlichen Interessen unse-

rer Ostseeprovinzen zu betrachten ist, als aus den Jahres-Verhandlungen dieser Gesellschaft, deren I. Band 1819, der zweite um die Mitte des Jahres 1822 in Mitau bei J. F. Steffenhagen und Sohn in 4. erschien und, ausser dem von ihm abgefassten historischen Theil, auch eine Menge rein wissenschaftlicher Arbeiten des Secretärs neben sehr werthvollen historischen und literarischen Mittheilungen vieler andern Mitglieder der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst umfasst. Diese Jahres-Verhandlungen aber begründeten in sehr würdiger Weise den gelehrten Ruf dieser Gesellschaft und das gerechte Vertrauen zu ihren erfolgreichen Bestrebungen im In- und Auslande. Um so mehr war es zu beklagen, dass Missverständnisse in dem engern Ausschuss der Gesellschaft Paucker veranlassten, dieses Amt und die Redaction der Jahres-Verhandlungen sofort aufzugeben, welche seitdem zu erscheinen aufhörten. Aus dem Jahre 1817 rühren noch, ausser den „Relationen über die Sitzungen der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst“, welche er in der allgemeinen deutschen Zeitung für Russland zu Mitau bis zum 2. Juni 1821 fortsetzte, auch Mittheilungen „über die Erscheinungen der Capillarität“ in eben dieser Zeitung und in deren Ergänzungsblättern 1817 und 1818 zur Widerlegung verschiedener vom Professor G. Fr. Parrot d. ä. darüber geäusserten Ansichten, und in Bode's astronomischem Jahrbuch (Berlin 1817) für das Jahr 1818 S. 173 etc.: „Astronomische Beobachtungen, neue Methoden zur Prüfung des Ganges der Uhren aus korrespondirenden Sonnenhöhen und zur Berechnung der Parallaxen enthaltend.“ Im folgenden Jahre 1818 liess P. nicht allein eine vollständige „Uebersicht der Verhandlungen der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst“, sondern auch ein „Jahresprogramm des Museum und Athenäum der Provinz Kurland“ besonders erscheinen, um grössere Theilnahme für diese Institute im gebildeten Publikum daselbst zu erwecken, was auch nicht ohne Erfolg blieb, da namentlich das kurländische Provinzial-Museum, das nachmalige Schosskind des würdigen Staatsraths v. Recke, auch Gegenstand der sorgfältigsten Pflege seiner Freunde, des Dr. Lichtenstein und des jetzigen Direktors, Herrn Landhofmeisters Baron Klopmann, seit jenem Jahre ohne Unterlass vielfach bereichert und geschmackvoll ausgestattet, eine der grössten Merkwürdigkeiten und Zierden der Hauptstadt Kurlands geworden ist, das dem Laien, wie dem Kenner eben so viel Belehrung als Unterhaltung zu gewähren vermag, indem es über die Natur und Geschichte der Provinz Aufklärungen giebt, die man nirgends so anschaulich und vollständig wieder finden kann.

In eben jenem Jahre, am 28. Februar 1818, war sein sehr geschätzter früherer College, Professor Huth, in Dorpat verstorben, und bei Wiederbesetzung dieses Lehrstuhls die allgemeine Aufmerksamkeit auf P. gerichtet, ohne dass er Veranlassung hatte, sich um denselben zu bewerben. Indessen mochte es ihn wohl etwas überraschen, dass ihm der ausländische Professor Brandes bei der Wahl des Conseils, wenn auch nur mit ein oder zwei Stimmen, vorgezogen ward, der zwar anfangs nach Dorpat überzusiedeln bereit war, später aber in Breslau zu bleiben sich bewogen sah, darauf die Professur der Astronomie und Mathematik in Dorpat P. förmlich angetragen ward. Da dies jedoch in Folge der frühern ihm ungünstigen und nur durch Brandes' Ablehnung später vereitelten Wahl geschah, so konnte er es nicht für angemessen halten, dem in solcher Weise an ihn ergehenden Rufe zu folgen, wiewohl es an Ueberredungen dazu von manchen früheren Freunden in Dorpat nicht fehlte. Das Conseil entschied sich daher für die Trennung der bisherigen Professur, indem sie den Observator und ausserordentlichen Professor Wilhelm von Struve 1820 zum ordentlichen Professor der Astronomie ernannte, den damaligen Professor Bartels in Kasan aber im Januar 1821 zum Professor der reinen und angewandten Mathematik in Dorpat berief, der seinen Dienstantritt im folgenden Jahre mit einer lateinischen Dissertation über die Theorie der analytischen Functionen bezeichnete.

Unterdessen hatte P. in der Heimath sich mit einer Jugendfreundin seiner Geschwister, der Tochter des Majors Carl Friedrich von Baggehuffwudt und dessen erster Gemahlin Helene geb. v. Ulrich, der geistreichen und liebenswürdigen Anna Christina Wilhelmine von Baggehuffwudt, zu Woibifer am 8. August 1819 vermählt, welche ihm in liebevollster Hingebung das Leben verschönte und sein Verbleiben in Mitau lieb und werth zu machen wusste; denn sie waren hier gar bald völlig heimisch geworden und hatten in vielen Kreisen Liebe und Freundschaft gefunden, mit denen sie seitdem einen freundlichen Verkehr unterhielten; und nach der Geburt des ersten Kindes hatte ihre Elternfreude in sinniger Weise die Stiftung eines Frauenvereins in Mitau veranlasst, in welchem ihr lebhaftes Mitgefühl für die Leiden und Freuden der Mitmenschen sich noch einen weitern segensreichen Wirkungskreis eröffnet sah, dessen anregende Elemente bei mancher Aufopferung an Zeit, Mühe und Kosten die genugthuendste Beschäftigung so in, als ausser dem Hause gewährte.

Paucker's häusliches Glück aber gab ihm auch die rechte Freudigkeit zu seinem Beruf und zur unermüdeten Förderung der

liebgewonnenen Wissenschaft. War die „Anwendung der Methode der kleinsten Quadratsumme auf physikalische Beobachtungen" schon 1819 Gegenstand eines Gymnasial-Programms; seine 1820 gedruckte „mathematische Gedenktafel" ein prägnanter Ausdruck seiner Lehrweise *) und das Programm zur Eröffnung des Lehrcursus im Jahre 1821 „Einiges über die geometrische Auflösung cubischer Gleichungen" voll Scharfsinn und strenger Consequenz, wie so viele seiner streng wissenschaftlichen Arbeiten der Art in den Jahres-Verhandlungen der kurländischen gelehrten Gesellschaft **), so enthielt dagegen seine am 12. December 1822 im grossen Hörsaale des Gymnasium zu Mitau gehaltene Rede eine begeisterte Schilderung der neuesten Entdeckungen am gestirnten Himmel und der raschen Fortschritte in der Astronomie. Eine Frucht grössten Fleisses und in seiner Lehrthätigkeit beim Gymnasium gesammelter zehnjähriger Erfahrung aber war das 1823 zu Königsberg von ihm erschienene und dem berühmtesten deutschen Geometer, Professor Gauss in Göttingen, zugeeignete Lehrbuch: „die ebene Geometrie der graden Linie und des Kreises, oder die Elemente" für Gymnasien und zum Selbstunterricht. Gleichzeitig fügte er dem seit 1814 von ihm berechneten Mitauschen Kalender auch eine „Ostertafel des Julianischen Kalenders für immerwährende Zeiten der Zukunft und Vergangenheit (von 1383 bis 1914) auf eine Periode von 532 Jahren, nach einer neuen Einrichtung berechnet, Mitau 1823" hinzu, so wie er seit den letzten drei Monaten des Jahres 1821 über 25 Jahre hindurch sehr regelmässige „meteorologische Beobachtungen auf der Sternwarte in Mitau" anstellte, deren Ergebnisse er später in den „Arbeiten" der kurländischen Gesellschaft ausführlich bekannt gemacht hat und die zu seinem Vorschlage zu dergleichen an verschiede-

---

*) In demselben Jahre wurde P. Mitglied der Naturforscher-Gesellschaft in Moskau. Ferner war P. Ehrenmitglied der Naturforscher-Gesellschaft in Dorpat, ordentliches Mitglied der literarisch-praktischen Bürgerverbindung in Riga, der Gesellschaft für Geschichte u. Alterthumskunde der Ostsee-Gouvernements, correspondirendes Mitglied der ehstländischen literarischen Gesellschaft zu Reval und der Société des sciences, lettres et arts zu Antwerpen.

**) Nicht unerwähnt kann hier bleiben, welchen regen Antheil P. auch an der von dem General Tenner für Litthauen bis an die Gränzen Kurlands ausgeführten Gradmessung und später, in den Jahren 1825 und 1826, auch in den vom Professor Struve in Jakobstadt und bei Kreuzburg, wie auf der Insel Hogland unternommenen astronomischen Höhenbestimmungen und genauen Berechnungen der ersten russischen Gradmessung genommen hat, wofür ihm wiederholt das Allerhöchste Wohlwollen Sr. Kaiserl. Majestät bezeugt ward.

nen Orten gleichzeitig anzustellenden vergleichenden Witterungsbeobachtungen *) geführt haben in Kurland, wie in Ehst- und Livland. Sehr sorgfältige Untersuchungen und Vergleichungen setzten ihn 1823 auch in den Stand, als deren Resultat „authentische Bestimmungen inländischer Maasse und Gewichte" in Raupach's neuem Museum der deutschen Provinzen Russlands, Bd. I. Heft 1., Dorpat 1824, mitzutheilen, die ihn später noch zu einer sehr umfassenden Arbeit über die Metrologie Russlands veranlassten, welche handschriftlich in 6 starken Quartanten der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften im October 1831 vorgestellt wurde und bei der ersten Vertheilung der Demidow'schen Prämien im April 1832 ihm den vollen Preis von 5000 Rbl. Bco. Assign. erwarb. Eben so hatte schon im Januar 1822 sein „Mémoire sur la construction géométrique des équations du troisième degré et sur les propriétés principales de ces équations, demontrées par la géométrie élementaire", abgedruckt in den Mémoires de l'Académie des sciences de St. Petersb. 1826. T. X. p. 158—266., die Ehre seiner Ernennung zum correspondirenden Mitgliede dieser Kaiserl. Akademie zu Wege gebracht. Seine Thätigkeit auf der Mitauer Sternwarte aber gab sich kund durch Mittheilungen in Bode's astronomischem Jahrbuche zu Berlin 1825 „über das Mittagsfernrohr auf der Sternwarte zu Mitau" und „Resultate der Aberrationstheorie der Fixsterne, Planeten und Kometen"; ferner „über correspondirende Sonnenhöhen", und in seinen Berechnungen über „Mondes-Auf- und Untergang im Jahre 1827" in der Beil. Nr. 49. zur allgemeinen deutschen Zeitung in Mitau 1826. Desgleichen finden sich in Schumacher's astronom. Nachrichten Bd. III. Altona 1827 seine „Bestimmung der Polhöhe der Mitauer Sternwarte" und „Zenithdistanzen des Polarsterns, zur genauern Bestimmung der Polhöhe der Mitauer Sternwarte, mit einem 18zolligen Reichenbach-Ertelschen Verticalkreis im Sommer 1828 gemessen" in Bd. VII. Altona 1829 S. 359 ff., auch ein Aufsatz „über Refractionstafeln" ebend. S. 401.

Aber nicht allein an wissenschaftlichen Zeitschriften des Auslandes nahm P. fleissigen Antheil, auch der Literatur des Inlandes war seine Aufmerksamkeit beständig zugewandt. So lieferte er im Ostseeprovinzen-Blatt von Sonntag zu Riga 1826 S. 203 ff. eine ausführliche Anzeige der vom Professor Struve herausgegebenen „Beschreibung des grossen Refractors von Fraunhofer auf der Sternwarte zu Dorpat", auch in dessen literarischen Supplement-Blättern 1827 eine anerkennende Beurtheilung des „Catalo-

*) Siehe Beilage zur Mitauischen Zeitung 1848. Nr. 71 etc.

gus novus stellarum duplicium et multiplicium" dieses berühmten Astronomen, und auch in den literarischen Begleitern der folgenden Jahrgänge noch mehrere literarische Anzeigen, Beurtheilungen und Kritiken wissenschaftlicher Werke seines Fachs, desgleichen 1830 ebend. den Auszug aus einer grössern Abhandlung „über den Julianischen und Gregorianischen Kalender." In den Quatembern vom Professor Trautvetter zu Mitau, 1829. Bd. 1. Hft. 1., besprach P. die neuesten „Erscheinungen in der naturwissenschaftlichen Literatur", bestimmte im Hft. 2. „die geographische Breite von Mitau" und theilte im Hft. 3., Mitau 1830, seine Beobachtungen mit „über den Gang der Wärme und des Luftdrucks zu Mitau." Zur Theilnahme an den Dorpater Jahrbüchern für Literatur, Statistik und Kunst, besonders Russlands, aufgefordert, lieferte er in dessen zweitem Hefte im Juli 1833 eine ausführliche Ankündigung seines „praktischen Rechenbuchs für inländische Verhältnisse", dessen erstes Heft, „allgemeine Regeln", bereits 1834, das zweite sehr reichhaltige Heft von 334 S., „Handels- und Finanzrechnungen" enthaltend und dem Herrn Finanzminister Grafen Cancrin gewidmet, zu Mitau 1836, das dritte dem Wirkl. Kammerherrn Grafen Joh. Fr. v. Medem dedicirte Heft über „administrative und ökonomische Rechnungen" zu Mitau 1837, auf 124 S. 8., und gleichzeitig auch eine 2. Aufl. des 1. Heftes erschien, ein Werk, das für so viele Beziehungen des täglichen Verkehrs im Handel und Gewerbe unentbehrlich geworden und seinen bisher fast nur den Gelehrten vom Fach bekannten Namen auch in den fernsten Kreisen unserer Lande und Städte populär gemacht hat. Während Paucker indessen für die Dorpater Jahrbücher noch ferner thätig war und 1835 in deren 4. Bande St. 5. S. 420—452 L. Pansner's „Versuch einer tabellarischen Uebersicht der russischen Münzen" einer ausführlichen und gründlichen Beurtheilung unterzog, bei welcher Gelegenheit er sich über das Münzsystem Russlands sehr vortheilhaft aussprach und, zur Fixirung des bisher so veränderlichen Courses, dieses System auf den Metallwerth der den Schwankungen im Werthe des Papiergeldes weniger ausgesetzten Silber-Münze zu gründen vorschlug, was bekanntlich von der Staatsregierung für nützlich und zweckgemäss erkannt und auf dem Wege der Legislation im Jahre 1839 allgemein eingeführt worden ist. Im 5. Bande St. 3 der Jahrbücher S. 177—217 lieferte er noch im Sept. 1835 eine „Metrologie der alten Griechen und Römer," die auch besonders abgedruckt und den Gymnasien des Dorpater Lehrbezirks mitgetheilt ward, und im Octbr. 1835 ebend. S. 356—362 eine „Valvationstabelle römischer Denarien, verglichen mit russischen Gewichten und Münzen." In demselben Jahre erschien auch in dem Berichte der Kaiserlichen Academie der Wissenschaf-

ten über die vierte Zuerkennung der Demidowschen Preise ein „Auszug aus seiner neuen Bearbeitung des ersten Theils der russischen Metrologie" St. Petersburg 1835 S. 21—57 und demnächst in des Etatsraths Schumacher Jahrbuch für die Jahre 1836 und 1837, gedruckt zu Stuttgart und Tübingen, 8., S. 74—87 „die Maasse und Gewichte Russlands und seiner Provinzen," nebst einem „Nachtrage." Seine unermüdete wissenschaftliche Thätigkeit in jener Zeit bekundet noch ein dem Herrn Curator des Dörptschen Lehrbezirks, General v. Craffström, zugeeignetes gelehrtes Werk unter dem Titel „Geometrische Analysis," enthaltend des Apollonius von Perga sectio rationis, spatii et determinata, nebst einem Anhange (Leipzig bei Leop. Voss 1837. XII. und 164 S. 8. nebst 9 Kupfertafeln) und „die Osterrechnung zur Einführung eines bessern kirchlichen Kalenders und Oster-Kanons" (Riga und Leipzig 1837, 4. X. und 96 S. nebst 37 S. Tabellen), dedicirt dem Herrn Minister der Volks-Aufklärung, Geh.-Rath Uwarow, so wie eine in der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst vorgetragene Abhandlung „über die neueste Astronomie," namentlch über die von dem Prof. Argelander entdeckte Bewegung unseres Sonnensystems im Weltraume und des Akademikers v. Struve neueste Entdeckungen an den Doppelsternen.

Schon im J. 1825 war Paucker zum Hofrath und 1827 zum Coll.-Rath befördert worden*). Im J. 1831 ward ihm der ehrenvolle Antrag gemacht, die Stelle eines ordentlichen Mitglieds der Kaiserlichen Academie der Wissenschaften zu St. Petersburg einzunehmen. Der damalige Gehalt eines Akademikers war nur 2500 Rbl. B.A. und die Erwägung des ungleich kostspieligeren Aufenthalts in der Residenz mit den grössern Kosten der Erziehung seiner 3 Söhne und einer Tochter, wozu seine amtliche Stellung und seine ökonomische Lage in Mitau manche Erleichterung darbot, legten ihm aber die unabweisbare Pflicht auf, der ihm zugedachten Ehre einer solchen Dienstveränderung zu entsagen, da die Aussichten für ihn in Petersburg durch Nebenarbeiten seine Subsistenzmittel als Akademiker vermehrt zu sehen sehr ungewiss waren, dagegen die Nothwendigkeit, solche zu erwerben und die dazu erforderliche Zeit dem Amte und dessen gesteigerten Anforderungen zu entziehen, sich als gewiss und unerlässlich herausstellte. Daher war es natürlich, dass er es vorzog zu Mitau in seinen bisherigen Verhältnissen und in der gewohnten und lieb-

*) Das Diplom des erblichen Reichs-Adels ist ihm unterm 21. Aug. 1842 ausgestellt.

gewonnenen Amtswirksamkeit zu verbleiben, wofür er sich während seines Sommeraufenthalts in Reval zur Zeit der, wegen der mit grosser Heftigkeit in Riga und Mitau ausgebrochenen Cholera-Epidemie, verlängerten Schulferien entschied. Er kehrte daher im August 1831 nach Mitau zu neuer freudiger Wirksamkeit zurück, die indess nach wenig Jahren durch häusliche Leiden schmerzlich getrübt wurde. Am 4. März 1834 ward seine Familie zuletzt durch die Geburt einer Tochter vermehrt. Seitdem aber kränkelte ihm die Frau und bildete sich bei ihrer schwächlichen und zarten Körperconstitution nur zu bald ein Lungenleiden aus, das am 22. April 1835 ihrem Leben und schönen gesegneten Wirken ein Ziel setzte, sowie ein halbes Jahr später auch das Schmerzenskind der Mutter ins Grab folgte. Seine verehrte Stiefmutter, geb. v. Friderici, eilte darauf aus Ehstland herbei, durch ihre liebevolle Vorsorge seinen Schmerz zu lindern, seinem Hauswesen vorzustehen und seinen verwaisten Kindern so viel möglich die unvergessliche Mutter zu ersetzen, und zwei jugendliche Schwestern wetteiferten mit einander, dem geliebten Bruder das verödete Haus wieder freundlich zu beleben. Als beide nach ein paar Jahren sich anschickten, der höhern Bestimmung des Weibes und dem Zuge ihres Herzens folgend, an der Hand ihrer Erwählten sich einen eigenen Hausstand zu gründen und die geliebte Mutter sie dann nach Ehstland und Petersburg zu begleiten bereit war, vermählte sich Paucker vier Wochen vor der Trennung, am 7. Mai 1838 mit Fräulein Theodosie Trotta v. Treyden, welche seitdem das Glück seines Lebens und den Trost seines Alters mit sanfter Hand und liebevollem Herzen bis zu seinem letzten Hauche gegründet und bewahrt hat, während seine Kinder alle ihn durch ihre kindliche Verehrung und die würdige Erfüllung ihres gewählten Berufs vielfach erfreuten.

Schon 1836 war er nach Ablauf seiner 25jährigen Dienstzeit im Lehrfache auf neue 5 Jahre für sein bisheriges Amt gewählt und 1837 mit dem St. Annenorden 3. Classe für seinen ausgezeichneten Dienst belohnt. Im Sommer 1839 wohnte er auf besondere Einladung auch der feierlichen Einweihung der Hauptsternwarte zu Pulkowa bei und 1842 wieder für sein Lehramt gewählt und bestätigt, ward er nach Ablauf neuer 5 Jahre als Oberlehrer und Observator des Gymnasiums in Mitau zu Ende des Jahres 1846 förmlich emeritirt und zur Anerkennung seiner literärischen Verdienste ihm der St. Wladimir-Orden 4. Classe Allergn. verliehen, seine Schüler aber überraschten ihn am 15. Dec. zum Zeichen ihrer Dankbarkeit, bei Ueberreichung eines vergoldeten Silberpokals, in den ihre Namen gravirt waren, mit einem Ständchen, bei

welchem ein zu diesem Zweck besonders gedichtetes tief empfundenes Lied gesungen wurde.

Während das Gymnasium und dessen Sternwarte, der Mitausche Kalender und die Beobachtungen der Temperatur und Witterung zu Mitau und nächstdem die Fortschritte und neuesten Errungenschaften der höhern Mathematik und Astronomie, wie die raschere Entwickelung der Literatur unserer Provinzen die Aufmerksamkeit und Thätigkeit Paucker's unausgesetzt in Anspruch nahmen und die stille, anmuthige Blumenwelt in seinem Gärtchen und Treibhaus seine Mussestunden mit Duft und Blüthen erfüllte und sein friedliches Stillleben freundlich erheiterte, war er bedacht seinen Mitmenschen noch in anderer Weise nützlich zu werden und auch ihr Seelenheil zu fördern. Seit dem 24. März 1819 bereits Mitglied der kurländischen Abtheilung der russischen Bibelgesellschaft und, nach deren Aufhebung im April 1826 und Wiederherstellung am 25. März 1832, ebenso Mitglied der kurländischen Sectionscomität der evangelischen Bibelgesellschaft in Russland, war er für die Förderung ihrer Zwecke unablässig besorgt und hat seit dem Ende December 1842 als Director und später auch Schatzmeister dieser Comität mit der an ihm gewohnten Ausdauer und Beharrlichkeit die Theilnahme fast aller evangelischen Landgemeinden des kurländischen Gouvernements an den Segnungen der Bibelverbreitung anzuregen und zu erhalten gewusst.

In gleicher Weise hat er seit dem 15. Juni 1831 zum engern Ausschuss als Mitglied gehörend und seit dem 30. Decbr. 1838 zugleich als Schatzmeister, seit dem 21. Septbr. 1846 aber auch noch als Geschäftsführer der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst, durch Wort und Schrift eine für deren Zwecke sehr erspriessliche und für Verbreitung nützlicher Kenntnisse im Vaterlande sehr erfolgreiche Thätigkeit entwickelt, indem er wiederholt darauf hinwies, „wie wichtig es gerade in jetziger Zeit sei, dass es einen Ort in unserer Nähe gebe, wo man darauf bedacht ist, das heilige Feuer der Wissenschaft nicht erlöschen zu lassen.“ In diesem Sinne redigirte er von 1839 bis 1847 die in drei Bänden erschienenen „Sendungen,“ welchen er die Geschichte der Gesellschaft seit 1821 vorausschickte mit den zugehörigen Mitglieder-Verzeichnissen, nebst näheren Nachrichten über die Sammlungen der Gesellschaft, denen der um dieselbe so hoch verdiente Staatsrath von Recke gleiche Nachrichten über das kurländische Provinzial-Museum hinzufügte. Unter den mannigfachen literarischen Abhandlungen, Aufsätzen und Mittheilungen in diesen Sendungen nehmen auch Paucker's Nachrichten über den „Encke'schen Kometen bei seinem Wiedererscheinen im

Jahre 1838" und dessen Betrachtung „über die Grenzen der Sicherheit in den Thatsachen der neuern Astronomie," so wie sein Sendschreiben „über die Reinigung der deutschen Sprache von Fremdwörtern" ein besonderes Interesse in Anspruch. Freilich fand die Vermeidung aller Fremdwörter in der deutschen Sprache in unserm Publikum nicht viel Anklang und noch weniger die Umbildung dieser Fremdwörter in bisher ungewöhnliche deutsche Bezeichnungen, die nicht immer ganz genau den Begriff des übersetzten lateinischen oder französischen Fremdwortes wiedergeben, auch dem deutschen Sprachgebrauch und allgemein anerkannten Sprachregeln nicht immer völlig entsprechen. Dennoch führte er mit rücksichtsloser Beharrlichkeit selbst in einigen mathematischen Werken die beabsichtigte Sprachreinigung mit möglichster Schärfe durch, namentlich in seiner „Bildlehre," welche zu Leipzig, und in seiner „niedern Grössenrechnung," welche zu Mitau im J. 1846 im Druck erschien, aber eben wegen der etwas gewaltsamen Umbildung allgemein angenommener Kunstausdrücke wissenschaftlicher Bezeichnungen, welche das Verständniss erschwerte und diesen Schriften die verdiente Berücksichtigung entzog, in der gelehrten Welt wenig Eingang fanden, weshalb eine Uebertragung dieser Werke in die russische oder französische Sprache denselben gewiss eine viel günstigere Aufnahme und einen viel grössern Erfolg sichern dürfte, sobald die umgebildeten deutschen Kunstausdrücke in die herkömmlichen wissenschaftlichen Bezeichnungen der Russen und Franzosen umgesetzt würden. Dessenungeachtet beharrte Paucker bei solcher gezwungenen Schreibweise auch in den von 1846 bis 1851 von ihm herausgegebenen „Arbeiten der kurländischen Gesellschaft für Literatur und Kunst," von denen 10 Hefte erschienen sind, nebst den 1850 besonders gedruckten „Sitzungsberichten" der Gesellschaft, in welchen letztern diese ungewöhnliche Ausdrucksweise öfters störend auffällt. Dennoch haben die Leser der mancherlei anziehenden und lehrreichen Arbeiten sich darüber ebenso leicht hinwegzusetzen gewusst, wie die Verehrer von Jacob Grimm sich über dessen besondere s. g. altdeutsche Schreibweise und Rechtschreibung beruhigt haben, wiewohl auch sie in Deutschland schwerlich jemals zu allgemeiner Geltung gebracht werden dürfte, und auch der von ihm so warm empfohlene Gebrauch der nur lateinischen Schriftzeichen daselbst wohl niemals allgemein eingeführt werden wird. Immerhin ist es nicht zu leugnen, dass Paucker's Bestrebungen bei uns dazu beigetragen haben, die Fremdwörter in der deutschen Sprache möglichst zu vermeiden und auch auf die Rechtschreibung mehr Sorgfalt zu wenden, als bisher geschehen. Da die erwähnten Arbeiten der kurländischen literarischen Gesellschaft viel verbreitet sind, so bedarf

es keiner weiteren Herzählung der reichhaltigen Beiträge ihres Herausgebers zu denselben und erwähnen wir nur noch seiner zur Beglückwünschung der Kaiserlichen Universität zu Dorpat an ihrem 50jährigen Jubelfeste im Namen der Gesellschaft zum 12. Decbr. 1852 eingesandten Abhandlung „das elliptische Potential," seiner 1853 im „Inland" mitgetheilten wissenschaftlichen Aufsätze und endlich auch seiner neuesten in den Bulletins der mathematischen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften abgedruckten Abhandlungen über „das astronomische Längenmaass," ferner „zur Theorie der kleinsten Quadrate," zweiter und fünfter Artikel, und über „die Gestalt der Erde" mit sehr sorgfältigen Berechnungen, die ihn lange und viel beschäftigt haben. Eine nicht minder umfassende Arbeit über die Astronomie der Alten ist leider unvollendet geblieben, so eifrig er noch bis zuletzt daran gearbeitet, da wiederholte Krankheitsfälle ihn daran verhinderten.

So ist die Summe seines 68jährigen Lebens und 50jährigen öffentlichen Wirkens allerdings Arbeit und Mühe gewesen, aber nur im Dienste der Wahrheit und Wissenschatt, denen er nachgeforscht sein Leben lang, die er gefördert und verbreitet hat, so lange es Tag für ihn war, wobei Liebe und Wohlwollen gegen Jedermann den Grundzug seines Charakters bildeten, obwohl er aller Sentimentalität abhold war und tiefe religiöse Anschauung, ohne Frömmelei, wie heller scharfer Verstand, bei grösster Anspruchslosigkeit, Herz und Geist adelten und seinen persönlichen Umgang anziehend, wie seine Unterhaltung anregend und lehrreich machten. So gehörte er zu denen, von deren Pilgerfahrt hienieden und ihrem Ringen und Kämpfen um das höchste Kleinod des Lebens, per ardua ad astra, der Prophet Daniel geweissagt: „Viele werden gereiniget, geläutert und bewähret werden. Die Lehrer aber werden leuchten, wie des Himmels Glanz und die so viele zur Gerechtigkeit gewiesen, wie die Sterne, immer und ewiglich."

---

## Arithmetik.

Elemente der Zahlen-Theorie, allgemein fasslich dargestellt von Dr. Herm. Schwarz, Lehrer der Mathematik und Physik am Pädagogium zu Halle. Halle. Schmidt. 1855. 8. 2 Thlr. 20 Sgr.

Dieses Buch enthält eine recht deutliche und elementar gehaltene Darstellung der Hauptgesetze der Zahlen-Theorie, und

wird zur weiteren Verbreitung dieses schönen Theils der Mathematik beitragen, weshalb wir es zur Beachtung empfehlen. Der Hauptinhalt ist folgender. Einleitung. Geschichtliches. Arithmetische Hülfssätze. Erster Abschnitt. Von der Congruenz der Zahlen. Zweiter Abschnitt. Von den Resten der Potenzen. Dritter Abschnitt. Theorie der quadratischen Reste und Nichtreste im Besondern. Vierter Abschnitt. Von der Auflösung der allgemeinen Congruenzen zweiten Grades mit einer Unbekannten. Fünfter Abschnitt. Theorie der quadratischen Formen und Auflösung der allgemeinen Gleichung

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2=M.$$

Sechster Abschnitt. Auflösung der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen den Unbestimmten $X$ und $Y$.

---

## Geometrie.

**Die cyclischen Curven methodisch mit besonderer Rücksicht auf Constructionen zum Gebrauche für Techniker, sowie als Uebungsbeispiel für angehende Mathematiker, behandelt von Dr. Hermann Weissenborn, Mit 7 Figurentaf. Eisenach. Baereke. 1856. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.**

Eine sehr ausführliche analytische Behandlung der verschiedene Arten von Cycloiden, Epicycloiden, Hypocycloiden, u. s. w. die auch einiges Eigenthümliche enthält. Was aber der Herr Vf. auf S. V. der Vorrede über die analytische Behandlung selbst sagt, und wie es scheint, als eine Eigenthümlichkeit für sich in Anspruch nimmt, hat wohl jeder Anfänger in der Analysis längst gewusst. Als Material zu Uebungen in der analytischen Behandlung der Curven kann das Buch Anfängern immerhin empfohlen werden; Technikern empfehlen wir weit mehr das nette Schriftchen von Zehme, nämlich: „Elementare und analytische Behandlung der verschiedenen Cycloiden u. s. w. für technische Schulen und zum Selbstunterrichte von Dr. Zehme, Director der Provinzial-Gewerb-Schule zu Hagen, Iserlohn und Elberfeld. 1854. Vergl. Literar. Ber. Nr. LXXXVI. S. 6.

---

## Astronomie.

**Ueber den Zusammenhang der Flecken und Protuberanzen der Sonne, von K. v. Littrow, Director der**

k. k. Sternwarte zu Wien. Aus dem Octoberhefte des Jahrganges 1855 der Sitzungsberichte der mathem. naturw. Klasse der kais. Akademie der Wissenschaften zu Wien besonders abgedruckt.

In dieser sehr verdienstlichen Abhandlung liefert Herr v. Littrow eine Berechnung seiner bei Gelegenheit der grossen Sonnenfinsterniss vom 28. Juli 1851 zu Rixthöft an der Ostsee (bei Danzig) gemachten Beobachtungen, so weit es die Natur solcher Beobachtungen zulässt. Wir halten diese Abhandlung für eine in jeder Beziehung sehr lehrreiche Darstellung der Art und Weise, wie dergleichen Beobachtungen am besten und vortheilhaftesten zu benutzen und zu berechnen sind, und empfehlen sie einem Jeden, wer sich mit ähnlichen Rechnungen zu beschäftigen beabsichtigt, zu sorgfältigster Beachtung, da sie auch, ausser der Darstellung des Rechnungsverfahrens und den der Rechnung am besten zu Grunde zu legenden Formeln und astronomischen Elementen, noch viele andere sehr lehrreiche Bemerkungen über dergleichen Beobachtungen überhaupt, über die verschiedenen Quellen ihrer Unsicherheit, über die beste und bequemste Art, dieselben anzustellen, u. s. w. enthält. Von den gewonnenen Resultaten erlaubt uns der beschränkte Raum hier nur anzuführen, dass auch hier von Neuem der deutlichste Beweis geliefert ist (s. S. 12.), dass die hier zur Sprache kommenden Erscheinungen keineswegs dem Monde, sondern unzweifelhaft der Sonne angehören. Wir machen nochmals einen Jeden auf diese sehr beachtenswerthe Abhandlung aufmerksam.

---

## Physik.

Das dioptrische Mikroskop, dessen Einrichtung und Behandlung, von Karl B. Heller, Prof. der Naturgeschichte am akademischen Ober-Gymnasium in Graz. Wien. Braumüller. 1856. 8. 16 Sgr.

Eine kurze recht deutliche Beschreibung der Einrichtung und des Gebrauchs des Mikroskops. Die Theorie ist durch die elementar'sten mathematischen Formeln begründet, und Jeder, wer aus einem physikalischen Lehrbuche oder physikalischen Vorträgen die einfachsten dioptrischen Grundformeln kennt, wird dieses deutliche Schriftchen leicht verstehen, da auch Alles durch sehr deutliche Figuren erläutert ist.

---

# VIII.

## Mémoire sur une méthode nouvelle de transformation des coordonnées dans le plan et dans l'espace, avec application aux lignes et surfaces des deux premiers degrés.

Par

Monsieur *Georges Dostor*,

Docteur ès sciences mathématiques, Professeur de mathématiques à Paris.

---

1. Dans l'analyse des courbes et des surfaces, il est essentiel de donner à l'équation du lieu, plan ou solide, la forme la plus simple pour en reconnaitre la nature et en déterminer les élémens et les propriétés. Or, dans cette équation, se trouvent souvent en évidence les premiers membres des équations de droites ou de plans, dont l'emploi comme axes ou plans de coordonnées réduit considérablement l'équation de la courbe ou de la surface.

Il importe donc de chercher les formules, qui servent à passer à des axes ou à des plans de coordonnées qui sont représentés par leurs équations. Nous nous proposons, dans ce mémoire, de déterminer ces formules.

Afin de rendre notre travail complet, nous avons dû résoudre, dans le cas d'axes obliques, les questions sur la ligne droite et le plan, qui dans les ouvrages ne sont généralement données que pour des axes rectangulaires.

Ce mémoire se compose de plusieurs parties.

Dans la première, nous avons déterminé les formules de transformation des coordonnées planes; nous les avons appliquées à la recherche des asymptotes et de la puissance de l'hyperbole, ainsi qu'au calcul de l'axe, du sommet et du paramètre de la parabole.

La seconde partie a pour objet le calcul des formules de transformation dans l'espace; nous nous sommes appuyé, pour cela, sur

quelques relations remarquables, qui ont lieu entre lès coéfficients des équations de deux systèmes de droites et plans perpendiculaires.

Nous avons appliqué les formules obtenues à la détermination dés génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

Nous avons fait usage des mêmes résultats pour compléter la méthode que M. Plücker de Bonn a imaginée pour la discussion des surfaces du second ordre.

Nous avons montré, en outre, avec quelle simplicité notre méthode de transformation peut être employée dans la détermination des sections planes dans les surfaces.

Enfin nous en avons déduit un procédé très expéditif pour passer de formules calculées pour des axes rectangulaires aux relations analogues qui répondent à des coordonnées obliques.

## Chapitre I.

### Transformation des coordonnées rectilignes dans le plan, lorsque les nouveaux axes sont déterminés par leurs équations.

2. *Calcul du sinus de l'angle de deux droites.* Nous avons besoin dans nos calculs, de la valeur du sinus de l'angle de deux droites. Afin de donner le plus grand degré de simplicité à notre méthode, nous allons indiquer un procédé très rapide pour déterminer ce sinus.

Soient

$$y = ax, \quad y = a'x \tag{1}$$

les équations de deux droites $OD$, $OD'$ menées par l'origine $O$ des coordonnées, $V$ l'angle $DOD'$ de ces droites et $\theta$ l'angle $yOx$ des axes de coordonnées.

Sur l'axe des $x$ prenons une distance $OP$ égale à l'unité de longueur, et, par le point $P$, menons la droite $PMM'$ parallèlement à l'axe des $y$; cette droite rencontre $OD$, $OD'$ aux points respectifs $M$, $M'$. Nous formons ainsi les trois triangles $OMM'$, $OMP$, $OM'P$, dont le premier est la différence des deux autres.

Nous avons d'abord

$$\begin{aligned} 2OMM' &= OM.OM'.\sin V, \\ 2OMP &= OM.OP.\sin\theta, \\ 2OM'P &= OM'.OP.\sin\theta. \end{aligned}$$

Or, par suite de l'hypothèse $OP = 1$, les équations (1) donnent $PM = a$, $PM' = a'$; on a, par conséquent, au moyen des deux triangles $OMP$, $OM'P$,

$$OM = \sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta},\quad OM' = \sqrt{1 + a'^2 + 2a'\cos\theta};$$

mettant ces valeurs dans l'égalité $OMM' = OM'P - OMP$, on obtient

$$\sin V . \sqrt{(1 + a^2 + 2a\cos\theta)(1 + a'^2 + 2a'\cos\theta)} = (a' - a)\sin\theta.$$

Nous avons donc

$$\sin V = \frac{(a' - a)\sin\theta}{\sqrt{(1 + a^2 + 2a\cos\theta)\,(1 + a'^2 + 2a'\cos\theta)}}. \tag{I}$$

Si les deux droites étaient représentées par les équations

$$Ay + Bx = 0,\quad A'y + B'x = 0,$$

l'expression précédente deviendrai

$$\sin V = \frac{(BA' - AB')\sin\theta}{\sqrt{(A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta)(A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta)}}. \tag{II}$$

**3.** *Première méthode de transformation des cordonnées dans le plan.* Passons actuellement à la recherche des formules en question. Soient

$$y - ax - b = 0,\quad y - a'x - b' = 0 \tag{2}$$

les équations des deux droites que l'on veut prendre pour les axes des nouvelles coordonnées.

D'un point quelconque $M$, pris dans l'angle de ces deux droites, abaissons sur elles les perpendiculaires respectives $MD$, $MD'$, que nous représenterons par $\delta$, $\delta'$; puis menons à ces mêmes droites les parallèles $MQ'$, $MP'$ par le point $M$. Si nous désignons par $x$ et $y$ les anciennes coordonnées du point $M$, par $x'$ et $y'$ les coordonnées nouvelles, nous aurons

$$MP = y,\ OP = x;\quad MP' = y',\ OP' = x'.$$

Les triangles $MDP'$, $MD'Q'$ nous donnent

$$\left.\begin{aligned} \delta &= MD = MP'.\sin MP'D = y'\sin V,\\ \delta' &= MD' = MQ'.\sin MQ'D' = x'\sin V. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Or si nous faisons observer que

$$PN = ax + b,\quad PN' = a'x + b',$$

($N$ et $N'$ étant les points d'intersection des deux droites $O'X'$, $O'Y'$ avec la ligne menée par le point $M$ parallèlement à l'ancien axe des $y$); d'où nous voyons que

$$MP - PN = y - ax - b > 0,$$

$$MP - PN' = y - a'x - b' < 0;$$

nous avons aussi

$$\delta = \frac{(y - ax - b)\sin\theta}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}}, \quad \delta' = \frac{-(y - a'x - b')\sin\theta}{\sqrt{1 + a'^2 + 2a'\cos\theta}},$$

en même temps que, d'après n°. 2,

$$\sin V = \frac{(a' - a)\sin\theta}{\sqrt{(1 + a^2 + 2a\cos\theta)(1 + a'^2 + 2a'\cos\theta)}}.$$

Si nous mettons ces valeurs dans les relations (3), nous obtiendrons les deux équations

$$\left.\begin{aligned} y - ax - b &= \frac{(a' - a)y'}{\sqrt{1 + a'^2 + 2a'\cos\theta}}, \\ y - a'x - b' &= \frac{(a - a')x'}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}}; \end{aligned}\right\} \quad \text{(III)}$$

dont la résolution fournit les formules

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{b' - b}{a - a'} + \frac{x'}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}} + \frac{y'}{\sqrt{1 + a'^2 + 2a'\cos\theta}}, \\ y &= \frac{ab' - ba'}{a - a'} + \frac{ax'}{\sqrt{1 + a^2 + 2a\cos\theta}} + \frac{a'y'}{\sqrt{1 + a'^2 + 2a'\cos\theta}}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(IV)}$$

Si les deux droites, prises pour axes des coordonnées nouvelles, sont représentées par les equations

$$Ay + Bx + C = 0, \quad A'y + B'x + C' = 0,$$

les quatre formules précédentes se changent en

$$\left.\begin{aligned} Ay + Bx + C &= \frac{-(AB' - BA')y'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 - 2A'B'\cos\theta}}, \\ A'y + B'x + C' &= \frac{-(A'B - B'A)x'}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}; \end{aligned}\right\} \quad \text{(V)}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{AC''-CA'}{AB'-BA'}+\frac{Ax'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}+\frac{A'y'}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}},\\ y&=-\frac{C'B-B'C}{A'B-B'A}-\frac{Bx'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}-\frac{B'y'}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}}.\end{aligned}\right\}\text{(VI)}$$

Dans le cas où les anciens axes sont rectangulaires, ces formules se simplifient et se réduisent à

$$y-ax-b=\frac{(a'-a)y'}{\sqrt{1+a^2}},\quad y-a'x-b'=\frac{(a-a')x'}{\sqrt{1+a'^2}};\quad \text{(VII)}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{b'-b}{a-a'}+\frac{x'}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{y'}{\sqrt{1+a'^2}},\\ y&=\frac{ab'-ba'}{a-a'}+\frac{ax'}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{a'y'}{\sqrt{1+a'^2}};\end{aligned}\right\}\text{(VIII)}$$

$$Ay+Bx+C=\frac{(BA'-AB')y'}{\sqrt{A'^2+B'^2}},\quad A'y+B'x+C'=\frac{(AB'-BA')x'}{\sqrt{A^2+B^2}};\ \text{(IX)}$$

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}+\frac{Ax'}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{A'y'}{\sqrt{A'^2+B'^2}},\\ y&=\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'}-\frac{Bx'}{\sqrt{A^2+B^2}}-\frac{B'y'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}.\end{aligned}\right\}\text{(X)}$$

4. *Deuxième méthode pour déterminer les formules précédentes.* Les formules (V) et (VI) peuvent aussi se trouver par une méthode différente de celle que nous venons d'employer.

Soient, en effet, $\alpha$ et $\beta$, $\alpha'$ et $\beta'$ les angles que font les deux droites

$$A(y-ax-b)=Ay+Bx+C=0,\quad A'(y-a'x-b')=A'y+B'x+C'=0\quad (4)$$

avec les deux axes de coordonnées $OX$ et $OY$. En désignant par $p$ et $q$ les coordonnées de l'intersection des deux droites (4), on a

$$p=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'},\quad q=\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'},$$

$$\left.\begin{aligned} x-p&=\frac{x'\sin\beta+y'\sin\beta'}{\sin\theta},\\ y-q&=\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\alpha'}{\sin\theta}.\end{aligned}\right\}\quad (5)$$

Or on sait que

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=a=-\frac{B}{A},$$

$$\operatorname{tang}\alpha=\frac{a\sin\theta}{1+a\cos\theta}=\frac{-B\sin\theta}{A-B\cos\theta};$$

d'où on déduit

$$\sin\alpha=\frac{a\sin\theta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}}=\frac{-B\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}},$$

$$\sin\beta=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+a^2+2a\cos\theta}}=\frac{A\sin\theta}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}};$$

$$\sin\alpha'=\frac{a'\sin\theta}{\sqrt{1+a'^2+2a'\cos\theta}}=\frac{-B'\sin\theta}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}},$$

$$\sin\beta'=\frac{\sin\theta}{\sqrt{1+a'^2+2a'\cos\theta}}=\frac{A'\sin\theta}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}}.$$

Substituant ces valeurs dans les égalités (5), on obtient

$$x=\frac{CA'-AC'}{AB'-BA'}+\frac{Ax'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}+\frac{A'y'}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}},$$

$$y=\frac{BC'-CB'}{AB'-BA'}-\frac{Bx'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}}-\frac{B'y'}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}};$$

résultat identique avec les formules (VI).

Multiplions ces deux dernières égalités respectivement d'abord par $B$ et $A$, puis par $B'$ et $A'$, et ajoutons chaque fois les produits, nous trouvons ainsi que

$$Ay+Bx+C=\frac{(A'B-B'A)y'}{\sqrt{A'^2+B'^2-2A'B'\cos\theta}},$$

$$A'y+B'x+C'=\frac{(AB'-BA')x'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\theta}},$$

formules qui ont déjà été obtenues et qui sont conformes avec (V).

## Chapitre II.

### Développements d'une fonction entière du second degré d'une ou de plusieurs variables.

5. *Développement d'une fonction du second degré en valeur des dérivées premières des variables.* Le double d'une fonction entière du second degré $f(x, y, z, \ldots)$, d'une ou de

plusieurs variables $x, y, z, \ldots.$ peut toujours se mettre sous la forme

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z + \ldots. + ax + by + cz + \ldots. + 2g, \quad (1)$$

où $a, b, c, \ldots.$ représentent les coéfficients des termes du premier degré, et $g$ le terme tout connu. En effet, cette fonction étant du second degré, nous avons, par le théorème de Taylor,

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) = f(x, y, z, \ldots.) + hf'_x + kf'_y + lf'_z + \ldots. + R, \quad (1)$$

où $R$ désigne l'ensemble des termes indépendants des variables. Cette identité devant avoir lieu, quelles que soient $x, y, z, \ldots.$, nous pouvons y annuler ces variables; elle se change ainsi en

$$f(h, k, l, \ldots.) = g + ah + bk + cl + \ldots. + R, \quad (2)$$

puisque $f(x, y, z, \ldots.)$ se réduit à $g$, et que les coéfficients $a, b, c, \ldots.$ des termes du premier degré de $f(x, y, z, \ldots.)$ sont les termes indépendants des variables dans les dérivées respectives $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots.$

Substituant dans (1) la valeur de $R$ tirée de l'équation (2), il nous viendra

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots.) = f(x, y, z, \ldots.) + hf'_x + kf'_y + lf'_z + \ldots. + f(h, k, l, \ldots.)$$
$$-(ah + bk + cl + \ldots. + g). \quad (3)$$

Cela trouvé, remplaçons dans (3) $h, k, l, \ldots.$ par $-x, -y, -z, \ldots.$; le premier membre de cette égalité se réduira à $g$; la fonction du second membre se convertira en

$$f(x, y, z, \ldots.) - 2(ax + by + cz + \ldots.);$$

tandisque les termes, qui précèdent cette fonction, se changent en

$$-(xf'_x + yf'_y + zf'_z + \ldots.),$$

en même temps que $f(x, y, z, \ldots.)$, qui est indépendant de $h, k, l, \ldots.$, restera invariable. L'égalité (3) devient ainsi

$$g = f(x, y, z, \ldots.) - (xf'_x + yf'_y + zf'_z + \ldots.) + f(x, y, z, \ldots.)$$
$$-2(ax + by + cz + \ldots.) + (ax + by + cz + \ldots.) - g;$$

d'où nous tirons

$$2f(x, y, z, \ldots.) = xf'_x + yf'_y + zf'_z + \ldots. + ax + by + cz + \ldots. + 2g,$$

résultat conforme à l'énoncé.

6. *Applications.* 1°. Soit

$$f(x) = Ax^2 + Bx + C;$$

on trouve que

$$2f(x) = xf'_x + Bx + 2C. \tag{II}$$

2°. Si

$$f(x, y) = Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F,$$

on aura

$$2f(x, y) = xf'_x + yf'_y + Dy + Ex + 2F. \tag{III}$$

3°. Enfin, pour

$$f(x, y, z)$$

$$= Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F,$$

on obtiendra

$$2f(x, y, z) = xf'_x + yf'_y + zf'_z + 2(Cx + C'y + C''z + F). \tag{IV}$$

7. *Isolement d'une variable.* Toute fonction entière du second degré, qui renferme le carré d'une variable $x$, étant multipliée par quatre fois le coéfficient de $x$, est égale au carré de la dérivée de cette fonction prise par rapport à $x$, augmenté d'un terme indépendant de $x$. En effet, dans ce cas la fonction peut se mettre sous la forme

$$f(x, y, z, \ldots) = Ax^2 + Px + Q, \tag{4}$$

où $P$ représente la somme des coéfficients, fonctions ou non de $y, z, \ldots$, qui sont multipliés par $x$, et $Q$ l'ensemble des termes indépendants de $x$. On en déduit

$$f'_x = 2Ax + P,$$

$$f'^2_x = 4A^2x^2 + 4APx + P^2. \tag{5}$$

Retranchons (5) de (4), après avoir multiplié cette dernière par $4A$; il vient

$$4Af(x, y, z, \ldots) = f'^2_x - (P^2 - 4AQ). \tag{IV*}$$

8. *Applications.* D'après cela, on trouve que

1°. $4Af(x) = 4A(Ax^2 + Bx + C) = f'^2_x - (B^2 - 4AC);$ (V)

$$2^o.\ 4Af(x,y)=4A(Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F)$$
$$=f_y'^2-(B^2-4AC)x^2-2(BD-2AE)x-(D^2-4AF); \quad \text{(VI)}$$

$$3^o.\ 4Af(x,y,z)$$
$$=4A(Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F)$$
$$=f_x'^2-4(B''^2-AA')y^2-8(B'B''-AB)yz-4(B'^2-AA'')z^2$$
$$-8(CB''-AC')y-8(CB'-AC'')z-4(C^2-AF). \quad \text{(VII)}$$

**9.** *Isolement de deux variables.* Toute fonction entière du second degré, qui ne renferme pas le carré de deux variables, mais leur produit, peut toujours s'exprimer en valeur du produit des dérivées prises par rapport à ces variables et en valeur de toutes les autres variables.

Une telle fonction peut être représentée par

$$f(x,y,z),\ldots.) = Bxy+Mx+Ny+P. \quad (6)$$

Elle donne

$$f_x' = By+M, \quad f_y' = Bx+N;$$

et, par suite,

$$f_x'.f_y' = B^2xy+BMx+BNy+MN. \quad (7)$$

Retranchant (7) de (6), après avoir multiplié cette dernière par $B$, on trouve

$$Bf(x,y,z,\ldots.) = f_x'.f_y'-(MN-BR). \quad \text{(VIII)}$$

**10.** *Applications.* On a ainsi

$$1^o.\ Bf(x,y)=B(Bxy+Dy+Ex+F)=f_x'.f_y'-(DE-BF); \quad \text{(IX)}$$

$$2^o.\ 2B''f(x,y,z)$$
$$=2B''(A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F)$$
$$=f_x'.f_y'-4(BB'-A''B'')^2-4(BC+B'C'-B''C'')z$$
$$-2(4CC'-B''F). \quad \text{(X)}$$

## Chapitre III.

### Application de la transformation des coordonnées à la recherche des asymptotes de l'hyperbole, de l'axe, du sommet et du paramètre de la parabole.

**11.** *Equations des asymptotes de l'hyperbole.* Notre méthode de transformation des coordonnées et l'expression d'une fonction du

second degré en valeur de ses dérivées nous permettent de déterminer les asymptotes de l'hyperbole

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0, \tag{1}$$

ainsi que l'équation de cette courbe rapportée à ses asymptotes.

Supposons d'abord que l'un au moins des carrés des deux variables se trouve dans l'équation de l'hyperbole, et que ce soit le carré de $y$; dans ce cas $A$ n'est pas nul. L'équation de la courbe peut alors se mettre sous la forme (VI) du n°. 8:

$$(2Ay + Bx + D)^2 - (B^2 - 4AC)x^2 - 2(BD - 2AE)x - (D^2 - 4AF) = 0. \tag{2}$$

Posons

$$\varphi(x) = (B^2 - 4AC)x^2 + 2(BD - 2AE)x + (D^2 - 4AF).$$

L'équation (1) étant celle d'une hyperbole, $B^2 - 4AC$ est différent de zéro et positif; $\varphi(x)$ peut donc s'exprimer en valeur de $\varphi'(x)$, c'est-à-dire que

$$\varphi(x) = \left[x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right]^2$$

$$+ \frac{(BD - 2AE)^2 - (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF)}{B^2 - 4AC} = 0;$$

de sorte que l'équation de la courbe sera

$$(2Ay + Bx + D)^2 - \left[x\sqrt{B^2 - 4AC} + \frac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right]^2$$

$$- \frac{(BD - 2AE)^2 - (B^2 - 4AC)(D^2 - 4AF)}{B^2 - 4AC} = 0,$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l} \left(2Ay + Bx + D + x\sqrt{B^2 - 4AC} + \dfrac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right) \\ \times\left(2Ay + Bx + D - x\sqrt{B^2 - 4AC} - \dfrac{BD - 2AE}{\sqrt{B^2 - 4AC}}\right) \end{array}\right\} + 4AH = 0, \tag{I}$$

si nous avons soin de poser

$$H = \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC} + F. \tag{3}$$

Prenons les deux droites

$$\left.\begin{aligned}2Ay+(B+\sqrt{B^2-4AC})x+D+\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}=0,\\ 2Ay+(B-\sqrt{B^2-4AC})x+D-\frac{BD-2AE}{\sqrt{B^2-4AC}}=0\end{aligned}\right\}\quad \text{(II)}$$

pour axes de coordonnées. Ces équations rendent les seconds membres des formules (V) du n°. 3 respectivement égaux à

$$\frac{4Ay'\sqrt{B^2-4AC}}{\sqrt{4A(A-C)+2(B-2A\cos\theta)(B-\sqrt{B^2-4AC})}},$$

$$\frac{-4Cx'\sqrt{B^2-4AC}}{\sqrt{4A(A-C)+2(B-2A\cos\theta)(B+\sqrt{B^2-4AC})}};$$

dont le produit est

$$\frac{-4A(B^2-4AC)x'y'}{\sqrt{(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)}}.$$

Mettant ce produit dans l'équation (I), on trouve

$$\frac{(B^2-4AC)x'y'}{\sqrt{(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)}}=H,$$

ou

$$x'y'=\frac{H\sqrt{(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)}}{B^2-4AC}\quad \text{(III)}$$

pour l'équation de l'hyperbole (1) rapportée aux deux axes (II).

La forme de cette équation fait voir que les deux droites (II) sont les deux asymptotes de l'hyperbole (1), et que

$$\frac{H\sqrt{(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)}}{B^2-4AC}\quad \text{(IV)}$$

est la puissance même de l'hyperbole (1).

Si $A$ et $C$ sont nuls, l'équation (1) de l'hyperbole se réduit à

$$Bxy+Dy+Ex+F=0,\quad (4)$$

qui, en vertu de (IX) du n°. 10, se change en

$$(By+D)(Bx+E)=DE-BF,\quad (5)$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\tfrac{1}{4}[B(x+y)+D+E]^2-\tfrac{1}{4}[B(x-y)-D+E]^2=DE-BF.$$

Transportons l'origine des coordonnées au point

$$p = -\frac{E}{B}, \quad q = -\frac{D}{B};$$

l'équation (5) devient

$$B^2 x'y' = DE - BF. \tag{V}$$

Ce résultat fait voir que les deux droites

$$By + D = 0, \quad Bx + E = 0 \tag{VI}$$

sont les asymptotes de l'hyperbole (4), et que

$$\frac{DE - BF}{B^2} \tag{VII}$$

est la puissance de cette hyperbole.

12. *Formation de l'équation aux asymptotes de l'hyperbole.* Multiplions entre elles, membre à membre, les deux équations (II) des asymptotes de l'hyperbole (1); nous obtenons

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex - \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC} = 0.$$

Le terme tout connu, d'après (3), est égal à $F - H$. Il vient donc

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F - H = 0, \tag{VIII}$$

pour l'équation aux asymptotes de l'hyperbole (1). Nous voyons ainsi qu'on obtient l'équation aux asymptotes de l'hyperbole, en retranchant du premier membre de l'équation de la courbe le terme tout connu, que fournit la translation de l'origine des coordonnées au centre de l'hyperbole.

Soient toujours $p$ et $q$ les coordonnées du centre de l'hyperbole (1); nous avons

$$p = \frac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}, \quad q = \frac{2CD - BE}{B^2 - 4AC};$$

d'où nous tirons

$$-\tfrac{1}{2}(pE + qD) = -\frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{B^2 - 4AC} = F - H.$$

L'équation aux asymptotes de l'hyperbole est donc aussi

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + D\left(y - \frac{q}{2}\right) + E\left(x - \frac{p}{2}\right) = 0. \tag{IX}$$

On voit donc que: Pour avoir l'équation aux asymptotes de l'hyperbole, il suffit de diminuer les premières puissances des variables des demi-coordonnées du centre et de supprimer le terme tout connu.

13. *Angle des asymptotes de l'hyperbole.* Pour avoir cet angle, nous aurons recours à la formule

$$\operatorname{tang} W = \frac{(m'' - m')\sin\theta}{1 + m'm'' + (m' + m'')\cos\theta}, \qquad (6)$$

qui donne la tangente de l'angle des deux droites

$$y = m'x, \quad y = m''x.$$

Les équations (II) des asymptotes nous donnent

$$m'' = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad m' = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A};$$

d'où nous tirons

$$m'' - m' = \frac{-\sqrt{B^2 - 4AC}}{A}, \quad m'm'' = \frac{C}{A}, \quad m'' + m' = -\frac{B}{A}.$$

Substituant ces valeurs dans (6), nous trouvons que

$$\operatorname{tang} W = \frac{-\sin\theta\sqrt{B^2 - 4AC}}{A - B\cos\theta + C}, \qquad (X)$$

et, par suite,

$$\cos W = \frac{A - B\cos\theta + C}{\sqrt{(A-C)^2 + (B - 2A\cos\theta)(B - 2C\cos\theta)}}, \qquad (XI)$$

$$\sin W = \frac{-\sin\theta\sqrt{B^2 - 4AC}}{\sqrt{(A-C)^2 + (B - 2A\cos\theta)(B - 2C\cos\theta)}}. \qquad (XII)$$

14. *Equation de l'axe de la parabole*

$$(y\sqrt{A} + x\sqrt{C})^2 + Dy + Ex + F = 0. \qquad (7)$$

Introduisons dans le carré un terme indépendant $k$; l'équation deviendra

$$(y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + k)^2 + (D - 2k\sqrt{A})y + (E - 2k\sqrt{C})x + F - k^2 = 0. \quad (8)$$

Déterminons $k$ de manière que les deux droites

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + k = 0, \qquad (9)$$

$$(D - 2k\sqrt{A})y + (E - 2k\sqrt{C})x + F - k^2 = 0 \qquad (10)$$

soient perpendiculaires. Il suffira pour cela de satisfaire à l'égalité de condition

$$1 + m'm'' + (m' + m'')\cos\theta = 0,$$

où nous avons

$$m' = -\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{A}}, \quad m'' = -\frac{E - 2k\sqrt{C}}{D - 2k\sqrt{A}}.$$

Nous obtenons ainsi l'équation

$$D\sqrt{A} + E\sqrt{C} - 2(A + C)k = (D\sqrt{C} + E\sqrt{A})\cos\theta - 4\cos\theta\sqrt{AC}.k,$$

qui donne

$$k = \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C} - (D\sqrt{C} + E\sqrt{A})\cos\theta}{2(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})}. \qquad \text{(XIII)}$$

Il vient, par suite,

$$\left.\begin{aligned} D - 2k\sqrt{A} &= \frac{(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}}, \\ E - 2k\sqrt{C} &= -\frac{(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})(\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}}; \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XIV)}$$

ce qui transforme l'équation de la parabole en

$$\left[y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \frac{D\sqrt{A} + E\sqrt{C} - (D\sqrt{C} + E\sqrt{A})\cos\theta}{2(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})}\right]^2$$
$$+ \frac{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}{A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC}}\left\{(\sqrt{C} - \cos\theta\sqrt{A})y - (\sqrt{A} - \cos\theta\sqrt{C})x\right.$$
$$+ \frac{F(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})}{D\sqrt{C} - E\sqrt{A}}$$
$$\left. - \frac{[D\sqrt{A} + E\sqrt{C} - (D\sqrt{C} + E\sqrt{A})\cos\theta]^2}{4(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})(D\sqrt{C} - E\sqrt{A})}\right\} = 0. \qquad \text{(XV)}$$

Cela obtenu, prenons pour axes de coordonnées les deux droites rectangulaires

$$y\sqrt{A} + x\sqrt{C} + \frac{\sqrt{A}(D - E\cos\theta) + \sqrt{C}(E - D\cos\theta)}{2(A + C - 2\cos\theta\sqrt{AC})} = 0, \quad \text{(XVI)}$$

$$(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})y-(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})x+\frac{F(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}$$

$$-\frac{[D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta]^2}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})}=0. \quad \text{(XVII)}$$

En vertu des formules (V) du n°. 3, l'équation (XV) de la parabole deviendra

$$(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^{\frac{3}{2}}y_1{}^2=(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sin^2\theta.x_1. \quad \text{(XVIII)}$$

La forme de cette équation prouve immédiatement que la droite (XVI) est l'axe de la parabole (7).

**15.** *Equation de la tangente au sommet.* Il en résulte aussi que la droite (XVII) est la tangente au sommet de la parabole (7).

**16.** *Paramètre de la parabole.* L'inspection de l'équation (XVIII) donne

$$2p=\frac{(D\sqrt{C}-E\sqrt{A})\sin^2\theta}{2(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^{\frac{3}{2}}}. \quad \text{(XIX)}$$

**17.** *Coordonnées du sommet.* Ce point est l'intersection des deux droites (XVI) et (XVII). En considérant les équations de ces lignes comme simultanées, on trouve

$$a=\frac{F\sqrt{A}}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}$$

$$-\frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})^2}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2}$$

$$-\frac{D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}\times\frac{D}{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}, \quad \text{(XX)}$$

$$b=\frac{F\sqrt{C}}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}$$

$$-\frac{E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})^2}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})^2}$$

$$-\frac{E(\sqrt{C}-\cos\theta\sqrt{A})+D(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})}{4(A+C-2\cos\theta\sqrt{AC})}\times\frac{E}{E\sqrt{A}-D\sqrt{C}}, \quad \text{(XXI)}$$

pour les valeurs de ces coordonnées.

## Chapitre IV.

### Théorie générale de la ligne droite et du plan dans le cas de coordonnées obliques.

18. Avant d'exposer notre méthode de transformation des coordonnées dans l'espace, nous nous proposons de résoudre, pour le cas de coordonnées obliques, toutes les questions sur la ligne droite et le plan que l'on ne traite ordinairement que dans le cas d'axes rectangulaires.

Nous chercherons d'abord les conditions de perpendicularité des plans et des droites, et, des résultats obtenus, nous déduirons plusieurs relations remarquables, qui ont lieu entre les coéfficients des équations de droites et plans perpendiculaires. Nous calculerons ensuite les expressions des distances entre les points, les droites et les plans, ainsi que les formules générales qui donnent les angles des plans et des droites. Enfin nous terminerons ces préliminaires par le calcul des équations générales de lignes droites et de plans satisfaisant à des conditions données.

Dans toute la suite, nous désignerons par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ les angles $YOZ$, $ZOX$, $XOY$ que comprennent entre eux les axes de coordonnées $OY$, $OZ$, $OX$; par $X, Y, Z$ les angles dièdres d'inclinaison mutuelle entre les plans de coordonnées, enfin par $x$, $y$, $z$ les angles $XOyz$, $YOzx$, $ZOxy$, que font les axes $OX$, $OY$, $OZ$ avec les plans $Oyz$, $Ozx$, $Oxy$. Nous représenterons toute ligne droite par un système d'équations de la forme

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c}, \tag{1}$$

où $p$, $q$, $r$ sont les coordonnées d'un point de la droite.

### §. I. Conditions de perpendicularité des droites et des plans.

19. *Conditions de perpendicularité de la droite et du plan.* Supposons que la droite issue de l'origine

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \tag{2}$$

soit perpendiculaire au plan

$$Ax+By+Cz+D=0. \tag{3}$$

Soient $P$, $Q$, $R$ les points où ce plan coupe les trois axes de coordonnées $OX$, $OY$, $OZ$; $I$ le point où il rencontre la perpendiculaire (2); et $H$, $K$, $L$ les projections orthogonales du pied $I$ sur les trois axes,

Les triangles $IOP$, $IOQ$, $IOR$ sont rectangles en $I$, et les droites $IH$, $IK$, $IL$ sont les perpendiculaires abaissées du sommet commun $I$ des angles droits sur les hypothénuses $OP$, $OQ$, $OR$. Si nous représentons $IO$ par $\delta$, nous aurons donc

$$\delta^2 = OP.OH = OQ.OK = OR.OL. \tag{4}$$

Cela établi, soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées de l'extrémité $I$ de la perpendiculaire $\delta$; nous avons, par la théorie des projections et en vertu des équations (2) de la droite,

$$OH = x + y\cos\nu + z\cos\mu = \frac{z}{c}(a + b\cos\nu + c\cos\mu),$$

$$OK = y + z\cos\lambda + x\cos\nu = \frac{z}{c}(b + c\cos\lambda + a\cos\nu),$$

$$OL = z + x\cos\mu + y\cos\lambda = \frac{z}{c}(c + a\cos\mu + b\cos\lambda);$$

et, comme l'équation du plan (3) donne

$$OP = -\frac{D}{A}, \quad OQ = -\frac{D}{B}, \quad OR = -\frac{D}{C},$$

$$\frac{z}{c} = -\frac{D}{Aa + Bb + Cc};$$

nous obtenons, en substituant dans les égalités (4),

$$(Aa + Bb + Cc)\frac{\delta^2}{D^2}$$

$$= \frac{a + b\cos\nu + c\cos\mu}{A} = \frac{b + c\cos\lambda + a\cos\nu}{B} = \frac{c + a\cos\mu + b\cos\lambda}{C}. \tag{I}$$

Telles sont les relations nécessaires et suffisantes, pour que le plan (3) soit perpendiculaire à la droite (2).

Multiplions les deux termes des trois dernières fractions (I) par les quantités respectives

$$\sin^2\lambda, \quad \cos\lambda\cos\mu - \cos\nu, \quad \cos\lambda\cos\nu - \cos\mu;$$

et ajoutons terme à terme les fractions résultantes; nous trouvons que

$$\frac{Aa + Bb + Cc}{\Delta^2} \times \frac{\delta^2}{D^2}$$

$$= \frac{a}{A\sin^2\lambda + B(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}$$

$$= \frac{b}{B\sin^2\mu + C(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)}$$

$$= \frac{c}{C\sin^2\nu + A(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)}; \tag{II}$$

où

$$\Delta^2 = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu, \qquad \text{(III)}$$

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= \sin^2\lambda\sin^2\mu - (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)^2 \\ &= \sin^2\mu\sin^2\nu - (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)^2 \\ &= \sin^2\nu\sin^2\lambda - (\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)^2; \qquad \text{(IV)}\end{aligned}$$

d'où on tire

$$\left.\begin{aligned}\Delta^2\cos\lambda &= (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu) - \sin^2\lambda(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda), \\ \Delta^2\cos\mu &= (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu) - \sin^2\mu(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu), \\ \Delta^2\cos\nu &= (\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda) - \sin^2\nu(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu).\end{aligned}\right\} \text{(V)}$$

20. ***Conditions de perpendicularité de deux plans.*** Admettons que les deux plans (3) et

$$A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad (5)$$

soient perpendiculaires entre eux. Ce second plan sera nécessairement parallèle à la droite (2), ce qui fournit une première relation

$$A'a + B'b + C'c = 0. \qquad (6)$$

La perpendicularité de la droite (2) et du plan (3) nous donne de plus les relations (II). Multiplions par les quantités respectives $a$, $b$, $c$ les deux termes de chacune des trois dernières fractions (II) et ajoutons les fractions resultantes terme à terme; nous obtenons ainsi une fraction qui devra être égale à chacune des rapports (II); or, en vertu de (6), le numérateur de cette dernière fraction est égal à zéro; il faut donc qu'il en soit de même du dénominateur. Nous trouvons ainsi la relation de condition demandée

$$\begin{aligned}&AA'\sin^2\lambda + BB'\sin^2\mu + CC'\sin^2\nu \\ &+ (AB' + BA')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \\ &+ (BC' + CB')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ &+ (CA' + AC')(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) = 0, \qquad \text{(VI)}\end{aligned}$$

qu'on peut encore mettre sous l'une ou l'autre des deux formes suivantes:

$$\begin{aligned}&A'[A\sin^2\lambda + B(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)] \\ &+ B'[B\sin^2\mu + C(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)] \\ &+ C'[C\sin^2\nu + A(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)] = 0, \qquad \text{(VII)}\end{aligned}$$

$$A[A'\sin^2\lambda + B'(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C'(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)]$$
$$+B[B'\sin^2\mu + C'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A'(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)]$$
$$+C[C'\sin^2\nu + A'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B'(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)] = 0. \quad \text{(VIII)}$$

21. ***Condition de perpendicularité de deux droites.*** Considérons les deux droites (2) et

$$\frac{x}{a'} = \frac{y}{b'} = \frac{z}{c'} \qquad (7)$$

que nous supposerons respectivement perpendiculaires aux plans (3) et (5); ces deux droites seront perpendiculaires entre elles.

Multiplions par $a'$, $b'$, $c'$ respectivement les deux termes des trois dernières fractions (I), et ajoutons les produits obtenus terme à terme. Il nous viendra ainsi une fraction équivalente aux fractions (I). Or, dans cette fraction obtenue, on a le dénominateur

$$Aa' + Bb' + Cc' = 0;$$

le numérateur sera donc aussi nul. Nous obtenons ainsi la relation de condition

$$aa' + bb' + cc'$$
$$+(bc' + cb')\cos\lambda + (ca' + ac')\cos\mu + (ab' + ba')\cos\nu = 0, \quad \text{(IX)}$$

qui exprime que les deux droites (2) et (7) sont perpendiculaires entre elles. Elle peut encore s'écrire

$$a'(a + b\cos\nu + c\cos\mu)$$
$$+ b'(b + c\cos\lambda + a\cos\nu)$$
$$+ c'(c + a\cos\mu + b\cos\lambda) = 0, \quad \text{(X)}$$

ou

$$a(a' + b'\cos\nu + c'\cos\mu)$$
$$+ b(b' + c'\cos\lambda + a'\cos\nu)$$
$$+ c(c' + a'\cos\mu + b'\cos\lambda) = 0. \quad \text{(XI)}$$

## §. II. Relations remarquables entre les coéfficients de droites et plans perpendiculaires.

22. Considérons la droite (2) et le plan (3), que nous supposerons toujours perpendiculaires entre eux. Représentons par $r$ les trois rapports égaux (I) et par $\frac{1}{R}$ chacun des rapports égaux (II). Nous avons ainsi les égalités

$$\left.\begin{aligned}a+b\cos\nu+c\cos\mu&=Ar,\\ b+c\cos\lambda+a\cos\nu&=Br,\\ c+a\cos\mu+b\cos\lambda&=Cr;\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

$$\left.\begin{aligned}A\sin^2\lambda+B(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+C(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)&=aR,\\ B\sin^2\mu+C(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+A(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu)&=bR,\\ C\sin^2\nu+A(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)+B(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda)&=cR.\end{aligned}\right\}\qquad(9)$$

Posons

$$u^2=a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu,\qquad(XII)$$

$$\begin{aligned}U^2=A^2\sin^2\lambda+B^2\sin^2\mu+C^2\sin^2\nu+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\ +2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu).\end{aligned}\qquad(XIII)$$

Si nous multiplions les équations (8) respectivement par $a, b, c$; les équations (9) respectivement par $A$, $B$, $C$; et que, chaque fois, nous ajoutions les résultats, nous trouverons

$$u^2=(Aa+Bb+Cc)r,\qquad(XIV)$$

$$U^2=(Aa+Bb+Cc)R.\qquad(XV)$$

Ces relations nous permettent de calculer les valeurs de $r$ et $R$ en fonction seule de $u$, $U$ et $\Delta$.

Les égalités (I) et (II) nous donnent d'abord

$$r=(Aa+Bb+Cc)\frac{\delta^2}{D^2},$$

$$R=\frac{\Delta^2}{Aa+Bb+Cc}\cdot\frac{D^2}{\delta^2};$$

multipliant terme à terme, on obtient

$$Rr=\Delta^2.\qquad(XVI)$$

Les équations (XIV) et (XV) nous donnent ensuite

$$\frac{R}{r}=\frac{U^2}{u^2}.\qquad(XVII)$$

Par ces deux égalités nous obtenons les valeurs

$$R=\frac{U}{u}.\Delta,\quad r=\frac{u}{U}.\Delta,\qquad(XVIII)$$

qui, étant transportées dans les relations (XIV) et (XV), fournissent l'égalité

$$Uu = (Aa + Bb + Cc)\Delta. \qquad \text{(XIX)}$$

**23.** Comparons actuellement notre système de droite (2) et plan (3) rectangulaires à un second système de droite et plan perpendiculaires (7) et (5).

En représentant, dans ce système, par $r'$ et $R'$ des quantités analogues aux rapports $r$ et $R$ du premier système, nous avons de même

$$\left.\begin{aligned} a' + b'\cos\nu + c'\cos\mu &= A'r', \\ b' + c'\cos\lambda + a'\cos\nu &= B'r', \\ c' + a'\cos\mu + b'\cos\lambda &= C'r'; \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

$$\left.\begin{aligned} A'\sin^2\lambda + B'(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C'(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu) &= a'R', \\ B'\sin^2\mu + C'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A'(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu) &= b'R', \\ C'\sin^2\nu + A'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B'(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda) &= c'R'; \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

en même temps que

$$u'^2 = (A'a' + B'b' + C'c')r'^2, \quad U'^2 = (A'a' + B'b' + C'c')R'; \qquad \text{(XX)}$$

$$R'r' = \Delta^2, \quad \frac{R'}{r'} = \frac{U'^2}{u'^2}; \qquad \text{(XXI)}$$

et

$$R' = \frac{U'}{u'}.\Delta, \quad r' = \frac{u'}{U'}.\Delta, \quad U'u' = (A'a' + B'b' + C'c')\Delta. \qquad \text{(XXII)}$$

Posons

$$v = aa' + bb' + cc' + (bc' + cb')\cos\lambda + (ca' + ac')\cos\mu + (ab' + ba')\cos\nu, \qquad \text{(XXIII)}$$

$$V = AA'\sin^2\lambda + BB'\sin^2\mu + CC'\sin^2\nu + (AB' + BA')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + (BC' + CB')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + (CA' + AC')(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu). \qquad \text{(XXIV)}$$

Cela fait, multiplions les égalités (8) respectivement par $a'$, $b'$, $c'$ et les égalités (10) respectivement par $a$, $b$, $c$; si nous ajoutons chaque fois membre à membre les résultats obtenus; nous aurons

$$v = (Aa' + Bb' + Cc')r = (A'a + B'b + C'c)r'. \qquad \text{(XXV)}$$

Multiplions ensuite les relations (9) par $A'$, $B'$, $C'$; les relations (11) par $A$, $B$, $C$; si nous faisons chaque fois la somme des produits obtenus, nous trouverons

$$V=(A'a+B'b+C'c)R=(Aa'+Bb'+Cc')R'. \qquad \text{(XXVI)}$$

Remplaçons dans ces égalités $r$, $R$ et $r'$, $R'$ par leurs valeurs (XVIII) et (XXII); puis combinons les résultats convenablement, nous obtiendrons

$$Vv=(Aa'+Bb'+Cc')^2\frac{U'u}{Uu'}.\Delta^2=(A'a+B'b+C'c)^2\frac{Uu'}{U'u}.\Delta^2$$

$$=(Aa'+Bb'+Cc')(A'a+B'b+C'c)\Delta^2; \qquad \text{(XXVII)}$$

d'où nous tirons

$$\frac{v}{uu'}=\frac{V}{UU'}=(Aa'+Bb'+Cc').\frac{\Delta}{Uu'}=(A'a+B'b+C'c).\frac{\Delta}{U'u}. \text{(XXVIII)}$$

24. On sait que les deux plans, menés par l'origine parallèlement à (3) et (5), se coupent suivant la droite

$$\frac{x}{BC'-CB'}=\frac{y}{CA'-AC'}=\frac{z}{AB'-BA'}, \qquad (12)$$

perpendiculaire au plan

$$(bc'-cb')x+(ca'-ac')y+(ab'-ba')z=0 \qquad (13)$$

conduit suivant les deux droites (2) et (7). Nous avons ainsi un troisième système de droite et plan perpendiculaires, qui, de même que les deux précédents, donne

$$\left.\begin{aligned}(BC'-CB')+(CA'-AC')\cos\nu+(AB'-BA')\cos\mu&=(bc'-cb')S,\\(CA'-AC')+(AB'-BA')\cos\lambda+(BC'-CB')\cos\nu&=(ca'-ac')S,\\(AB'-BA')+(BC'-CB')\cos\mu+(CA'-AC')\cos\lambda&=(ab'-ba')S;\end{aligned}\right\}(14)$$

et

$$\left.\begin{aligned}&(bc'-cb')\sin^2\lambda+(ca'-ac')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\&\qquad+(ab'-ba')(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)=(BC'-CB')s,\\&(ca'-ac')\sin^2\mu+(ab'-ba')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\&\qquad+(bc'-cb')(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu)=(CA'-AC')s,\\&(ab'-ba')\sin^2\nu+(bc'-cb')(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\&\qquad+(ca'-ac')(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda)=(AB'-BA')s;\end{aligned}\right\}(15)$$

où $S$ et $s$ désignent des quantités analogues à $r$ et $R$, de sorte qu'on a

$$Ss = \Delta^2. \qquad \text{(XXIX)}$$

Nous pouvons, du reste, déterminer $S$, $s$ en fonction de $U$, $U'$, $u$, $u'$ et $\Delta$. Calculons d'abord la valeur de $s$. Il nous suffira, pour cela, de déterminer l'expression de la différence

$$(BC' - CB')rr'$$

à l'aide des deux dernières des relations (8) et (10); or cette expression est identiquement égale au premier membre de la première des équations (15); par conséquent, nous avons

$$s = rr' = \frac{uu'}{UU'} \cdot \Delta^2. \qquad \text{(XXX)}$$

Substituant cette valeur dans la relation (XXIX), nous trouvons que

$$S = \frac{RR'}{\Delta^2} = \frac{UU'}{uu'}. \qquad \text{(XXXI)}$$

Cela trouvé, posons

$$\begin{aligned} W^2 = (BC' - CB')^2 &+ (CA' - AC')^2 + (AB' - BA')^2 \\ &+ 2(CA' - AC')(AB' - BA')\cos\lambda \\ &+ 2(AB' - BA')(BC' - CB')\cos\mu \\ &+ 2(BC' - CB')(CA' - AC')\cos\nu, \end{aligned} \qquad \text{(XXXII)}$$

$$\begin{aligned} w^2 = (bc' - cb')^2\sin^2\lambda &+ (ca' - ac')^2\sin^2\mu + (ab' - ba')\sin^2\nu \\ &+ 2(bc' - cb')(ca' - ac')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \\ &+ 2(ca' - ac')(ab' - ba')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ &+ 2(ab' - ba')(bc' - cb')(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu). \end{aligned} \qquad \text{(XXXIII)}$$

Multiplions les égalités (14) respectivement par $BC' - CB'$, $CA' - AC'$, $AB' - BA'$, et ajoutons les produits membre à membre; nous trouverons que

$$\begin{aligned} \frac{W^2}{S} = &(Aa + Bb + Cc)(A'a' + B'b' + C'c') \\ &- (Aa' + Bb' + Cc')(A'a + B'b + C'c), \end{aligned}$$

ou, en vertu de (XIX), (XXII) et (XXVIII),

$$W^2 = \left(\frac{UU' \cdot uu'}{\Delta^2} - \frac{V^2}{\Delta^2} \cdot \frac{uu'}{UU'}\right) S;$$

et, en réduisant à l'aide de (XXXI),

$$W^2 \Delta^2 = U^2 U'^2 - V^2. \qquad \text{(XXXIV)}$$

Multiplions ensuite les relations (15) respectivement par $bc' - cb'$, $ca' - ac'$, $ab' - ba'$, et ajoutons les résultats membre à membre; il nous viendra

$$\frac{w^2}{s} = (Aa + Bb + Cc)(A'a' + B'b' + C'c') - (Aa' + Bb' + Cc')(A'a + B'b + C'c),$$

ou, comme précédemment,

$$w^2 = \left(\frac{UU'.uu'}{\Delta^2} - \frac{v^2}{\Delta^2}\cdot\frac{UU'}{uu'}\right)s;$$

et, en réduisant à l'aide de (XXX),

$$w^2 = u^2 u'^2 - v^2. \qquad \text{(XXXV)}$$

Nous voyons en même temps que

$$\frac{W^2}{S} = \frac{w^2}{s},$$

ou bien

$$\frac{W}{UU'} = \frac{w}{uu'.\Delta}. \qquad \text{(XXXVI)}$$

## §. III. Distances entre les points, les droites et les plans.

25. *Distance de l'origine à un point.* Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées d'un point $M$; $\delta$ la distance $OM$; et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que fait cette droite avec les axes de coordonnées. La méthode des projections nous donne

$$\delta = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma; \qquad (16)$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\cos\alpha &= x + y\cos\nu + z\cos\mu, \\ \delta\cos\beta &= y + z\cos\lambda + x\cos\nu, \\ \delta\cos\gamma &= z + x\cos\mu + y\cos\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Multiplions les deux membres de ces égalités par les quantités respectives $\delta$, $x$, $y$, $z$, et ajoutons les résultats membre à membre; nous trouvons

$$\delta^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu. \qquad \text{(XXXVII)}$$

26. *Distance de deux points.* Considérons un second point $M'$, dont les coordonnées soient $x'$, $y'$, $z'$; transportons l'origine en

ce point; et soient $x_1$, $y_1$, $z_1$ les nouvelles coordonnées du point $M$. Nous avons

$$\delta^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 2y_1z_1 \cos\lambda + 2z_1x_1 \cos\mu + 2x_1y_1 \cos\nu;$$

mais, puisque

$$x = x_1 + x', \quad y = y_1 + y', \quad z = z_1 + z',$$

on a

$$x_1 = x - x', \quad y_1 = y - y', \quad z_1 = z - z';$$

de sorte qu'il vient

$$\delta^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(y-y')(z-z')\cos\lambda$$
$$+ 2(z-z')(x-x')\cos\mu + 2(x-x')(y-y')\cos\nu. \quad \text{(XXXVIII)}$$

27. *Distance de l'origine à un plan.* Le plan étant représentée par l'équation (3), et sa distance à l'origine par la racine carrée des expressions (4), la distance demandée sera fournie par les équations (II). Pour en avoir la valeur, multiplions les trois dernières fractions (II) respectivement par $A$, $B$, $C$ et ajoutons les fractions résultantes terme à terme; nous trouverons, après avoir effectué toutes les réductions évidentes et en ayant égard aux notations (III) et (XIII),

$$\delta = \frac{D\Delta}{U}. \quad \text{(XXXIX)}$$

28. *Distance d'un point à un plan.* Transportons l'origine au point donné, déterminé par les coordonnées $x'$, $y'$, $z'$; l'équation (3) du plan deviendra

$$Ax + By + Cz + (Ax' + By' + Cz' + D) = 0,$$

la distance de la nouvelle origine ou du point donné au plan (3) sera donc

$$\delta = (Ax' + By' + Cz' + D)\frac{\Delta}{U}. \quad \text{(XL)}$$

29. *Distances d'un point aux plans de coordonnées.* Le plan (3) se confondra avec le plan des $yz$, si l'on a $B=0$, $C=0$, $D=0$. Dans ce cas le dénominateur $U$ se réduit à $\Delta \sin\lambda$; de sorte que

$$\delta_1 = \frac{\Delta x'}{\sin\lambda} \quad \text{(XLI)}$$

est la distance du point donné au plan des $yz$. On trouve de même que

$$\delta_2 = \frac{\Delta y'}{\sin\mu}, \quad \delta_3 = \frac{\Delta z'}{\sin\nu} \quad \text{(XLII)}$$

sont les distances du point donné aux plans des $zx$ et des $xy$.

**30.** *Distance d'un point à une droite.* Soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées du point $M$, dont il faut déterminer la distance à la droite (1).

Du point $M$ abaissons sur la droite la perpendiculaire $MP$, et joignons le point $M$ au point $N$ de la droite dont les coordonnées sont $p$, $q$, $r$. Si nous posons

$$MP = \delta, \quad MN = P, \quad \text{angle } MNP = \theta,$$

nous aurons

$$\delta^2 = P^2 \sin^2\theta,$$

en même temps que, en vertu de (XXXVIII),

$$P^2 = (x'-p)^2 + (y'-q)^2 + (z'-r)^2$$
$$+ 2(y'-q)(z'-r)\cos\lambda + 2(z'-r)(x'-p)\cos\mu + 2(x'-p)(y'-q)\cos\nu,$$

et

$$u^2P^2\sin^2\theta = T^2 = (bz'-cy'+cq-br)^2\sin^2\lambda + (cx'-az'+ar-cp)^2\sin^2\mu$$
$$+ (ay'-bx'+bp-aq)^2\sin^2\nu$$
$$+ 2(bz'-cy'+cq-br)(cx'-az'+ar-cp)(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)$$
$$+ 2(cx'-az'+ar-cp)(ay'-bx'+bp-aq)(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)$$
$$+ 2(ay'-bx'+bp-aq)(bz'-cy'+cq-br)(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu). \quad \text{(XLIII)}$$

La distance cherchée sera donc

$$\delta = \frac{T}{u}. \quad \text{(XLIV)}$$

**31.** *Distance de l'origine à une droite.* Elle s'obtient en annulant $x'$, $y'$, $z'$ dans les formules (XLIII) et (XLIV). On trouve ainsi

$$T^2 = (cq-br)^2\sin^2\lambda + (ar-cp)^2\sin^2\mu + (bp-aq)^2\sin^2\nu$$
$$+ 2(cq-br)(ar-cp)(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)$$
$$+ 2(ar-cp)(bp-aq)(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)$$
$$+ 2(bp-aq)(cq-br)(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu). \quad \text{(XLV)}$$

**32.** *Distance d'un point à une droite menée par l'origine.* Pour la trouver, il nous suffira de faire $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ dans l'expression (XLIII). Nous obtenons ainsi

$$T^2 = (cy'-bz')^2\sin^2\lambda + (az'-cx')^2\sin^2\mu + (bx'-ay')^2\sin^2\nu$$
$$+2(cy'-bz')(az'-cx')(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu)$$
$$+2(az'-cx')(bx'-ay')(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda)$$
$$+2(bx'-ay')(cy'-bz')(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu). \qquad \text{(XLVI)}$$

33. ***Distances d'un point aux axes de coordonnées.*** L'axe des $x$ est représenté par les équations $y=0$, $z=0$. Si donc, nous annulons $b$ et $c$ dans la valeur (XLIII), nous trouverons que

$$\frac{T^2}{a^2} = y'^2\sin^2\nu + z'^2\sin^2\mu - 2y'z'(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda);$$

et, comme, dans ce cas, $u=0$, il vient pour la distance du point $x'$, $y'$, $z'$ à l'axe des $x$,

$$X^2 = y'^2\sin^2\nu + z'^2\sin^2\mu - 2y'z'(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda). \qquad \text{(XLVII)}$$

Nous trouverions de même, pour les distances aux axes des $y$ et des $z$,

$$Y^2 = z'^2\sin^2\lambda + x'^2\sin^2\nu - 2z'x'(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu),$$
$$Z^2 = x'^2\sin^2\mu + y'^2\sin^2\lambda - 2x'y'(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu).$$

34. ***Plus courte distance de deux droites.*** Supposons que ces droites soient représentées par les équations (1) et

$$\frac{x-p'}{a'} = \frac{y-q'}{b'} = \frac{z-r'}{c'}. \qquad (18)$$

Par la deuxième droite menons un plan parallèle à la première; son équation sera

$$(bc'-cb')(x-p') + (ca'-ac')(y-q') + (ab'-ba')(z-r') = 0.$$

Il suffira maintenant de déterminer la distance du point $p$, $q$, $r$ de la première droite à ce plan. Nous trouvons ainsi que

$$\delta = \frac{\Delta n}{w}, \qquad \text{(XLVIII)}$$

où nous avons

$$n = (bc'-cb')(p-p') + (ca'-ac')(q-q') + (ab'-ba')(r-r'). \qquad \text{(XLIX)}$$

35. ***Plus courte distance d'une droite aux axes de coordonnées.*** Supposons que la seconde droite soit l'axe des $x$; ses équations seront $y=0$, $z=0$; de sorte qu'on a

$$b'=0,\quad c'=0,\quad p'=0,\quad q'=0,\quad r'=0.$$

Dans ce cas $w$ deviendra

$$a^2\left[b^2\sin^2\nu + c^2\sin^2\mu - 2bc(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)\right],$$

pendant que $n$ se réduira à $a'(cq-br)$. Nous aurons donc pour la distance de la droite à l'axe des $x$,

$$X = \frac{(cq-br)\Delta}{\sqrt{b^2\sin^2\nu + c^2\sin^2\mu - 2bc(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)}}. \qquad \text{(L)}$$

Nous trouverions semblablement

$$Y = \frac{(ar-cp)\Delta}{\sqrt{c^2\sin^2\lambda + a^2\sin^2\nu - 2ca(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}},$$

$$Z = \frac{(bp-aq)\Delta}{\sqrt{a^2\sin^2\mu + b^2\sin^2\lambda - 2ab(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)}}.$$

## §. IV. Angles des plans et des droites.

36. ***Cosinus de l'angle de deux droites.*** Soient (2) et (7) les équations des deux droites; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ les angles qu'elles font avec les trois axes de coordonnées et $\theta$ leur angle d'inclinaison mutuelle. Considérons sur ces droites les points $M$ et $M'$ dont les coordonnées respectives sont $a$, $b$, $c$ et $a'$, $b'$, $c'$; et posons $OM = u$, $OM' = u'$. Nous avons, par la théorie des projections,

$$\left.\begin{aligned} u &= a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma, \\ u\cos\alpha &= a + b\cos\nu + c\cos\mu, \\ u\cos\beta &= b + c\cos\lambda + a\cos\nu, \\ u\cos\gamma &= c + a\cos\mu + b\cos\lambda; \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

$$\left.\begin{aligned} u' &= a'\cos\alpha' + b'\cos\beta' + c'\cos\gamma', \\ u'\cos\alpha' &= a' + b'\cos\nu + c'\cos\mu, \\ u'\cos\beta' &= b' + c'\cos\lambda + a'\cos\nu, \\ u'\cos\gamma' &= c' + a'\cos\mu + b'\cos\lambda. \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

Multiplions les quatre premières égalités par $u$, $a$, $b$, $c$; les quatre suivantes par $u'$, $a'$, $b'$, $c'$, et ajoutons chaque fois les résultats membre à membre, nous trouvons l'égalité (XII) et son analogue par rapport à $u'$.

Cela trouvé, projetons la droite $OM'$ sur $OM$; nous obtenons

$$u'\cos\theta = a'\cos\alpha + b'\cos\beta + c'\cos\gamma.$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $u'$, et les trois dernières (19) respectivement par $a'$, $b'$, $c'$; puis ajoutons membre à membre. Nous aurons, en réduisant,

$$uu'\cos\theta = \left\{\begin{array}{l} a'(a+b\cos\nu+c\cos\mu) \\ +b'(b+c\cos\lambda+a\cos\nu) \\ +c'(c+a\cos\mu+b\cos\lambda) \end{array}\right. = \left\{\begin{array}{l} a(a'+b'\cos\nu+c'\cos\mu) \\ +b(b'+c'\cos\lambda+a'\cos\nu) \\ +c(c'+a'\cos\mu+b'\cos\lambda), \end{array}\right\} \quad \text{(LI)}$$

ou

$$\cos\theta = \frac{v}{uu'}. \quad \text{(LII)}$$

c'est-à-dire

(LIII)

$$\cos\theta = \frac{aa'+bb'+cc'+(bc'+cb')\cos\lambda+(ca'+ac')\cos\mu+(ab'+ba')\cos\nu}{\left\{\begin{array}{l}\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu} \\ \times\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2+2b'c'\cos\lambda+2c'a'\cos\mu+2a'b'\cos\nu}\end{array}\right\}}.$$

**37.** *Cosinus des angles d'une droite avec les axes de coordonnées.* Si la seconde droite se confond avec l'axe des $x$, il faudra que $b'=0$, $c'=0$. Cette hypothèse réduit la formule précédente à

$$\cos\alpha = \frac{a+b\cos\nu+c\cos\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}}. \quad \text{(LIV)}$$

On trouverait de même

$$\left.\begin{array}{l} \cos\beta = \dfrac{b+c\cos\lambda+a\cos\nu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}}, \\ \cos\gamma = \dfrac{c+a\cos\mu+b\cos\lambda}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}}. \end{array}\right\} \quad \text{(LV)}$$

**38.** *Sinus de l'angle de deux droites.* Ce sinus est

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\sqrt{u^2u'^2-v^2}}{uu'},$$

et, en vertu de la formule (XXXV),

$$\sin\theta = \frac{w}{uu'}. \quad \text{(LVI)}$$

Mettant à la place de $w$, $u$, $u'$ leurs valeurs (XXXIII) et (XII), nous trouvons que

(LVII)

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{\begin{array}{l}(bc'-cb')^2\sin^2\lambda+2(ca'-ac')(ab'-ba')(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda)\\+(ca'-ac')^2\sin^2\mu+2(ab'-ba')(bc'-cb')(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)\\+(ab'-ba')^2\sin^2\nu+2(bc'-cb')(ca'-ac')(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu)\end{array}}}{\sqrt{\begin{array}{l}a^2+2bc\cos\lambda\\+b^2+2ca\cos\mu\\+c^2+2ab\cos\nu\end{array}}\sqrt{\begin{array}{l}a'^2+2b'c'\cos\lambda\\+b'^2+2c'a'\cos\mu\\+c'^2+2a'b'\cos\nu\end{array}}}.$$

39. ***Sinus des angles d'une droite avec les axes de coordonnées.*** Supposons que la droite

$$\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}$$

se confonde avec l'axe des $x$; on devra avoir $b'=0$, $c'=0$. Introduisant cette hypothèse dans la formule (LVII), on la change en

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{b^2\sin^2\nu+c^2\sin^2\mu+2bc(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}}. \quad \text{(LVIII)}$$

On aurait de même

$$\left.\begin{array}{l}\sin\beta=\dfrac{\sqrt{c^2\sin^2\lambda+a^2\sin^2\nu+2ca(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}},\\ \sin\gamma=\dfrac{\sqrt{a^2\sin^2\mu+b^2\sin^2\nu+2ab(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}}.\end{array}\right\} \quad \text{(LIX)}$$

40. ***Sinus de l'angle d'une droite et d'un plan.*** Si

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \quad Ax+By+Cz=0 \qquad (21)$$

sont les équations de la droite et du plan, le sinus de l'angle cherché $\theta$ sera égal au cosinus de l'angle compris entre la droite (21) et la droite

$$\frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'}$$

supposée perpendiculaire au plan (21). Nous avons, par suite,

$$\sin\theta=\frac{v}{uu'}.$$

Remplaçant $\frac{v}{uu'}$ par sa valeur (XXVIII), où il faudra supprimer les accents de $A'$, $B'$, $C'$, nous obtenons

$$\sin\theta = \frac{Aa+Bb+Cc}{U}\cdot\frac{\Delta}{u}, \tag{LX}$$

ou

$$\sin\theta = \frac{Aa+Bb+Cc}{\sqrt{\begin{matrix}A^2\sin^2\lambda + B^2\sin^2\mu + C^2\sin^2\nu + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)\\ +2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)\end{matrix}}}$$

$$\times\frac{\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}}. \tag{LXI}$$

41. *Sinus des angles que fait une droite avec les plans de coordonnées.* Désignons par $l$, $m$, $n$ les angles que fait la droite (21) avec les plans de coordonnées. Si le plan (21) se confond avec le plan des $yz$, il faudra que l'on ait $B=0$, $C=0$. La formule précédente devient ainsi

$$\sin l = \frac{a\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sin\lambda\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}} = \frac{a\Delta}{u\sin\lambda}. \tag{LXII}$$

On aurait de même

$$\sin m = \frac{b\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sin\mu\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}} = \frac{b\Delta}{u\sin\mu},$$

$$\sin n = \frac{c\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sin\nu\sqrt{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}} = \frac{c\Delta}{u\sin\nu}.$$

42. *Sinus des angles que fait un plan avec les axes de coordonnées.* Nous désignerons ces angles par a, b, c. Si la droite (21) se confond avec l'axe des $x$, nous aurons $b=0$, $c=0$; ce qui donne

$$\sin \mathrm{a} = \frac{A\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sqrt{\begin{matrix}A^2\sin^2\lambda+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\ +B^2\sin^2\mu+2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\ +C^2\sin^2\nu+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\end{matrix}}} = \frac{A\Delta}{U}. \tag{LXIII}$$

On a, d'une manière analogue,

$$\sin \mathrm{b} = \frac{B\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sqrt{\begin{matrix}A^2\sin^2\lambda+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\ +B^2\sin^2\mu+2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\ +C^2\sin^2\nu+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\end{matrix}}} = \frac{B\Delta}{U},$$

$$\sin c = \frac{C\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sqrt{\begin{array}{l}A^2\sin^2\lambda+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\+B^2\sin^2\mu+2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\+C^2\sin^2\nu+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\end{array}}} = \frac{C}{\ldots}$$

43. ***Sinus des angles que font les axes de coordo avec les plans de coordonnées.*** Représentons ces angles $Xyz$, $Yzx$, $Zxy$. La droite (21) étant supposée confondue avec des $x$, on a $b=0$, $c=0$; ce qui réduit la formule (LVIII) à

$$\sin Xyz = \frac{\Delta}{\sin\lambda}.$$

On trouve ainsi, en général, que

$$\sin Xyz \sin\lambda = \sin Yzx \sin\mu = \sin Zxy \sin\nu$$

$$= \Delta = \sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}. \quad (\ldots$$

44. ***Cosinus de l'angle de deux plans.*** Supposons qu deux plans

$$Ax+By+Cz=0, \quad A'x+B'y+C'z=0$$

soient perpendiculaires aux droites

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \quad \frac{x}{a'}=\frac{y}{b'}=\frac{z}{c'};$$

leur angle $\theta$ sera égal à celui de ces droites. Nous avons, par séquent, en vertu de (XXVIII)

$$\cos\theta = \frac{v}{uu'} = \frac{V}{UU'} \quad (\ldots$$

ou

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{\begin{array}{l}AA'\sin^2\lambda+(BC'+CB')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\+BB'\sin^2\mu+(CA'+AC')(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\+CC'\sin^2\nu+(AB'+BA')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\end{array}}}{\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\begin{array}{l}A^2\sin^2\lambda+2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\+B^2\sin^2\mu+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\+C^2\sin^2\nu+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\end{array}}\\ \times\sqrt{\begin{array}{l}A'^2\sin^2\lambda+2B'C'(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\+B'^2\sin^2\mu+2C'A'(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\+C'^2\sin^2\nu+2A'B'(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\end{array}}\end{array}\right\}}. \quad (\mathrm{L}\ldots$$

45. *Cosinus des angles d'un plan avec les plans de coordonnées.* Représentons ces angles par $L, M, N$. En posant $B'=0$, $C'=0$ dans la formule (LXVI), on en tire

(LXVII)

$$\cos L = \frac{A\sin^2\lambda + B(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}{\sin\lambda\sqrt{\begin{array}{l}A^2\sin^2\lambda + B^2\sin^2\mu + C^2\sin^2\nu + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\\ +2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)\end{array}}}.$$

On a de même

$$\cos M = \frac{B\sin^2\mu + C(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)}{\sin\mu\sqrt{\begin{array}{l}A^2\sin^2\lambda + B^2\sin^2\mu + C^2\sin^2\nu + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\\ +2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)\end{array}}},$$

$$\cos N = \frac{C\sin^2\nu + A(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)}{\sin\nu\sqrt{\begin{array}{l}A^2\sin^2\lambda + B^2\sin^2\mu + C^2\sin^2\nu + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\\ +2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)\end{array}}}.$$

46. *Cosinus des angles des plans de coordonnées.* Désignons ces angles par $X, Y, Z$. Pour avoir $\cos Z$, il faudra faire $A=0$, $B=0$ dans la formule précédente. Nous trouvons ainsi que

$$\cos Z = \frac{\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu}{\sin\lambda\sin\mu}; \qquad \text{(LXVIII)}$$

et de même

$$\cos X = \frac{\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda}{\sin\mu\sin\nu},$$

$$\cos Y = \frac{\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu}{\sin\nu\sin\lambda}.$$

47. *Sinus de l'angle de deux plans.* Le sinus de l'angle des deux plans (22) est égal à

$$\sqrt{1 - \frac{V^2}{U^2U'^2}} = \frac{\sqrt{U^2U'^2 - V^2}}{UU'}.$$

Mettant dans cette expression la valeur (XXXIV), nous trouvons que

$$\sin\theta = \frac{W\Delta}{UU'}, \qquad \text{(LXIX)}$$

ou

(LXX)

$$\sin\theta = \frac{\left\{\sqrt{\begin{array}{l}(BC'-CB')^2+2(CA'-AC')(AB'-BA')\cos\lambda \\ +(CA'-AC')^2+2(AB'-BA')(BC'-CB')\cos\mu \\ +(AB'-BA')^2+2(BC'-CB')(CA'-AC')\cos\nu\end{array}} \\ \times\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}\right\}}{\left\{\sqrt{\begin{array}{l}A^2\sin^2\lambda+2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\ +B^2\sin^2\mu+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\ +C^2\sin^2\nu+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\end{array}} \\ \times\sqrt{\begin{array}{l}A'^2\sin^2\lambda+2B'C'(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\ +B'^2\sin^2\mu+2C'A'(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\ +C'^2\sin^2\nu+2A'B'(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\end{array}}\right\}}.$$

48. *Sinus des angles d'un plan avec les plans de coordonnées.* Le second des deux plans (22) se confondra avec le plan des $yz$, si l'on a $B'=0$, $C'=0$. Cette hypothèse réduira la formule (LXX) à la suivante

$$\sin L = \frac{\varDelta\sqrt{B^2+C^2-2BC\cos\lambda}}{U\sin\lambda}. \qquad \text{(LXXI)}$$

On trouverait de même

$$\sin M = \frac{\varDelta\sqrt{C^2+A^2-2CA\cos\mu}}{U\sin\mu},$$

$$\sin N = \frac{\varDelta\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}}{U\sin\nu}.$$

49. *Sinus des angles des plans de coordonnées.* L'angle $L$ deviendra l'angle $Z$, si le premier des deux plans se confond avec le plan des $xz$. En faisant donc $A=0$, $C=0$, on trouve

$$\sin Z = \frac{\sqrt{1-\cos^2\lambda-\cos^2\mu-\cos^2\nu+2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}}{\sin\lambda\sin\mu},$$

ou, en général,

$$\sin X\sin\mu\sin\nu = \sin Y\sin\nu\sin\lambda = \sin Z\sin\lambda\sin\mu = \varDelta. \qquad \text{(LXXII)}$$

## §. V. Equations des droites et plans perpendiculaires.

50. *Droite perpendiculaire au plan.* Le plan étant représenté par l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{23}$$

la droite abaissée de l'origine perpendiculairement sur ce plan sera déterminée par les équations

$$\frac{x}{A\sin^2\lambda + B(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}$$

$$= \frac{y}{B\sin^2\mu + C(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)}$$

$$= \frac{z}{C\sin^2\nu + A(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)}. \tag{LXXIII}$$

Pour avoir les coordonnées du pied de la perpendiculaire, nous multiplions les deux termes de la première fraction par $A$, ceux de la seconde par $B$, ceux de la troisième par $C$, et nous ajoutons terme à terme; nous trouvons ainsi que ces fractions sont équivalentes à

$$\frac{Ax + By + Cz}{U^2} = -\frac{D}{U^2}.$$

Le pied de la perpendiculaire a donc pour coordonnées

$$\left.\begin{aligned}
x &= -\frac{D}{U^2}\cdot[A\sin^2\lambda + B(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + C(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)],\\
y &= -\frac{D}{U^2}\cdot[B\sin^2\mu + C(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + A(\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)],\\
z &= -\frac{D}{U^2}\cdot[C\sin^2\nu + A(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) + B(\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)].
\end{aligned}\right\} \tag{LXXIV}$$

Si la perpendiculaire devait être abaissée du point $x'$, $y'$, $z'$, il suffirait de transporter en ce point l'origine des coordonnées, l'équation du plan se changerait ainsi en

$$Ax + By + Cz = -(Ax' + By' + Cz' + D)$$

et les coordonnées du pied de la perpendiculaire, rapportées à la première origine seraient

$$\left.\begin{aligned}
x&=x'-\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{U^2}\\
&\times[A\sin^2\lambda+B(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+C(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)],\\
y&=y'-\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{U^2}\\
&\times[B\sin^2\mu+C(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+A(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu)],\\
z&=z'-\frac{Ax'+By'+Cz'+D}{U^2}\\
&\times[C\sin^2\nu+A(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)+B(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda)].
\end{aligned}\right\}\text{(LXXV)}$$

51. *Plan perpendiculaire à une droite.* La droite étant donnée par

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c},$$

l'équation du plan perpendiculaire conduit par l'origine sera

$$(a+b\cos\nu+c\cos\mu)x+(b+c\cos\lambda+a\cos\nu)y$$
$$+(c+a\cos\mu+b\cos\lambda)z=0. \quad \text{(LXXVI)}$$

Les coordonnées du pied de la perpendiculaire s'obtiennent en multipliant les termes des fractions, qui forment les équations de la droite, respectivement par

$$a+b\cos\nu+c\cos\mu,$$
$$b+c\cos\lambda+a\cos\nu,$$
$$c+a\cos\mu+b\cos\lambda$$

et en ajoutant les fractions résultantes terme à terme. Le pied de la perpendiculaire sera ainsi déterminé par les coordonnées

$$\left.\begin{aligned}
x&=p+\frac{a}{u^2}\times[(a+b\cos\nu+c\cos\mu)p\\
&\quad+(b+c\cos\lambda+a\cos\nu)q+(c+a\cos\mu+b\cos\lambda)r],\\
y&=q+\frac{b}{u^2}\times[(a+b\cos\nu+c\cos\mu)p\\
&\quad+(b+c\cos\lambda+a\cos\nu)q+(c+a\cos\mu+b\cos\lambda)r],\\
z&=r+\frac{c}{u^2}\times[(a+b\cos\nu+c\cos\mu)p\\
&\quad+(b+c\cos\lambda+a\cos\nu)q+(c+a\cos\mu+b\cos\lambda)r].
\end{aligned}\right\}\text{(LXXVII)}$$

Si le plan devait passer par le point $x'$, $y'$, $z'$, l'équation du plan perpendiculaire serait

$$(a+b\cos\nu+c\cos\mu)(x-x')+(b+c\cos\lambda+a\cos\nu)(y-y')$$
$$+(c+a\cos\mu+b\cos\lambda)(z-z')=0; \qquad \text{(LXXVIII)}$$

et le point d'intersection de la droite et du plan aurait pour coordonnées

$$x=p+\frac{a}{u^2}.K,\quad y=q+\frac{b}{u^2}.K,\quad z=r+\frac{c}{u^2}.K, \qquad \text{(LXXIX)}$$

où

$$K=(a+b\cos\nu+c\cos\mu)(p-x')+(b+c\cos\lambda+a\cos\nu)(q-y')$$
$$+(c+a\cos\mu+b\cos\lambda)(z-z'). \qquad \text{(LXXX)}$$

52. *Plan perpendiculaire à un plan.* Par la droite

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c}$$

proposons-nous de mener un plan perpendiculaire au plan

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Tout plan, qui passe par la droite donnée, peut être représenté par l'équation

$$\frac{m(x-p)}{a}+\frac{n(y-q)}{b}-\frac{(m+n)(z-r)}{c}=0,$$

où $m$ et $n$ sont deux indéterminées. Ce plan devant être perpendiculaire au plan proposé, nous avons la relation de condition

$$\frac{mP}{a}+\frac{nQ}{b}-\frac{(m+n)R}{c}=0,$$

que l'on peut écrire

$$m\left(\frac{R}{c}-\frac{P}{a}\right)=n\left(\frac{Q}{b}-\frac{R}{c}\right), \qquad (24)$$

et où l'on a

$$P=A\sin^2\lambda+B(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)+C(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu),$$
$$Q=B\sin^2\mu+C(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)+A(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu),$$
$$R=C\sin^2\nu+A(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)+B(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda).$$

Or on satisfait à la condition (24), en posant

$$m = \frac{Q}{b} - \frac{R}{c}, \quad n = \frac{R}{c} - \frac{P}{a},$$

d'où on tire

$$-(m+n) = \frac{P}{a} - \frac{Q}{b}.$$

Le plan démandé est donc

$$\left(\frac{Q}{b} - \frac{R}{c}\right)\frac{x-p}{a} + \left(\frac{R}{c} - \frac{P}{a}\right)\frac{y-q}{b} + \left(\frac{P}{a} - \frac{Q}{b}\right)\frac{z-r}{c} = 0, \quad \text{(LXXXI)}$$

ou bien

$$(Qc - Rb)(x-p) + (Ra - Pc)(y-q) + (Pb - Qa)(z-r) = 0. \quad \text{(LXXXII)}$$

53. *Droite perpendiculaire à une droite.* Nous nous proposons d'abaisser du point $x'$, $y'$, $z'$ une perpendiculaire sur la droite

$$\frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c}, \tag{25}$$

et de déterminer les coordonnées du pied de cette perpendiculaire.

La droite cherchée, passant par le point $x'$, $y'$, $z'$, est représentée par des équations de la forme

$$\frac{x-x'}{A} = \frac{y-y'}{B} = \frac{z-z'}{C}. \tag{26}$$

Comme cette ligne est perpendiculaire à la droite donnée (25), on a déjà, pour déterminer $A$, $B$, $C$, la première relation de condition

$$A(a + b\cos\nu + c\cos\mu) + B(b + c\cos\lambda + a\cos\mu)$$
$$+ C(c + a\cos\mu + b\cos\lambda) = 0. \tag{27}$$

La ligne (26) devant aussi rencontrer la droite (25), on a une deuxième relation de condition

$$\left(\frac{A}{a} - \frac{C}{c}\right)\left(\frac{y'-q}{b} - \frac{z'-r}{c}\right) = \left(\frac{B}{b} - \frac{C}{c}\right)\left(\frac{x'-p}{b} - \frac{z'-r}{c}\right). \tag{28}$$

La résolution des deux équations (27) et (28) donne...

$$\left.\begin{aligned}
Ak &= \left(\frac{x'-p}{a} - \frac{y'-q}{b}\right)\left(\frac{b + c\cos\lambda + a\cos\mu}{c}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{x'-p}{a} - \frac{z'-r}{c}\right)\left(\frac{c + a\cos\mu + b\cos\lambda}{b}\right), \\
Bk &= \left(\frac{y'-q}{b} - \frac{z'-r}{c}\right)\left(\frac{c + a\cos\mu + b\cos\lambda}{a}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{y'-q}{b} - \frac{x'-p}{a}\right)\left(\frac{a + b\cos\nu + c\cos\mu}{c}\right), \\
Ck &= \left(\frac{z'-r}{c} - \frac{x'-p}{a}\right)\left(\frac{a + b\cos\lambda + c\cos\mu}{b}\right) \\
&\qquad + \left(\frac{z'-r}{c} - \frac{y'-q}{b}\right)\left(\frac{b + c\cos\lambda + a\cos\nu}{a}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

Les équations de la perpendiculaire demandée sont donc

(LXXXIII)

$$\frac{x - x'}{\left(\frac{x'-p}{a} - \frac{y'-q}{b}\right)\left(\frac{b+c\cos\lambda+a\cos\mu}{c}\right) + \left(\frac{x'-p}{a} - \frac{z'-r}{c}\right)\left(\frac{c+a\cos\mu+b\cos\lambda}{b}\right)}$$

$$= \frac{y - y'}{\left(\frac{y'-q}{b} - \frac{z'-r}{c}\right)\left(\frac{c+a\cos\mu+b\cos\nu}{a}\right) + \left(\frac{y'-q}{b} - \frac{x'-p}{a}\right)\left(\frac{a+b\cos\nu+c\cos\mu}{c}\right)}$$

$$= \frac{z - z'}{\left(\frac{z'-r}{c} - \frac{x'-p}{a}\right)\left(\frac{a+b\cos\nu+c\cos\lambda}{b}\right) + \left(\frac{z'-r}{c} - \frac{y'-q}{b}\right)\left(\frac{b+c\cos\lambda+a\cos\nu}{a}\right)}.$$

Pour avoir les coordonnées du pied de la perpendiculaire, considérons comme simultanées les équations (25) et (26). L'élimination de $z$ donne

$$x - x' = \frac{Aa(z'-r) - Ac(x'-p)}{Ac - Ca}$$

ou

$$\frac{x - x'}{A} = \frac{\frac{z'-r}{c} - \frac{x'-p}{a}}{\frac{A}{a} - \frac{C}{c}}.$$

Si nous remplaçons $\frac{A}{a}$, $\frac{C}{c}$ par leurs valeurs tirées de (29) nous trouverons

(LXXXIV)

$$\frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}=\frac{abc}{a^2+b^2+c^2+2bc\cos\lambda+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu}$$

pour les équations qui donnent immédiatement les coordonnées du pied de la perpendiculaire.

54. *Equations de la ligne de plus courte distance de deux droites.* Soient

$$\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c}, \quad (30) \qquad \frac{x-p'}{a'}=\frac{y-q'}{b'}=\frac{z-r'}{c'} \quad (31)$$

les équations des deux droites, dont nous nous proposons de déterminer la droite de plus courte distance.

Par l'origine des coordonnées conduisons le plan

$$(bc'-cb')x+(ca'-ac')y+(ab'-ba')z=0$$

parallèle à ces deux droites. La plus courte distance sera perpendiculaire à ce plan; l'équation de la droite cherchée est donc de la forme

$$\frac{x-h}{A}=\frac{y-k}{B}=\frac{z-l}{C}, \qquad \text{(LXXXV)}$$

où nous avons

$$\left.\begin{aligned} A&=(bc'-cb')\sin^2\lambda+(ca'-ac')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\\ &\qquad+(ab'-ba')(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu),\\ B&=(ca'-ac')\sin^2\mu+(ab'-ba')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\ &\qquad+(bc'-cb')(\cos\mu\cos\lambda-\cos\nu),\\ C&=(ab'-ba')\sin^2\nu+(bc'-cb'(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\ &\qquad+(ca'-ac')(\cos\nu\cos\mu-\cos\lambda). \end{aligned}\right\}\text{(LXXXVI)}$$

Cela étant, soient $P$, $Q$, $R$; $P'$, $Q'$, $R'$ les coordonnées des points d'intersection de la droite (LXXXV) avec les deux lignes (30) et (31). Nous avons, pour déterminer ces coordonnées, les six équations

$$\frac{P-P'}{A}=\frac{Q-Q'}{B}=\frac{R-R'}{C}, \qquad (32)$$

$$\frac{P-p}{a}=\frac{Q-q}{b}=\frac{R-r}{c}, \qquad (33)$$

$$\frac{P'-p'}{a'}=\frac{Q'-q'}{b'}=\frac{R'-r'}{c'}. \qquad (34)$$

Par les quatre dernières nous trouvons les valeurs

$$Q-Q'=\frac{Pb}{a}-\frac{P'b'}{a'}-\left(\frac{pb}{a}-\frac{p'b'}{a'}\right)+(q-q'),$$

$$R-R'=\frac{Pc}{a}-\frac{P'c'}{a'}-\left(\frac{pc}{a}-\frac{p'c'}{a'}\right)+(r-r');$$

qui, étant substituées dans les deux premières (32), nous donnent les deux équations

$$aa'B(P-P')=Aba'(P-p)-Aab'(P'-p')+Aaa'(q-q'),$$

$$aa'C(P-P')=Aca'(P-p)-Aac'(P'-p')+Aaa'(r-r');$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$a'(Ab-Ba)P-a(Ab'-Ba')P'=Aa'(bp-aq)-Aa(b'p'-a'q'),$$

$$a'(Ac-Ca)P-a(Ac'-Ca')P'=Aa'(cp-ar)-Aa(c'p'-a'r').$$

De celles-ci on tire

$$\frac{P-p}{a}=\frac{(p-p')(Bc'-Cb')+(q-q')(Ca'-Ac')+(r-r')(Ab'-Ba')}{A(bc'-cb')+B(ca'-ac')+C(ab'-ba')}.$$

Or, par suite de la notation (XXXVII) du n°. 24 et de la relation (XXXV) du même numéro, le dénominateur du second membre est égal à

$$w^2=u^2u'^2-v^2=\left\{\begin{matrix}a^2+2bc\cos\lambda\\+b^2+2ca\cos\mu\\+c^2+2ab\cos\nu\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}a'^2+2b'c'\cos\lambda\\+b'^2+2c'a'\cos\mu\\+c'^2+2a'b'\cos\nu\end{matrix}\right\}$$

$$-\left\{\begin{matrix}aa'+(bc'+cb')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\+bb'+(ca'+ac')(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\+cc'+(ab'+ba')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\end{matrix}\right\}^2. \quad \text{(LXXXVII)}$$

Il vient, par conséquent,

$$\frac{P-p}{a}=\frac{Q-q}{b}=\frac{R-r}{c} \quad \text{(LXXXVIII)}$$

$$=\frac{(p-p')(Bc'-Cb')+(q-q')(Ca'-Ac')+(r-r')(Ab'-Ba')}{u^2u'^2-v^2},$$

$$\frac{P'-p'}{a'}=\frac{Q'-q'}{b'}=\frac{R'-r'}{c'} \quad \text{(LXXXIX)}$$

$$=\frac{(p'-p)(Bc-Cb)+(q'-q)(Ca-Ac)+(r'-r)(Ab-Ba)}{u^2u'^2-v^2}.$$

Telles sont les valeurs que l'on obtient pour les coordonnées des extrémités de la plus courte distance des deux droites (30) et (31).

Cette ligne de plus courte distance est d'ailleurs déterminée par les coéfficients (LXXXVI), et par les constantes $h$, $k$, $l$, qu'on peut prendre égales soit à $P$, $Q$, $R$; soit à $P'$, $Q'$, $R'$; soit encore à $\frac{1}{2}(P+P')$, $\frac{1}{2}(Q+Q')$, $\frac{1}{2}(R+R')$, qui sont les coordonnées du point milieu de la plus courte distance.

## Chapitre V.

## Nouvelle méthode de transformation des coordonnées dans l'espace.

### §. I. Transformation des coordonnées dans l'espace lorsque les nouveaux axes sont déterminés par leurs équations.

55. *Passage des anciens axes aux nouveaux.* Les trois droites

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x-p}{a}=\frac{y-q}{b}=\frac{z-r}{c},\\[2mm] \frac{x-p}{a'}=\frac{y-q}{b'}=\frac{z-r}{c'},\\[2mm] \frac{x-p}{a''}=\frac{y-q}{b''}=\frac{z-r}{c''}\end{array}\right\}\qquad(1)$$

se coupent au point $p$, $q$, $r$; nous pouvons donc les prendre pour axes de nouvelles coordonnées.

Soint $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$; $\alpha''$, $\beta''$, $\gamma''$ les angles que font ces droites avec les anciens axes; et $\lambda'$, $\mu'$, $\nu'$ leurs angles d'inclinaison mutuelle. Si nous représentons par $x$, $y$, $z$ les anciennes coordonnées d'un point $M$ de l'espace; par $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées nouvelles de ce point, nous obtiendrons par la méthode des projections

$$\left.\begin{array}{l}x-p+(y-q)\cos\nu+(z-r)\cos\mu=x'\cos\alpha+y'\cos\alpha'+z'\cos\alpha'',\\ y-q+(z-r)\cos\lambda+(x-p)\cos\nu=x'\cos\beta+y'\cos\beta'+z'\cos\beta'',\\ z-r+(x-p)\cos\mu+(y-q)\cos\lambda=x'\cos\gamma+y'\cos\gamma'+z'\cos\gamma''.\end{array}\right\}\quad(2)$$

Résolvons ces équations par rapport à $x-p$, $y-q$, $z-r$; nous trouvons

$$\begin{array}{l}\Delta^2(x-p)\\ =x'[\sin^2\lambda\cos\alpha+(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\cos\beta+(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)\cos\gamma]\\ +y'[\sin^2\lambda\cos\alpha'+(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\cos\beta'+(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)\cos\gamma']\\ +z'[\sin^2\lambda\cos\alpha''+(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu)\cos\beta''+(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)\cos\gamma''],\end{array}$$

$$\Delta^2(y-q)$$
$$= x'[\sin^2\mu\cos\beta + (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\cos\gamma + (\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)\cos\alpha]$$
$$+ y'[\sin^2\mu\cos\beta' + (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\cos\gamma' + (\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)\cos\alpha']$$
$$+ z'[\sin^2\mu\cos\beta'' + (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\cos\gamma'' + (\cos\mu\cos\lambda - \cos\nu)\cos\alpha''],$$

$$\Delta^2(z-r)$$
$$= x'[\sin^2\nu\cos\gamma + (\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)\cos\alpha + (\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)\cos\beta]$$
$$+ y'[\sin^2\nu\cos\gamma' + (\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)\cos\alpha' + (\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)\cos\beta']$$
$$+ z'[\sin^2\nu\cos\gamma'' + (\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)\cos\alpha'' + (\cos\nu\cos\mu - \cos\lambda)\cos\beta''].$$

Or nous savons que (LIV du n°. 37)

$$\cos\alpha = \frac{a + b\cos\nu + c\cos\mu}{u}, \quad \cos\beta = \frac{b + c\cos\lambda + a\cos\nu}{u},$$
$$\cos\gamma = \frac{c + a\cos\mu + b\cos\lambda}{u};$$

$$\cos\alpha' = \frac{a' + b'\cos\nu + c'\cos\mu}{u'}, \quad \cos\beta' = \frac{b' + c'\cos\lambda + a'\cos\nu}{u'},$$
$$\cos\gamma' = \frac{c' + a'\cos\mu + b'\cos\lambda}{u'};$$

$$\cos\alpha'' = \frac{a'' + b''\cos\nu + c''\cos\mu}{u''}, \quad \cos\beta'' = \frac{b'' + c''\cos\lambda + a''\cos\nu}{u''},$$
$$\cos\gamma'' = \frac{c'' + a''\cos\mu + b''\cos\lambda}{u''};$$

où nous avons

$$\left.\begin{aligned} u^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\lambda + 2ca\cos\mu + 2ab\cos\nu, \\ u'^2 &= a'^2 + b'^2 + c'^2 + 2b'c'\cos\lambda + 2c'a'\cos\mu + 2a'b'\cos\nu, \\ u''^2 &= a''^2 + b''^2 + c''^2 + 2b''c''\cos\lambda + 2c''a''\cos\mu + 2a''b''\cos\nu. \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Substituant ces valeurs dans les équations précédentes, et faisant les réductions évidentes, nous obtenons les formules de transformation très simples

$$\left.\begin{aligned} x - p &= \frac{ax'}{u} + \frac{a'y'}{u'} + \frac{a''z'}{u''}, \\ y - q &= \frac{bx'}{u} + \frac{b'y'}{u'} + \frac{b''z'}{u''}, \\ z - r &= \frac{cx'}{u} + \frac{c'y'}{u'} + \frac{c''z'}{u''}. \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

56. *Retour des nouveaux axes aux anciens.* Résolvons les équations (II) par rapport à $x'$, $y'$, $z'$; nous en tirons

(III)

$$\frac{e}{u}x'=(x-p)(b'c''-c'b'')+(y-q)(c'a''-a'c'')+(z-r)(a'b''-b'a''),$$

$$\frac{e}{u'}y'=(x-p)(b''c-c''b)+(y-q)(c''a-a''c)+(z-r)(a''b-b''a),$$

$$\frac{e}{u''}z'=(x-p)(bc'-cb')+(y-q)(ca'-ac')+(z-r)(ab'-ba');$$

où

$$\left.\begin{aligned} e&=a(b'c''-c'b'')+b(c'a''-a'c'')+c(a'b''-b'a'')\\ &=a'(b''c-c''b)+b'(c''a-a''c)+c'(a''b-b''a)\\ &=a''(bc'-cb')+b''(ca'-ac')+c''(ab'-ba'). \end{aligned}\right\}\quad\text{(IV)}$$

57. *Angles des nouveaux axes de coordonnées.* Pour déterminer les angles d'inclinaison mutuelle des nouveaux axes de coordonnées, nous aurons recours à la formule (LI) du n°. 36, qui donne

(V)

$$u'u''\cos\lambda'=a'a''+b'b''+c'c''+(b'c''+c'b'')\cos\lambda+(c'a''+a'c'')\cos\mu$$
$$+(a'b''+b'a'')\cos\nu,$$

$$u''u\cos\mu'=a''a+b''b+c''c+(b''c+c''b)\cos\lambda+(c''a+a''c)\cos\mu$$
$$+(a''b+b''a)\cos\nu,$$

$$uu'\cos\nu'=aa'+bb'+cc'+(bc'+cb')\cos\lambda+(ca'+ac')\cos\mu$$
$$+(ab'+ba')\cos\nu.$$

58. *Détermination du rapport* $\frac{\Delta'}{\Delta}$. Pour avoir l'expression de ce rapport, où

$$\Delta'^2=1-\cos^2\lambda'-\cos^2\mu'-\cos^2\nu'+2\cos\lambda'\cos\mu'\cos\nu',\quad\text{(VI)}$$

par l'ancienne origine des coordonnées $O$ menons trois droites $OM$, $OM'$, $OM''$ respectivement parallèles aux nouveaux axes; sur ces droites prenons les points $M$, $M'$, $M''$ dont les coordonnées soient $a, b, c$; $a', b', c'$; $a'', b'', c''$; les distances $OM$, $OM'$, $OM''$ seront égales à $u$, $u'$, $u''$.

Considérons les points $M$, $M'$, $M''$ et l'origine $O$ comme les quatre sommets d'un tétraèdre, dont nous désignerons le volume par $V$. Nous avons par la trigonométrie

$$V=\frac{1}{6}uu'u''\varDelta',$$

et par la Géométrie des coordonnées

$$V=\frac{1}{6}(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\varDelta.$$

Comparant ces deux expressions, nous trouvons que

$$\frac{\varDelta'}{\varDelta}=\frac{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}{uu'u''}=\frac{e}{uu'u''}. \quad \text{(VII)}$$

59. *Angles des nouveaux axes avec les nouveaux plans de coordonnées.* Posons

(VIII)

$$\begin{aligned}
w^2 &=(b'c''-c'b'')^2\sin^2\lambda+2(c'a''-a'c'')(a'b''-b'a'')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\
&+(c'a''-a'c'')^2\sin^2\mu+2(a'b''-b'a'')(b'c''-c'b'')(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\
&+(a'b''-b'a'')^2\sin^2\nu+2(b'c''-c'b'')(c'a''-a'c'')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w'^2 &=(b''c-c''b)^2\sin^2\lambda+2(c''a-a''c)(a''b-b''a)(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\
&+(c''a-a''c)^2\sin^2\mu+2(a''b-b''a)(b''c-c''b)(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\
&+(a''b-b''a)^2\sin^2\nu+2(b''c-c''b)(c''a-a''c)(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w''^2 &=(bc'-cb')^2\sin^2\lambda+2(ca'-ac')(ab'-ba')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\
&+(ca'-ac')^2\sin^2\mu+2(ab'-ba')(bc'-cb')(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\
&+(ab'-ba')^2\sin^2\nu+2(bc'-cb')(ca'-ac')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu).
\end{aligned}$$

La formule (LXIV) du n°. 43 nous donne

$$\sin X'y'z'=\frac{\varDelta'}{\sin\lambda'};$$

et, comme

$$\varDelta'=\frac{\varDelta e}{uu'u''},\quad \sin\lambda'=\frac{\sqrt{u'^2u''^2-v^2}}{u'u''}=\frac{w}{u'u''}, \quad (3)$$

en vertu de (VII), de (V) et de (XXXV) du n°. 24, il vient

$$\sin X'y'z'=\frac{\varDelta e}{uw}, \quad \text{(IX)}$$

et par suite aussi

$$\sin Y'z'x' = \frac{\Delta e}{u'w'},$$

$$\sin Z'x'y' = \frac{\Delta e}{u''w''}.$$

60. *Angles que font entre eux les nouveaux plans de coordonnées.* Ces angles sont fournis par les formules (LXXII) du n°. 48, qui donnent, eu égard à (3)

$$\sin X' = \frac{\Delta'}{\sin\mu' \sin\nu'} = \frac{\Delta e}{uu'u''} \cdot \frac{u''u}{w'} \cdot \frac{uu'}{w},$$

ou en réduisant

$$\left.\begin{aligned} \sin X' &= \frac{u\Delta e}{w'w''}, \\ \sin Y' &= \frac{u'\Delta e}{w''w}, \\ \sin Z' &= \frac{u''\Delta e}{ww'}. \end{aligned}\right\} \qquad (X)$$

§. II. Transformation des coordonnées dans l'espace, lorsque les nouveaux plans de coordonnées sont déterminés par leurs équations.

61. *Passage aux nouveaux plans de coordonnées.* Soient

$$\left.\begin{aligned} Ax + By + Cz + D &= 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' &= 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

les nouveaux plans des $yz$, $zx$, $xy$. Si nous désignons par $p$, $q$, $r$ les coordonnées de la nouvelle origine, les droites

$$\left.\begin{aligned} \frac{x-p}{B'C''-C'B''} &= \frac{y-q}{C'A''-A'C''} = \frac{z-r}{A'B''-B'A''}, \\ \frac{x-p}{B''C-C''B} &= \frac{y-q}{C''A-A''C} = \frac{z-r}{A''B-B''A}, \\ \frac{x-p}{BC'-CB'} &= \frac{y-q}{CA'-AC'} = \frac{z-r}{AB'-BA'} \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

seront les nouveaux axes respectifs des $x$, $y$, $z$. Posons

$$\left.\begin{aligned}
W^2 &= (A'B''-B'A'')^2 + 2(B'C''-C'B'')(C'A''-A'C'')\cos\nu \\
&\quad + (B'C''-C'B'')^2 + 2(C'A''-A'C'')(A'B''-B'A'')\cos\lambda \\
&\quad + (C'A''-A'C'')^2 + 2(A'B''-B'A'')(B'C''-C'B'')\cos\mu, \\
W'^2 &= (B''C-C''B)^2 + 2(C''A-A''C)(A''B-B''A)\cos\lambda \\
&\quad + (C''A-A''C)^2 + 2(A''B-B''A)(B''C-C''B)\cos\mu \\
&\quad + (A''B-B''A)^2 + 2(B''C-C''B)(C''A-A''C)\cos\nu, \\
W''^2 &= (BC'-CB')^2 + 2(CA'-AC')(AB'-BA')\cos\lambda \\
&\quad + (CA'-AC')^2 + 2(AB'-BA')(BC'-CB')\cos\mu \\
&\quad + (AB'-BA')^2 + 2(BC'-CB')(CA'-AC')\cos\nu;
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI)}$$

$$\left.\begin{aligned}
V^2 &= A'A''\sin^2\lambda + (B'C''+C'B'')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\
&\quad + B'B''\sin^2\mu + (C'A''+A'C'')(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\
&\quad + C'C''\sin^2\nu + (A'B''+B'A')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu), \\
V'^2 &= A''A\sin^2\lambda + (B''C+C''B)(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\
&\quad + B''B\sin^2\mu + (C''A+A''C)(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\
&\quad + C''C\sin^2\nu + (A''B+B''A)(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu), \\
V''^2 &= AA'\sin^2\lambda + (BC'+CB')(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\
&\quad + BB'\sin^2\mu + (CA'+AC')(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\
&\quad + CC'\sin^2\nu + (AB'+BA')(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu);
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XII)}$$

$$\left.\begin{aligned}
U^2 &= A^2\sin^2\lambda + 2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\
&\quad + B^2\sin^2\mu + 2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\
&\quad + C^2\sin^2\nu + 2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu), \\
U'^2 &= A'^2\sin^2\lambda + 2B'C'(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\
&\quad + B'^2\sin^2\mu + 2C'A'(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\
&\quad + C'^2\sin^2\nu + 2A'B'(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu), \\
U''^2 &= A''^2\sin^2\lambda + 2B''C''(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda) \\
&\quad + B''^2\sin^2\mu + 2C''A''(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu) \\
&\quad + C''^2\sin^2\nu + 2A''B''(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu).
\end{aligned}\right\} \quad \text{(XIII)}$$

D'après les formules (II) nous trouvons que

$$\left.\begin{aligned}
x-p&=\frac{(B'C''-C'B'')x'}{W}+\frac{(B''C-C''B)y'}{W'}+\frac{(BC'-CB')z'}{W''},\\
y-q&=\frac{(C'A''-A'C'')x'}{W}+\frac{(C''A-A''C)y'}{W'}+\frac{(CA'-AC')z'}{W''},\\
z-r&=\frac{(A'B''-B'A'')x'}{W}+\frac{(A''B-B''A)y'}{W'}+\frac{(AB'-BA')z'}{W''},
\end{aligned}\right\}\text{(XIV)}$$

ou, en faisant observer, d'après (XXXIV) du n°. 24, que

$$W^2=\frac{U'^2U''^2-V^2}{\Delta^2},\quad W'^2=\frac{U''^2U^2-V'^2}{\Delta^2},\quad W''^2=\frac{U^2U'^2-V''^2}{\Delta^2},$$

$$\left.\begin{aligned}
x-p&=\frac{(B'C''-C'B'')\Delta x'}{\sqrt{U'^2U''^2-V^2}}+\frac{(B''C-C''B)\Delta y'}{\sqrt{U''^2U^2-V'^2}}+\frac{(BC'-CB')\Delta z'}{\sqrt{U^2U'^2-V''^2}},\\
y-q&=\frac{(C'A''-A'C'')\Delta x'}{\sqrt{U'^2U''^2-V^2}}+\frac{(C''A-A''C)\Delta y'}{\sqrt{U''^2U^2-V'^2}}+\frac{(CA'-AC')\Delta z'}{\sqrt{U^2U'^2-V''^2}},\\
z-r&=\frac{(A'B''-B'A'')\Delta x'}{\sqrt{U'^2U''^2-V^2}}+\frac{(A''B-B''A)\Delta y'}{\sqrt{U''^2U^2-V'^2}}+\frac{(AB'-BA')\Delta z'}{\sqrt{U^2U'^2-V''^2}}.
\end{aligned}\right\}\text{(XV)}$$

62. *Les anciens plans de coordonnées sont rectangulaires.* Si les anciens axes de coordonnées sont rectangulaires, il viendra

$$\Delta=1,$$

$$U^2=A^2+B^2+C^2,\ U'^2=A'^2+B'^2+C'^2,\ U''^2=A''^2+B''^2+C''^2;$$

$$V=A'A''+B'B''+C'C'',\ V'=A''A+B''B+C''C,\ V''=AA'+BB'+CC'.$$

Les formules précédentes deviendront alors

(XVI)

$$x-p=\frac{(B'C''-C'B'')x'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)-(A'A''+B'B''+C'C'')^2}}$$
$$+\frac{(B''C-C''B)y'}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A^2+B^2+C^2)-(A''A+B''B+C''C)^2}}$$
$$+\frac{(BC'-CB')z'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(AA'+BB'+CC')^2}},$$

$$y-q=\frac{(C'A''-A'C'')x'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)-(A'A''+B'B''+C'C'')^2}}$$
$$+\frac{(C''A-A''C)y'}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A^2+B^2+C^2)-(A''A+B''B+C''C)^2}}$$
$$+\frac{(CA'-AC')z'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(AA'+BB'+CC')^2}},$$

$$z-r=\frac{(A'B''-B'A'')x'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)-(A'A''+B'B''+C'C'')^2}}$$
$$+\frac{(A''B-B''A)y'}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A^2+B^2+C^2)-(A''A+B''B+C''C)^2}}$$
$$+\frac{(AB'-BA')z'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(AA'+BB'+CC')^2}}.$$

63. *Les anciens plans de coordonnées ainsi que les nouveaux sont rectangulaires.* Dans le cas ou les anciens axes et les nouveaux plans de coordonnées sont perpendiculaires, ces dernières formules re réduisent aux suivantes

(XVII)

$$x-p=\frac{(B'C''-C'B'')x'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)}}$$
$$+\frac{(B''C-C''B)y'}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A^2+B^2+C^2)}}+\frac{(BC'-CB')z'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}},$$
$$y-q=\frac{(C'A''-A'C'')x'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)}}$$
$$+\frac{(C''A-A''C)y'}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A^2+B^2+C^2)}}+\frac{(CA'-AC')z'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}},$$
$$z-r=\frac{(A'B''-B'A'')x'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)}}$$
$$+\frac{(A''B-B''A)y'}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A^2+B^2+C^2)}}+\frac{(AB'-BA')z'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}.$$

64. *Retour des nouveaux plans de coordonnées aux ancie[ns].* Reprenons les formules générales (XV); multiplions les deux me[m]bres de la première par $A$, ceux de la seconde par $B$, et ceux [de] la troisième par $C$; et ajoutons les résultats membre à membre. [Si] nous faisons observer que

$$-(Ap+Bq+Cr)=D,$$

et que nous posions

$$AB'C''-AC'B''+CA'B''-BA'C''+BC'A''-CB'A''=E,$$

nous obtiendrons après réductions, et par analogie,

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D &= \frac{E\Delta x'}{\sqrt{U'^2U''^2-V^2}},\\ A'x+B'y+C'z+D' &= \frac{E\Delta y'}{\sqrt{U''^2U^2-V'^2}},\\ A''x+B''y+C''z+D'' &= \frac{E\Delta z'}{\sqrt{U^2U'^2-V''^2}}. \end{aligned}\right\}\quad \text{(XVI}$$

Si les anciens axes de coordonnées sont rectangulaires, ces f[or]mules deviendront

$$\left.\begin{aligned} &Ax+By+Cz+D\\ &=\frac{Ex'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)-(A'A''+B'B''+C'C'')^2}},\\ &A'x+B'y+C'z+D'\\ &=\frac{Ey'}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A^2+B^2+C^2)-(A''A+B''B+C''C)^2}},\\ &A''x+B''y+C''z+D''\\ &=\frac{Ez'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)-(AA'+BB'+CC')^2}}; \end{aligned}\right\}\text{(X}$$

et, dans le cas où les nouveaux plans de coordonnées sont en mê[me] temps perpendiculaires entre eux,

$$\left.\begin{aligned} Ax+By+Cz+D &= \frac{Ex'}{\sqrt{(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2)}},\\ A'x+B'y+C'z+D' &= \frac{Ey'}{\sqrt{(A''^2+B''^2+C''^2)(A^2+B^2+C^2)}},\\ A''x+B''y+C''z+D'' &= \frac{Ez'}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)}}. \end{aligned}\right\}\text{(X}$$

65. *Calcul du rapport* $\frac{\Delta'}{\Delta}$. Pour avoir ce rapport, il suffit de remplacer, dans la formule (VII),

$$a,\ b,\ c;\quad a',\ b',\ c';\quad a'',\ b'',\ c''$$

respectivement par

$$\begin{array}{lll} B'C''-C'B'', & C'A''-A'C'', & A'B''-B'A''; \\ B''C-C''B, & C''A-A''C, & A''B-B''A; \\ BC'-CB', & CA'-AC', & AB'-BA'; \end{array}$$

et $u$, $u'$, $u''$ par $W$, $W'$, $W''$. Nous trouvons ainsi que

$$\frac{\Delta'}{\Delta} = \frac{E^2}{WW'W''}. \qquad \text{(XXI)}$$

Si nous supposons que les anciens et les nouveaux plans de coordonnées soient rectangulaires, nous déduirons de cette formule que

$$\begin{aligned}(AB'C''-AC'B''+BC'A''-BA'C''+CA'B''-CB'A'')^2 \\ =(A^2+B^2+C^2)(A'^2+B'^2+C'^2)(A''^2+B''^2+C''^2). \quad \text{(XXII)}\end{aligned}$$

66. *Angles des nouveaux axes de coordonnées.* Il suffit, pour cela, de faire dans les formules (V) les mêmes substitutions que dans le numéro précédent. On a ainsi

$$\left.\begin{aligned} W'W''\cos\lambda' &= V'V''-VU^2, \\ W''W\cos\mu' &= V''V-V'U'^2, \\ WW'\cos\nu' &= VV'-V''U''^2. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIII)}$$

67. *Angles des nouveaux plans de coordonnées.* La formule (LXX) du n$^0$. 47 nous donne immédiatement

$$\left.\begin{aligned} \sin X' &= \frac{W\Delta}{U'U''}, \\ \sin Y' &= \frac{W'\Delta}{U''U}, \\ \sin Z' &= \frac{W''\Delta}{UU'}. \end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXIV)}$$

68. *Angles des nouveaux axes avec les nouveaux plans de coordonnées.* Nous trouvons de suite, à l'aide de la formule (LXI) du n$^0$. 40,

$$\left.\begin{aligned}\sin X'y'z' &= \frac{E\Delta}{UW},\\ \sin Y'z'x' &= \frac{E\Delta}{U'W'},\\ \sin Z'x'y' &= \frac{E\Delta}{U''W''}.\end{aligned}\right\} \qquad \text{(XXV)}$$

## Chapitre VI.

### Application de la transformation des coordonnées dans l'espace à la recherche des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe et du paraboloïde hyperbolique.

#### §. I. Equations des génératrices rectilignes de l'hyperboloïde à une nappe

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0. \qquad (1)$$

69. *Premier cas:* L'un au moins des carrés $x^2$ des variables se trouve dans l'équation de l'hyperboloïde et l'une des différences $B''^2 - AA'$, $B'^2 - AA''$, qui renferment le coéfficient $A$ de cette variable, est différente de zéro. Le coéfficient $A$ n'étant pas nul, l'équation (1) pourra se mettre sous la forme (VII) du n°. 8:

$$Af(x, y, z) = (Ax + B''y + B'z + C)^2 - \varphi(y, z) = 0, \qquad (2)$$

où nous avons

$$\varphi(y, z) = (B''^2 - AA')y^2 + 2(B'B'' - AB)yz + (B'^2 - AA'')z^2 + 2(CB'' - AC')y + 2(CB' - AC'')z + C^2 - AF. \qquad (3)$$

Supposons que les carrés des deux variables $y$ et $z$ ne manquent pas dans la fonction (3), et admettons que le coéfficient de $y^2$ ne soit pas nul. Si nous multiplions par $B''^2 - AA'$ tous les termes de la fonction (3), et que nous y mettions en évidence le carré de $\varphi'_y$, nous obtiendrons

$$(B''^2 - AA')\varphi(y, z) = [(B''^2 - AA')y + (B'B'' - AB)z + (CB'' - AC')]^2 - \psi(z), \qquad (4)$$

où $\psi(z)$ désigne l'ensemble des termes venant à la suite de $\frac{1}{4}\varphi_y'^2$, qui sont indépendants de $y$; de sorte que nous avons

$$\begin{aligned}\psi(z)=&[(B'B''-AB)^2-(B''^2-AA')(B'^2-AA'')]z^2\\ &-2[(B'B''-AB)(CB''-AC')-(B''^2-AA')(CB'-AC'')]z\\ &+(CB''-AC')^2-(B''^2-AA')(C^2-AF).\end{aligned} \tag{5}$$

Soient $p$, $q$, $r$ les coordonnées du centre de l'hyperboloïde (1); désignons par $D$ le dénominateur commun des valeurs de ces coordonnées, par $N$, $N'$, $N''$ les numérateurs des mêmes valeurs, de sorte que

$$p=\frac{N}{D},\quad q=\frac{N'}{D},\quad r=\frac{N''}{D}.$$

L'équation (5) pourra se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\psi(z)=&A(Dz^2-2N''z)+A(AC'^2-2B''CC'+A'C^2)\\ &+AF(B''^2-AA').\end{aligned} \tag{6}$$

Le dénominateur $D$ n'étant pas nul, nous pouvons multiplier les deux membres de (6) par $D$ et mettre en évidence, dans le résultat, le carré de $\psi'(z)$; nous aurons ainsi

$$D\psi(z)=A(Dz-N'')^2+A(B''^2-AA')(NC+N'C'+N''C''+FD). \tag{7}$$

Mettons cette valeur dans l'expression (4), et la valeur résultante pour $\varphi(y,z)$ dans l'équation (2). Nous trouvons ainsi que

$$\begin{aligned}&f(x,y,z)\\ =&\frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z+C)^2\\ &-\frac{1}{A(B''^2-AA')}[(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z+(CB''-AC')]^2\\ &+\frac{1}{D(B''^2-AA')}\cdot(Dz-N'')^2+\frac{NC+N'C'+N''C''}{D}+F=0.\end{aligned} \tag{I}$$

Tel est le développement que nous obtenons pour la fonction générale du second degré à trois variables, dans la triple hypothèse de

$$A\neq 0,\quad B''^2-AA'\neq 0,$$
$$AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''\neq 0\ ^{*)}.$$

*) Le signe $\neq$ signifie différent de.

Prenons pour plans des nouveaux $xy$, $zx$, $yz$ les trois plans

$$\left.\begin{array}{c} Dz - N'' = 0, \\ (B''^2 - AA')y + (B'B'' - AB)z + CB'' - AC' = 0, \\ Ax + B''y + B'z + C = 0. \end{array}\right\} \quad (8)$$

Si, pour plus de simplicité, nous supposons que les anciens axes sont rectangulaires, les formules (XX) du n°. 64 nous donnent

$$-AD(B''^2 - AA')$$

pour le numérateur commun des valeurs (XX), et

$$D(B''^2 - AA'), \quad D\sqrt{A^2 + B''^2},$$
$$A\sqrt{(B''^2 - AA')^2 + (B'B'' - AB)^2 + (BB'' - A'B')^2}$$

pour les dénominateurs de ces mêmes valeurs. Il faudra donc remplacer les premiers membres des équations (8) par les quantités

$$\frac{-D(B''^2 - AA')z'}{\sqrt{(B''^2 - AA')^2 + (B'B'' - AB)^2 + (BB'' - A'B')^2}},$$
$$\frac{-A(B''^2 - AA')y'}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad -Ax'$$

dans l'équation (I) de la surface, qui se change ainsi en

$$Ax'^2 - \frac{A(B''^2 - AA')y'^2}{A^2 + B^2} + \frac{D(B''^2 - AA')z'^2}{(B''^2 - AA')^2 + (B'B'' - AB)^2 + (BB'' - A'B')^2}$$
$$+ \frac{NC + N'C' + N''C''}{D} + F = 0. \quad \text{(II)}$$

Deux cas peuvent se présenter, suivant que $D$ est positif ou négatif.

1°. Supposons qu'on ait $D < 0$. Pour que l'équation (II) représente un hyperboloïde, il faudra qu'on ait $B''^2 - AA' > 0$. Dans ce cas l'équation (I) pourra s'écrire, en posant

$$\frac{NC + N'C' + N''C''}{D} + F = H, \quad \text{(III)}$$

$$\left(Ax + B''y + B'z + C + y\sqrt{B''^2 - AA'} + z\frac{B'B'' - AB}{\sqrt{B''^2 - AA'}} + \frac{CB'' - AC'}{\sqrt{B''^2 - AA'}}\right)$$
$$\times\left(Ax + B''y + B'z + C - y\sqrt{B''^2 - AA'} - z\frac{B'B'' - AB}{\sqrt{B''^2 - AA'}} - \frac{CB'' - AC'}{\sqrt{B''^2 - AA'}}\right)$$
$$= \frac{-AD}{B''^2 - AA'}\left(z - \frac{N''}{D} + \frac{\sqrt{AH}}{D}\right)\left(z - \frac{N''}{D} - \frac{\sqrt{AH}}{D}\right). \quad \text{(IV)}$$

Cette équation représentera un hyperboloïde à une nappe, si $H$ est positif. L'inspection directe de cette équation fait voir que les deux systèmes de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde sont représentées par les deux systèmes d'équations

(V)

$$Ax+(B''+\sqrt{B''^2-AA'})y+\left(B'+\frac{B'B''-AB}{\sqrt{B''^2-AA'}}\right)z+C+\frac{CB''-AC'}{\sqrt{B''^2-AA'}}$$

$$=\frac{-AD\varphi}{B''^2-AA'}\left(z-\frac{N''}{D}+\frac{\sqrt{AH}}{D}\right),$$

$$Ax+(B''-\sqrt{B''^2-AA'})y+\left(B'-\frac{B'B''-AB}{\sqrt{B''^2-AA'}}\right)z+C-\frac{CB''-AC'}{\sqrt{B''^2-AA'}}$$

$$=\frac{1}{\varphi}\left(z-\frac{N''}{D}-\frac{\sqrt{AH}}{D}\right);$$

(VI)

$$Ax+(B''+\sqrt{B''^2-AA'})y+\left(B'+\frac{B'B''-AB}{\sqrt{B''^2-AA'}}\right)z+C+\frac{CB''-AC'}{\sqrt{B''^2-AA'}}$$

$$=\frac{-AD\psi}{B''^2-AA'}\left(z-\frac{N''}{2}-\frac{\sqrt{AH}}{D}\right),$$

$$Ax+(B''-\sqrt{B''^2-AA'})y+\left(B'-\frac{B'B''-AB}{\sqrt{B''^2-AA'}}\right)z+C-\frac{CB''-AC'}{\sqrt{B''^2-AA'}}$$

$$=\frac{1}{\psi}\left(z-\frac{N''}{2}+\frac{\sqrt{AH}}{D}\right);$$

ou encore par

(VII)

$$Ax+By''+B'z+C$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi}-\frac{AD\varphi}{B''^2-AA'}\right)\left(z-\frac{N''}{D}\right)-\frac{\sqrt{AH}}{2D}\left(\frac{1}{\varphi}+\frac{AD\varphi}{B''^2-AA'}\right),$$

$$y\sqrt{B''^2-AA'}+\frac{B'B''-AB}{\sqrt{B''^2-AA'}}z+\frac{CB''-AC'}{\sqrt{B''^2-AA'}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varphi}+\frac{AD\varphi}{B''^2-AA'}\right)\left(z-\frac{N''}{D}\right)+\frac{\sqrt{AH}}{2D}\left(\frac{1}{\varphi}-\frac{AD\varphi}{B''^2-AA'}\right);$$

et

(VIII)

$$Ax+B''y+B'z+C$$
$$=-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\psi}+\frac{AD\psi}{B''^2-AA'}\right)\left(z-\frac{N''}{D}\right)+\frac{\sqrt{AH}}{2D}\left(\frac{1}{\psi}-\frac{AD\psi}{B''^2-AA'}\right),$$

$$y\sqrt{B''^2-AA'}+\frac{B'B''-AB}{\sqrt{B''^2-AA'}}z+\frac{CB''-AC'}{\sqrt{B''^2-AA'}}$$
$$=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\psi}-\frac{AD\psi}{B''^2-AA'}\right)\left(z-\frac{N''}{D}\right)-\frac{\sqrt{AH}}{2D}\left(\frac{1}{\psi}+\frac{AD\psi}{B''^2-AA'}\right)$$

Si $D$ est positif, la différence $B''^2-AA'$ pourra être positive ou négative, mais il faudra que $H$ soit négative, pour que l'équation (I) puisse représenter un hyperboloïde à une nappe. Dans ce cas cette équation pourra se mettre sous la forme, dans l'hypothèse de $B''^2-AA'>0$,

$$\left(Ax+B''y+B'z+C+y\sqrt{B''^2-AA'}+z\frac{B'B''-AB}{\sqrt{B''^2-AA'}}+\frac{CB''-AC'}{\sqrt{B''^2-AA'}}\right)$$
$$\times\left(Ax+B''y+B'z+C-y\sqrt{B''^2-AA'}-z\frac{B'B''-AB}{\sqrt{B''^2-AA'}}-\frac{CB''-AC'}{\sqrt{B''^2-AA'}}\right)$$
$$=\frac{AD}{B''^2-AA'}\left(\frac{\sqrt{-AH}}{D}+z-\frac{N''}{D}\right)\left(\frac{\sqrt{-AH}}{D}-z+\frac{N''}{D}\right).$$

On en déduirait encore facilement les équations des deux systèmes de génératrices rectilignes de l'hyperboloïde.

70. *Second cas.* Supposons maintenant que les trois carrés manquent dans l'équation (1); elle devra, dans ce cas, nécessairement renfermer au moins l'un des trois rectangles des variables. Admettons que le coéfficient $B''$ ne soit pas nul. Nous pouvons mettre en évidence le produit $f'_x . f'_y$ dans l'équation

$$f(x,y,z)=2Byz+2B'xz+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0, \quad (9)$$

qui devient ainsi, d'après la formule (X) du n°. 10,

$$B''f(x,y,z)=2(B''x+Bz+C')(B''y+B'z+C)-\psi(z), \quad (10)$$

où

$$\psi(z) = 2BB'z^2 + 2(BC + B'C' - B''C'')z + 2CC' - B''F. \quad (11)$$

Si aucun des deux coéfficients $B$, $B'$ n'est nul, nous pouvons mettre en évidence, dans cette dernière expression, la dérivée $\psi'(z)$; nous obtenons ainsi, en ayant égard aux identités, qui ont lieu entre $D, N, N', N''$,

$$-2B''D\psi(z) = (Dz - N'')^2 + NC + N'C' + N''C'' + 2B''DF. \quad (12)$$

Substituons cette valeur dans l'équation (10), et nous trouvons

(IX)

$$\frac{B''}{2}f(x,y,z) = (B''x + Bz + C')(B''y + B'z + C) + \frac{1}{D}(Dz - N'')^2 + HB'' = 0.$$

Posons actuellement

$$B''x + Bz + C' = m + n, \quad B''y + B'z + C' = m - n;$$

nous en tirons

$$2m = B''(x+y) + (B+B')z + C' + C,$$

$$2n = B''(x-y) + (B-B')z + C' - C.$$

Substituant dans l'équation (XVIII), on la change en

$$f(x,y,z) = \frac{1}{2B''}[B''(x+y) + (B+B')z + C + C']^2$$

$$-\frac{1}{2B''}[B''(x-y) + (B-B')z + C' - C]^2$$

$$+\frac{1}{B''D}(Dz - N'')^2 + H = 0. \quad \text{(X)}$$

Tel est le développement que nous trouvons pour la fonction du second degré à trois variables, privée des carrés de ces variables, et renfermant les trois rectangles des mêmes variables.

L'équation (X) représentera un hyperboloïde à une nappe 1° pour $D < 0$, si l'on a $H > 0$; et 2° pour $D > 0$, si l'on a $H < 0$, c'est-à-dire, en général, si $D$ et $H$ sont de signes contraires. Dans ces deux cas, l'équation de l'hyperboloïde pourra se mettre sous les formes

$$(B''x + Bz + C')(B''x + B'z + C)$$

$$= -D\left(z - \frac{N''}{D} + \sqrt{\frac{B''H}{-D}}\right)\left(z - \frac{N''}{D} - \sqrt{\frac{B''H}{-D}}\right), \quad \text{(XI)}$$

$$(B''x+Bz+C')(B''x+B'z+C)$$

$$=D\left(\sqrt{\frac{-B''H}{D}}+z-\frac{N''}{D}\right)\left(\sqrt{\frac{-B''H}{D}}-z+\frac{N''}{D}\right); \quad (\text{I}$$

de cette sorte les systèmes de génératrices rectilignes sont expri par les deux couples d'équations

$$\left.\begin{aligned} B''x+Bz+C' &= \lambda\left(z-\frac{N''}{D}+\sqrt{\frac{B''H}{-D}}\right), \\ B''y+B'z+C &= -\frac{D}{\lambda}\left(z-\frac{N''}{D}-\sqrt{\frac{B''H}{-D}}\right); \\ B''x+Bz+C' &= \lambda'\left(z-\frac{N''}{D}-\sqrt{\frac{B''H}{-D}}\right), \\ B''y+B'z+C &= -\frac{D}{\lambda'}\left(z-\frac{N''}{D}+\sqrt{\frac{B''H}{-D}}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\text{XI}$$

$$\left.\begin{aligned} B''x+Bz+C' &= \lambda\left(\sqrt{\frac{-B''H}{D}}+z-\frac{N''}{D}\right), \\ B''y+B'z+C &= \frac{D}{\lambda}\left(\sqrt{\frac{-B''H}{D}}-z+\frac{N''}{D}\right); \\ B''x+Bz+C' &= \lambda'\left(\sqrt{\frac{-B''H}{D}}-z+\frac{N''}{D}\right), \\ B''y+B'z+C &= \frac{D}{\lambda'}\left(\sqrt{\frac{-B''H}{D}}+z-\frac{N''}{D}\right). \end{aligned}\right\} \quad (\text{X}$$

## §. II. Equations des génératrices rectilignes du parab loïde hyperbolique.

$$f(x,y,z) = Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'xz+2B''xy$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+F=0. \quad (1$$

71. Cette équation ne pourra représenter de paraboloïde hyp bolique, qu'autant que $\psi(z)$ ou la fonction (6) du n°. 69 soit du pı mier degré par rapport à $z$; cette condition exige que l'on ait $D=$ et $N''$ différent de zéro. Dans ce cas cette fonction se réduit à

$$-2AN''z+AK(B''^2-AA'),$$

si nous avons soin de poser

$$\frac{AC'^2 - 2B''CC' + A'C^2}{B''^2 - AA'} + F = K.$$

Substituant cette expression dans $\varphi(y, z)$ et la valeur résultante dans $f(x, y, z)$, nous trouvons

$$Af(x, y, z) = (Ax + B''y + B'z + C)^2$$

$$-\frac{1}{B''^2 - AA'} \times [(B''^2 - AA')y + (B'B'' - AB)z + B''C - AC']^2$$

$$-\frac{2AN''z}{B''^2 - AA'} + AK = 0. \qquad \text{(XV)}$$

Il n'est pas inutile de faire remarquer que l'hypothèse

$$(B''^2 - AA')(B'^2 - AA'') - (B'B'' - AB)^2$$

$$= (B''^2 - AA')(B^2 - A'A'') - (BB'' - A'B')^2 = AD = 0,$$

combinée avec l'égalité

$$N'' = C''(AA' - B''^2) + C(BB'' - A'B') + C'(B''B' - AB),$$

donne

$$\frac{-N''}{B''^2 - AA'} = C'' + C\sqrt{\frac{B^2 - A'A''}{B''^2 - AA'}} + C'\sqrt{\frac{B'^2 - AA''}{B''^2 - AA'}}. \qquad \text{(XVI)}$$

Il est évident que l'équation (XV) représentera un paraboloïde hyperbolique, si l'on a $B''^2 - AA' > 0$. Or cette équation peut aussi s'écrire de la manière suivante

$$\left(Ax + B''y + B'z + C + y\sqrt{B''^2 - AA'} + z\frac{B'B'' - AB}{\sqrt{B''^2 - AA'}} + \frac{B''C - AC'}{\sqrt{B''^2 - AA'}}\right)$$

$$\times\left(Ax + B''y + B'z + C - y\sqrt{B''^2 - AA'} - z\frac{B'B'' - AB}{\sqrt{B''^2 - AA'}} - \frac{B''C - AC'}{\sqrt{B''^2 - AA'}}\right)$$

$$= \frac{A}{B''^2 - AA'}[2N''z - K(B''^2 - AA')]. \qquad \text{(XVII)}$$

Sous cette forme on voit de suite que les deux systèmes de génératrices rectilignes du paraboloïde sont donnés par les équations

$$\left.\begin{aligned} Ax + y(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}) + z\Big(B' + \frac{B'B'' - AB}{\sqrt{B''^2 - AA'}}\Big) \\ + C + \frac{B''C - AC'}{\sqrt{B''^2 - AA'}} = \frac{A\lambda}{B''^2 - AA'}, \\ Ax + y(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'}) + z\Big(B' - \frac{B'B'' - AB}{\sqrt{B''^2 - AA'}}\Big) \\ + C - \frac{B''C - AC'}{\sqrt{B''^2 - AA'}} = \frac{2N''z}{\lambda} - \frac{K}{\lambda}(B''^2 - AA'); \end{aligned}\right\} \text{(XVIII)}$$

$$\left.\begin{aligned} Ax + y(B'' - \sqrt{B''^2 - AA'} + z\Big(B' - \frac{B'B'' - AB}{\sqrt{B''^2 - AA'}}\Big) \\ + C - \frac{B''C - AC'}{\sqrt{B''^2 - AA'}} = \frac{A\lambda'}{B''^2 - AA'}, \\ Ax + y(B'' + \sqrt{B''^2 - AA'}) + z\Big(B' + \frac{B'B'' - AB}{\sqrt{B''^2 - AA'}}\Big) \\ + C + \frac{B''C - AC'}{\sqrt{B''^2 - AA'}} = \frac{2N''z}{\lambda'} - \frac{K}{\lambda'}(B''^2 - AA'). \end{aligned}\right\} \text{(XIX)}$$

72. Il nous reste à considérer le cas, où les carrés manquent dans l'équation de la surface. Puisque $D$ est nul, il faudra que l'un des trois coéfficients $B$, $B'$, $B''$ soit égal à zéro; admettons que ce soit $B$. La fonction (6) du n⁰. 69 se réduit alors à

$$\psi(z) = 2(B'C' - B''C'')z + 2CC' - B''F, \qquad (14)$$

de sorte que l'équation du paraboloïde hyperbolique sera

$$(B''x + C')(B''y + B'z + C) = \left(\frac{B'C'}{B''} - C''\right)z + \frac{CC'}{B''} - \frac{F}{2} = 0. \text{ (XX)}$$

Les deux systèmes de génératrices rectilignes du paraboloïde sont donc exprimés par les équations

$$\left.\begin{aligned} B''x + C' = \frac{\lambda}{B''}, \\ B''y + B'z + C' = \frac{1}{\lambda}[(B'C' - B''C'')z + CC' - \tfrac{1}{2}B''F]; \end{aligned}\right\} \text{(XXI)}$$

$$\left.\begin{aligned} B''x + C' = \lambda'[(B'C' - B''C'')z + CC' - \tfrac{1}{2}B''F], \\ B''y + B'z + C' = \frac{1}{\lambda' B''}. \end{aligned}\right\} \text{(XXII)}$$

## Chapitre VII.

### Application de la transformation des coordonnées au développement de la méthode de M. Pluecker, pour la discussion des surfaces du second ordre.

(Méthode de la décomposition en carrés.)

73. *But et utilité de cette méthode.* Parmi toutes les méthodes, qui ont été employées pour la discussion des surfaces du second ordre, celle de M. Plücker est l'une des plus faciles et des plus élégantes. Elle consiste dans la décomposition en carrés du premier membre de l'équation de la surface et repose ainsi directement sur notre méthode de transformation des coordonnées.

Pour cette raison nous l'exposons dans ce mémoire. Nous la donnons avec tous les détails qu'elle comporte. Les résultats, auxquels elle nous conduit, nous permettent d'établir immédiatement les caractères analytiques extérieurs, qui distinguent entre elles les surfaces des différentes espèces, que représente l'équation générale du second degré à trois variables.

74. Dans la discussion de l'équation générale

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy$$
$$+ 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0, \qquad (1)$$

nous distinguerons deux parties principales, selon que cette équation renferme au moins l'un des carrés des trois variables, ou qu'elle n'en contient aucun.

La première partie comprend cinq cas, suivant qu'on a

1° le dénominateur $D$ différent de zéro;

2° $D$ égal à zéro, et l'une des trois quantités $B''^2 - AA'$, $B'^2 - A''A$, $B^2 - A'A''$, par exemple, $B''^2 - A'A$ différente de zéro, et deux des trois rapports $\frac{A}{C}, \frac{B''}{C'}, \frac{B'}{C''}$ inégaux;

3° $D$ égal à zéro, $B''^2 - AA'$ différent de zéro, et $\frac{A}{C} = \frac{B''}{C'} = \frac{B'}{C''}$;

4° $D = 0$, $B''^2 - AA' = B'^2 - A''A = B^2 - AA' = 0$, et les trois rapports $\frac{A}{C'}, \frac{B''}{C'}, \frac{B'}{C''}$ inégaux;

5° $D=0,\ B''^2-AA'=B'^2-A''A=B^2-AA'=0,\ \frac{A}{C}=\frac{B''}{C'}=\frac{B'}{C''}$.

La deuxième partie comprend quatre cas, suivant que

1° $D$ est différent de zéro;

2° $D=0$, et que l'un des deux termes du premier degré, dont le rectangle manque dans l'équation, soit différent de zéro;

3° $D$ égal à zéro, ainsi que les coéfficients des deux termes du premier degré, dont le rectangle manque dans l'équation, mais le terme tout connu différent de zéro;

4° $D$ égal à zéro, ainsi que les coéfficients des deux termes du premier degré, dont le rectangle manque dans l'équation, et le terme tout connu.

## Première Partie.

75. ***Premier cas:*** $A \neq 0,\ D \neq 0$. Nous avons vu au n°. 22, formule (XIII) que, dans ce cas, le premier membre de l'équation (1) pouvait se mettre sous la forme

$$f(x,y,z)=\frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z+C)^2$$

$$-\frac{1}{A(B''^2-AA')}[(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z+(CB''-AC')]^2$$

$$+\frac{1}{D(B''^2-AA')}\cdot(Dz-N'')^2+\frac{NC+N'C'+N''C''}{D}+F=0. \quad (2)$$

Cela étant, prenons pour plans de coordonnées les trois plans

$$Dz-N''=0,\quad (B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z+(CB''-AC')=0,$$
$$Ax+B''y+B'z+C=0. \quad (3)$$

Le numérateur commun des valeurs (20) du n°. 64 devient

$$-AD(B''^2-AA'),$$

pendant que les trois dénominateurs sont

$$D(B''^2-AA'),\quad D\sqrt{A^2+B''^2},$$

$$A\sqrt{(B''^2-AA')^2+(B'B''-AB)^2+(BB''-A'B')^2}.$$

Il faudra donc remplacer les premiers membres des équations (3) par

$$\frac{-D(B''^2-AA')z'}{\sqrt{(B''^2-AA')^2+(B'B''-AB)^2+(BB''-A'B')^2}},$$

$$\frac{-A(B''^2-AA')y'}{\sqrt{A^2+B''^2}}, \quad -Ax',$$

dans l'équation (2) de la surface, qui se change ainsi en

$$Ax^2-\frac{A(B''^2-AA')}{A^2+B''^2}y^2+\frac{D(B''^2-AA')z^2}{(B''^2-AA')^2+(B'B''-AB)^2+(BB''-A'B')^2}$$

$$+\frac{NC+N'C'+N''C''}{D}+F=0. \qquad \text{(I)}$$

Sous cette forme, nous reconnaissons immédiatement que l'équation (I) ou l'équation équivalente (1) représente un ellipsoïde, si le dénominateur

$$D=AB^2+A'B'^2+A''B''^2-AA'A''-2BB'B''$$

est négatif, en même temps que l'expression $B''^2-AA'$.

Nous voyons en outre que cet ellipsoïde est réel et fini, infiniment petit ou imaginaire, suivant que le terme connu

$$\frac{NC+N'C'+N''C''}{D}+F$$

est inférieur, égal ou supérieur à zéro, ou, en faisant observer que $D<0$, suivant que

$$NC+N'C'+N''C''+FD$$

est supérieur, égal ou inférieur à zéro.

Lorsque $D$ est toujours négatif, mais que $B''^2-AA'$ soit positif, l'équation (I) représente un hyperboloïde à une nappe, un cône du second degré ou un hyperboloïde à deux nappes, selon que le terme

$$NC+N'C'+N''C''+FD$$

est négatif, nul ou positif.

Dans le cas où $D$ est positif, quel que soit d'ailleurs le signe de $B''^2-AA'$, l'équation (I) représente encore un hyperboloïde à une nappe, un cône ou un hyperboloïde à deux nappes, selon que

$$NC+N'C'+N''C''+FD$$

est inférieur, égal ou supérieur à zéro.

76. *Deuxième cas:* $D=0$, $B''^2-AA'\neq 0$, $\frac{A}{C}\neq\frac{B''}{C'}$ ou $\neq\frac{B'}{C''}$. La décomposition, que nous avons effectuée sur la fonction (1) n'est plus possible, lorsque la quantité $D$ est égale à zéro.

Dans ce cas, d'après les formules (III) du n°. 69, l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$f(x,y,z)=\frac{1}{A}(Ax+B''y+B'z+C)^2$$
$$-\frac{1}{A(B''^2-AA')}\cdot[(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z]^2$$
$$+\frac{2}{A}(AC'-CB'')y+\frac{2}{A}(AC''-CB')z-\frac{C^2}{A}+F=0, \quad \text{(II)}$$

où nous admettons que $AC'-CB''$, $AC''-CB'$ ne soient pas nuls tous les deux.

Prenons pour plans de coordonnées les trois plans

$$Ax+B''y+B'z+C=0,$$
$$(B''^2-AA')y+(B'B''-AB)z=0,$$
$$2(AC'-CB'')y+2(AC''-CB')z-(C^2-AF)=0.$$

Notre équation (II) se changera en une équation de la forme

$$m^2z'^2-n^2y'^2+px=0.$$

Cette équation représentera un paraboloïde elliptique ou hyperbolique, suivant que $B''^2-AA'$ est inférieur ou supérieur à zéro.

77. *Troisième cas:* $D=0$, $B''^2-AA'\neq 0$, $\frac{A}{C}=\frac{B''}{C'}=\frac{B'}{C''}$. Ces dernières égalités donnent

$$C'=\frac{CB''}{A},\quad C''=\frac{CB'}{A};$$

mettant ces valeurs dans celles de $N$, $N'$, $N''$ du n°. 69, on trouve

$$AN+CD=0,\quad N'=0,\quad N''=0;$$

et, comme $D=0$, il vient aussi $N=0$. L'équation (II) devient alors

$$f(x, y, z) = \frac{1}{A}(Ax + B''y + B'z + C)^2$$

$$-\frac{1}{A(B''^2 - AA')}\cdot[(B''^2 - AA')y + (B'B'' - AB)z]^2 - \frac{C^2}{A} + F = 0. \quad \text{(III)}$$

En prenant pour plans des $xy$ et des $xz$ les plans

$$Ax + B''y + B'z + C = 0,$$

$$(B''^2 - AA')y + (B'B'' - AB)z = 0,$$

l'équation (III) prend la forme

$$h^2z^2 - \frac{K^2y^2}{B''^2 - AA'} - (C^2 - AF) = 0.$$

1°. Si $B''^2 - AA' < 0$, cette équation représente un cylindre elliptique; ce cylindre est réel, se réduit à une droite ou est imaginaire, suivant que la quantité $C^2 - AF$ est positive, nulle ou négative.

2°. Si nous avons $B''^2 - AA' > 0$, l'équation sera celle d'un cylindre hyperbolique ou de deux plans qui se coupent, suivant que $C^2 - AF$ est ou non différent de zéro.

78. *Quatrième cas:* $D = 0$, $B''^2 - AA' = B'^2 - A''A = B^2 - A'A'' = 0$, $\frac{A}{C}, \frac{B''}{C'}, \frac{B'}{C''}$ *non égaux tous les trois.* Dans ce cas l'équation (1) pourra s'écrire

$$Af(x, y, z) = (Ax + B''y + B'z + C)^2 + 2(AC' - B''C)y$$
$$+ 2(AC'' - CB')z - (C^2 - AF) = 0. \quad \text{(IV)}$$

Sous cette forme on voit immédiatement qu'elle représente un cylindre parabolique.

79. *Cinquième cas:* $D = 0$, $B''^2 - AA' = B'^2 - A''A = B^2 - A'A'' = 0$, $\frac{A}{C} = \frac{B''}{C'} = \frac{B'}{C''}$. L'équation (1) devient alors

$$Af(x, y, z) = (Ax + B''y + B'z + C)^2 - (C^2 - AF) = 0, \quad \text{(V)}$$

et représente

1°. deux plans parallèles, si $C^2 - AF > 0$;

2°. un seul plan, si $C^2 - AF = 0$;

3°. deux plans parallèles imaginaires, si $C^2 - AF < 0$.

## Deuxième Partie.

80. *Premier cas:* $D \neq 0$. Nous avons vu au n°. 22, par la formule (XIX), que l'équation (1), dans ce cas, pouvait se mettre sous la forme

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2B''}[B''(x+y) + (B+B')z + C + C']^2$$

$$-\frac{1}{2B''}[B''(x-y) + (B-B')z + C' - C]^2$$

$$+\frac{1}{B''D}(Dz - N'')^2 + H = 0. \qquad \text{(VI)}$$

Celle-ci représente nécessairement un hyperboloïde.

1°. Pour $D$ négatif, l'hyperboloïde sera à une nappe ou à deux nappes, selon que $H$ ou $\frac{NC+N'C'+N''C''}{D}+F$ sera positif ou négatif, c'est-à-dire, selon que $NC+N'C'+N''C''+FD$ sera inférieur ou supérieur à zéro.

2°. Pour $D$ positif, l'hyperboloïde sera à une nappe ou à deux nappes, suivant que $\frac{NC+N'C'+N''D''}{D}+F$ sera négatif ou positif, ou encore suivant que $NC+N'C'+N''C''+FD$ sera moindre ou plus grand que zéro.

Dans les deux cas on aura le cône, si $NC+N'C'+N''C''+FD=0$.

Ces conclusions sont identiques avec celles du n°. 25.

81. *Deuxième cas:* $D=0$, $B''\neq 0$, $C'$ *ou* $C''\neq 0$. L'équation (1) se change en

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2B''}[B''(x+y) + B'z + C + C']^2$$

$$-\frac{1}{2B''}[B''(x-y) - B'z + C' - C]^2$$

$$-2\left(\frac{B'C'}{B''} - C''\right)z - \frac{2CC'}{B''} + F = 0, \qquad \text{(VII)}$$

si nous admettons que $B$ soit celui des trois coéfficients $B$, $B'$, $B''$ qui annule $D$. Cette équation est celle d'un paraboloïde hyperbolique.

82. *Troisième cas:* $D=0,\ B''\gtrless 0,\ C'=0,\ C''=0,\ F\gtrless 0.$
L'équation précédente devient

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2B''}[B''(x+y)+B'z+C]^2$$
$$-\frac{1}{2B''}[B''(x-y)-B'z-C]^2+F=0. \quad \text{(VIII)}$$

Elle représente un cylindre hyperbolique, dans le cas où $F$ est différent de zéro.

83. *Quatrième cas:* $D=0,\ B''\gtrless 0,\ C'=0,\ C''=0,\ F=0.$
L'équation (VIII) se réduit à

$$2B''f(x,y,z)=f'_x.f'_y=4(B''y+B'z+C)(B''x+C)=0, \quad \text{(IX)}$$

et exprime deux plans sécants

$$\tfrac{1}{2}f'_x=B''y+B'z+C=0,\quad \tfrac{1}{2}f'_y=B''x+C=0.$$

## Chapitre VIII.

### Détermination des sections planes des surfaces.

84. Notre méthode de transformation des coordonnées nous fournit le procédé le plus expéditif pour déterminer d'une manière immédiate, la section faite par un plan dans une surface quelconque.

L'équation de cette section sera uniquement exprimée en valeur des coéfficients de l'équation de la surface, des coéfficients de l'équation du plan sécant

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (1)$$

et des angles d'inclinaison mutuelle des axes de coordonnées.

Prenons le plan sécant pour plan des $yz$ et conservons les anciens plans des $zx$ et des $xy$, qui sont représentés par les équations $y=0$, $z=0$. D'après les formules (XIV) du n°. 61, comparées aux équations (4) du même numéro, nous avons

$$A'=0,\quad C'=0,\quad D'=0,$$
$$A''=0,\quad B''=0,\quad D''=0;$$

ce qui donne

$$B'C''-C'B''=B'C'',\quad B''C-C''B=-BC'',\quad BC'-CB'=-B'\ldots$$
$$C'A''-A'C''=0,\quad C''A-A''C=AC'',\quad CA'-AC'=0,$$
$$A'B''-B'A''=0,\quad A''B-B''A=0,\quad AB'-BA'=AB';$$
$$p=-\frac{D}{A},\quad q=0,\quad r=0,\quad E=AB'C'';$$

et, d'après (XI) du n$^o$. 61,

$$W=B'C'',\quad W'=C''\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu},$$
$$W''=B'\sqrt{A^2+C^2-2AC\cos\mu}.$$

Les formules de transformation (XIV) du no. 61 sont donc

$$\left.\begin{aligned} x&=-\frac{D}{A}+x'-\frac{By'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}}-\frac{Cz'}{\sqrt{A^2+C^2-2AC\cos\mu}},\\ y&=\frac{Ay'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}},\quad z=\frac{Az'}{\sqrt{A^2+C^2-2AC\cos\mu}}.\end{aligned}\right\}(\ldots$$

En y annulant $x'$, ce qui donne

$$\left.\begin{aligned} Ax+D&=-\frac{ABy'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}}-\frac{ACz'}{\sqrt{A^2+C^2-2AC\cos\mu}},\\ By&=\frac{ABy'}{\sqrt{A^2+B^2-2AB\cos\nu}},\quad Cz=\frac{ACz'}{\sqrt{A^2+C^2-2AC\cos\mu}},\end{aligned}\right\}(\ldots$$

on obtient les formules, par lesquelles il faut remplacer $x$, $y$, dans l'équation de la surface pour avoir l'équation de la section fait par le plan.

85. Cette section se trouve rapportée à deux axes de coordonnées, qui sont les intersections du plan donné (1) avec les deux plan des $xy$ et des $xz$.

Les équations de ces deux axes dans l'espace étant

$$z=0,\quad Ax+By+D=0,\quad \text{et}\quad y=0,\quad Ax+Cz+D=0,$$

ils comprennent entre eux un angle déterminé par les formules

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta&=\frac{A^2+BC-A(B+C)\cos\nu}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\nu)(A^2+C^2-2AC\cos\mu)}},\\ \sin\theta&=\frac{A(B-C)\sin\nu}{\sqrt{(A^2+B^2-2AB\cos\nu)(A^2+C^2-2AC\cos\mu)}},\\ \tang\theta&=\frac{A(B-C)\sin\nu}{A^2+BC-A(B+C)\cos\nu}.\end{aligned}\right\}(\text{III}\ldots$$

## Chapitre IX.

### Passage de formules calculées pour des axes rectangulaires aux relations analogues, qui répondent à des coordonnées obliques.

**86.** ***Formules à l'usage de la Geométrie plane.*** **Nous venons de déterminer les formules de transformation, qui servent à passer d'axes quelconques à d'autres axes, rectangulaires ou obliques, qui sont représentés par leurs équations. Nous les appliquerons à la résolution d'une question qui ne manque pas d'importance. Nous indiquerons comment on peut déduire de toute relation, calculée pour des axes rectangulaires, l'équation analogue qui convient à des coordonnées obliques. La méthode repose sur des formules particulières dans chaque cas, dont l'établissement général constitue la solution des problèmes suivants.**

**87.** ***Problème I.*** **Etant donnée une relation $R$ entre certains élémens d'une courbe plane $f(x,y)=0$ rapportée à des axes rectangulaires, déterminer la relation $R'$, qui existe entre les mêmes élémens de la courbe, lorsque cette dernière est rapportée à des axes obliques.**

**Nous supposerons que les deux systèmes de coordonnées aient même origine et même axes des $x$, et que l'axe des $y$ du second système fasse avec celui des abscisses un angle égal à $\theta$.**

**Pour avoir les formules de passage du second système au premier, il nous suffira de déterminer les équations des deux nouveaux axes.**

**L'axe des $x$ est toujours représenté par l'équation $y=0$, tandisque le nouvel axe des $y$ a pour équation $y=\text{tang}\,\theta . x$.**

**Nous pouvons appliquer les formules (V) du n°. 3, dans lesquelles il nous suffira de faire**

$$A=1,\ B=0,\ C=0;\ A'=\cos\theta,\ B'=-\sin\theta,\ C'=0.$$

**Elles donnent ainsi**

$$y=\sin\theta . y',\quad x=x'+y'\cos\theta;$$

**d'où nous tirons**

$$y'=\frac{y}{\sin\theta},\quad x'=x-y\cot\theta. \tag{1}$$

Cela posé, soient

$$f(x, y) = 0, \quad F(x, y) = 0 \tag{1}$$

les équations de la courbe rapportée à nos deux systèmes d'axes, les uns rectangulaires et les autres obliques; désignons par

$$a, b, c, d, \ldots; \quad A, B, C, D, \ldots$$

les coéfficients des termes correspondants dans les deux équations (1). Si nous remplaçons, dans l'équation $F(x, y) = 0$, $x$ et $y$ respectivement par $x - y\cot\theta$, $y\operatorname{coséc}\theta$, nous passerons du système oblique aux axes rectangulaires: par conséquent nous devrons retomber sur l'équation $f(x, y) = 0$. Or les coéfficients de l'équation obtenue seront évidemment exprimés en fonction seule de $A, B, C, D, \ldots$ et de l'angle $\theta$; de plus ces coéfficients devront être identiques avec ceux de l'équation $f(x, y) = 0$; il suffira donc d'établir ces identités, pour former immédiatement les valeurs, par lesquelles il faudra remplacer $a, b, c, d, \ldots$ dans la relation $R$, pour avoir la relation $R'$.

88. *Application à la ligne droite.* Supposons que la droite

$$y' = ax' + b \tag{2}$$

soit rapportée à des coordonnées obliques inclinées entre elles d'un angle $\theta$, et que

$$y = mx + n \tag{3}$$

soit l'équation de la même droite rapportée à des coordonnées rectangulaires. Dans l'équation (3) remplaçons $x'$ et $y'$ par leurs valeurs (I); elle devient

$$y(1 + a\cos\theta) = a\sin\theta . x + b\sin\theta.$$

Identifiant cette équation avec (3), on en déduit les valeurs

$$m = \frac{a\sin\theta}{1 + a\cos\theta}, \quad n = \frac{b\sin\theta}{1 + a\cos\theta}; \tag{II}$$

qui donnent

$$1 + m^2 = \frac{1 + a^2 + 2a\cos\theta}{(1 + a\cos\theta)^2}.$$

89. *Application aux courbes du second degré.* Soit

$$Ay'^2 + Bx'y' + Cx'^2 + Dy' + Ex' + F = 0 \tag{4}$$

l'équation d'une courbe du second ordre rapportée à des axes obliques, comprenant entre eux un angle $\theta$; supposons que

$$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + ex + f = 0 \tag{5}$$

représente la courbe rapportée au système qu'on obtient, en rendant l'axe des $y$ perpendiculaire sur celui des $x$.

Si nous faisons dans l'équation (4)

$$x' = x - y\cot\theta, \quad y' = y\,\text{coséc}\,\theta,$$

elle deviendra

(6)

$$\frac{A - B\cos\theta + C\cos^2\theta}{\sin^2\theta}y^2 + \frac{B - 2C\cos\theta}{\sin\theta}xy + Cx^2 + \frac{D - E\cos\theta}{\sin\theta}y + Ex + F = 0;$$

de sorte qu'on aura, en comparant avec (5)

$$\left.\begin{array}{l} a = \dfrac{A - B\cos\theta + C\cos^2\theta}{\sin^2\theta}, \quad b = \dfrac{B - 2C\cos\theta}{\sin\theta}, \quad c = C, \\ d = \dfrac{D - E\cos\theta}{\sin\theta}, \quad e = E, \quad f = F, \end{array}\right\} \text{(III)}$$

pour les valeurs à substituer dans la relation $R$ en question, pour avoir $R'$.

Ces expressions (III) donnent

$$\left.\begin{array}{l} e^2 - 4cf = E^2 - 4CF, \quad b^2 - 4ac = \dfrac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta}, \\ d^2 - 4af = \dfrac{D^2 - 4AF + 2(2BF - DE)\cos\theta + (E^2 - 4CF)\cos^2\theta}{\sin^2\theta}; \end{array}\right\} \text{(IV)}$$

$$\left.\begin{array}{l} 2cd - be = \dfrac{2CD - BE}{\sin\theta}, \quad 2bf - de = \dfrac{2BF - DE + (E^2 - 4CF)\cos\theta}{\sin\theta}, \\ 2ae - bd = \dfrac{2AE - BD + (2CD - BE)\cos\theta}{\sin\theta}; \end{array}\right\} \text{(V)}$$

$$ae^2 + cd^2 - bde = \frac{AE^2 + CD^2 - BDE}{\sin^2\theta}; \qquad \text{(VI)}$$

$$a + c = \frac{A - B\cos\theta + C}{\sin^2\theta}; \qquad \text{(VII)}$$

$$a - c = \frac{A - B\cos\theta + C\cos 2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{(A - C) - (B - 2C\cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}; \quad \text{(VIII)}$$

$$a - c = \frac{(A + C)\cos^2\theta - B\cos\theta + (A - C)\sin^2\theta}{\sin^2\theta}; \qquad \text{(IX)}$$

$$\left.\begin{aligned}
b^2+(a-c)^2&=\frac{(B^2-4AC)\sin^2\theta+(A-B\cos\theta+C)^2}{\sin^4\theta},\\
b^2+(a-c)^2&=\frac{(A-C)^2\sin^2\theta+(A\cos\theta-B+C\cos\theta)^2}{\sin^4\theta},\\
b^2+(a-c)^2&=\frac{(A-C)^2+(B-2A\cos\theta)(B-2C\cos\theta)}{\sin^4\theta}.
\end{aligned}\right\}\quad\text{(X)}$$

Lorsqu'on a

$$b^2-4ac=\frac{B^2-4AC}{\sin^2\theta}=0,$$

ce qui a lieu pour la parabole, on est conduit aux identités

$$\sqrt{a}=\frac{\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C}}{\sin\theta},\quad \sqrt{c}=\sqrt{C},\quad d=\frac{D-E\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$e=E,\quad f=F,\qquad\text{(XI)}$$

qui fournissent les formules suivantes

$$a+c=\frac{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}}{\sin^2\theta},\qquad\text{(XII)}$$

$$d^2+e^2=\frac{D^2+E^2-2DE\cos\theta}{\sin^2\theta},\qquad\text{(XIII)}$$

$$d\sqrt{c}-e\sqrt{a}=\frac{D\sqrt{C}-E\sqrt{A}}{\sin\theta},\qquad\text{(XIV)}$$

$$d\sqrt{a}+e\sqrt{c}=\frac{D\sqrt{A}+E\sqrt{C}-(D\sqrt{C}+E\sqrt{A})\cos\theta}{\sin^2\theta},\qquad\text{(XV)}$$

$$c-a=\frac{A+C-2\cos\theta\sqrt{AC}-2(\sqrt{A}-\cos\theta\sqrt{C})^2}{\sin^2\theta}.\qquad\text{(XVI)}$$

90. *Formules à l'usage de la Géométrie à trois dimensions.* Nous supposerons que les deux systèmes de coordonnées aient même origine, même axe des $x$ et même plan des $xy$; et nous représenterons par $x$, $y$, $z$ les coordonnées rectangulaires, et par $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées obliques.

Déterminons les équations des axes rectangulaires en coordonnées obliques.

Les équations de l'axe des $x'$ étant

$$y'=0,\quad z'=0,$$

on a, dans les formules (II) du n°. 55,

$$b = 0, \quad c = 0; \tag{7}$$

ce qui donne

$$u = a. \tag{8}$$

L'axe des $y'$ étant perpendiculaire à l'axe des $x$, nous avons $\cos \alpha' = 0$; ce qui, d'après (LIV) du n°. 37 donne

$$a' + b' \cos \nu + c' \cos \mu = 0;$$

mais cet axe étant situé dans le plan des $xy$, le coéfficient $c'$ est nul; par conséquent il vient

$$a' + b' \cos \nu = 0,$$

équation à laquelle on satisfait en posant $a' = -\cos \nu$, $b' = 1$; il en résulte donc

$$u' = \sin \nu. \tag{9}$$

L'axe des $z'$ est perpendiculaire au plan $z = 0$, pour lequel on a $A = 0$, $B = 0$. Introduisant cette hypothèse dans les relations de perpendicularité d'une droite et d'un plan, on trouve que

$$a'' = \cos \lambda \cos \nu - \cos \mu, \quad b'' = \cos \mu \cos \nu - \cos \lambda, \quad c'' = \sin^2 \nu;$$

ce qui donne

$$u'' = \sin \nu \sqrt{1 - \cos^2 \lambda - \cos^2 \mu - \cos^2 \nu + 2 \cos \lambda \cos \mu \cos \nu} = \Delta \sin \nu. \tag{10}$$

Mettons actuellement ces valeurs dans nos formules de transformation (II) du n°. 55, nous trouvons que

$$\left.\begin{aligned} x &= x' - y' \cot \nu + \frac{\cos \lambda \cos \nu - \cos \mu}{\Delta \sin \nu} z', \\ y &= \frac{y'}{\sin \nu} + \frac{\cos \mu \cos \nu - \cos \lambda}{\Delta \sin \nu} z', \\ z &= \frac{\sin \nu}{\Delta} z'. \end{aligned}\right\} \tag{XVII}$$

Telles sont les formules qu'il faudra employer pour passer des coordonnées obliques à notre système d'axes rectangulaires.

91. *Problème II.* On donne une relation $R$ entre certains élémens d'une surface $f(x, y, z) = 0$, rapportée à des axes rectangulaires; il s'agit d'en déduire la relation $R'$, qui a lieu entre les mêmes élémens de la surface, lorsque cette dernière est exprimée en coordonnées rectilignes.

Ce problème, à l'aide des formules (XVII), se résout absolument de la même manière que la question du n°. 87, qui est relative à la Géométrie plane.

92. *Application à la ligne droite.* Représentons la droite p les équations

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}, \quad (10) \qquad\qquad \frac{x'}{a_1}=\frac{y'}{b_1}=\frac{z'}{c_1} \quad (11)$$

suivant qu'elle est rapportée à nos axes obliques ou à nos coordi nées rectangulaires. La substitution des valeurs (XVII) dans les équ tion (10) et la comparaison aux équations (11) nous donne la su des égalités

$$\frac{x'\Delta\sin\nu-y'\Delta\cos\nu+(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)z'}{a}=\frac{y'\Delta+(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda}{b}$$

$$=\frac{\sin^2\nu z'}{c};$$

$$\frac{x'\Delta}{a+b\cos\nu+c\cos\mu}=\frac{\sin\nu z'}{c}=\frac{y'\Delta\sin\nu}{b\sin^2\nu-c(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)}; \quad \text{(XVI}$$

$$\left.\begin{aligned} a_1&=\frac{a+b\cos\nu+c\cos\mu}{\Delta},\\ b_1&=\frac{b+c\cos\lambda-(b\cos\nu+c\cos\mu)}{\Delta\sin\nu},\\ c_1&=\frac{c}{\sin\nu}.\end{aligned}\right\} \quad \text{(XI}$$

On en déduit

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=\frac{1}{\Delta^2}(a^2+b^2+c^2+2bc\cos\nu+2ca\cos\mu+2ab\cos\nu). \quad \text{(X}$$

93. *Application au plan.* Dans l'équation du plan

$$Ax+By+Cz+D=0, \quad \text{(1}$$

supposé rapporté à nos axes obliques, remplaçons $x$, $y$, $z$ par le valeurs (XVII), et comparons l'équation résultante à l'équation du pl

$$A_1x'+B_1y'+C_1z'+D=0$$

rapporté aux axes rectangulaires. Il en résulte qu'on a les formul de transformation

$$\left.\begin{aligned} A_1&=A,\\ B_1&=\frac{B-A\cos\nu}{\sin\nu},\\ C_1&=\frac{C\sin^2\nu+A(\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu)+B(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)}{\Delta\sin^2\nu}.\end{aligned}\right\} \quad \text{(X}$$

A l'aide des égalités (IV) et (V) du n°. 19, nous trouvons

$$A_1^2+B_1^2+C_1^2=\frac{1}{\varDelta^2}\left\{\begin{array}{l} A^2\sin^2\lambda+2BC(\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda)\\ +B^2\sin^2\mu+2CA(\cos\nu\cos\lambda-\cos\mu)\\ +C^2\sin^2\nu+2AB(\cos\lambda\cos\mu-\cos\nu).\end{array}\right\}\text{(XXII)}$$

**94.** ***Application aux surfaces du second ordre.*** Prenons l'équation générale

$$(13)$$

$$Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0,$$

qui représente une surface quelconque du second ordre, que nous supposerons rapportée à nos axes obliques. Si nous changeons d'axes, en prenant nos plans de coordonnées rectangulaires, la substitution de nos formules (VII) nous donne l'équation

$$(14)$$

$$A\left(x-\frac{y\cos\nu}{\sin\nu}+\frac{\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu}{\varDelta\sin\nu}\right)^2$$

$$+A'\left(\frac{y}{\sin\nu}+\frac{\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda}{\varDelta\sin\nu}z\right)^2+A''\frac{\sin^2\nu z^2}{\varDelta^2}$$

$$+2B\frac{\sin\nu z}{\varDelta}\left(\frac{y}{\sin\nu}+\frac{\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda}{\varDelta\sin\nu}z\right)$$

$$+2B'\frac{\sin\nu z}{\varDelta}\left(x-\frac{y\cos\nu}{\sin\nu}+\frac{\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu}{\varDelta\sin\nu}z\right)$$

$$+2B''\left(x-\frac{y\cos\nu}{\sin\nu}+\frac{\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu}{\varDelta\sin\nu}z\right)\left(\frac{y}{\sin\nu}+\frac{\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda}{\varDelta\sin\nu}z\right)$$

$$+2C\left(x-\frac{y\cos\nu}{\sin\nu}+\frac{\cos\lambda\cos\nu-\cos\mu}{\varDelta\sin\nu}z\right)$$

$$+2C'\left(\frac{y}{\sin\nu}+\frac{\cos\mu\cos\nu-\cos\lambda}{\varDelta\sin\nu}z\right)+2C''\frac{\sin\nu z}{\varDelta}+F=0.$$

Si l'équation

$$\begin{array}{c}A_1x^2+A_1'y^2+A_1''z^2+2B_1yz+2B_1'zx+2B_1''xy\\ +2C_1x+2C_1'y+2C_1''z+F=0\end{array}\qquad(15)$$

représente la même surface que (13), mais rapportée à nos axes rectangulaires, la comparaison des équations (14) et (15) nous donnera les formules

$$A_1 = A,$$

$$A_1' = \frac{A + A' - 2B''\cos\nu}{\sin^2\nu} - A,$$

$$A_1'' = \frac{1}{\Delta^2}\left\{\begin{array}{l} A\ \sin^2\lambda + 2B\ (\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) \\ + A'\ \sin^2\mu + 2B'(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ + A''\sin^2\nu + 2B''(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \end{array}\right\} - \frac{A + A' - 2B''\cos\nu}{\sin^2\nu};$$

$$B_1 = \frac{B - B'\cos\nu + B''\cos\mu}{\Delta} + \frac{2B''(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}{\Delta\sin^2\nu}$$

$$- \frac{A\cos\nu(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}{\Delta\sin^2\nu} + \frac{A'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)}{\Delta\sin^2\nu},$$

$$B_1' = \frac{B'\sin\nu}{\Delta} + \frac{B''(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)}{\Delta\sin\nu} + \frac{A(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}{\Delta\sin\nu},$$

$$B_1'' = \frac{B'' - A\cos\nu}{\sin\nu};$$

$$C_1 = C,$$

$$C_1' = \frac{C' - C\cos\nu}{\sin\nu},$$

$$C_1'' = \frac{C''\sin^2\nu + C'(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + C''(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}{\Delta\sin\nu}.$$

De ces relations on déduit les suivantes:

$$B_1''^2 - A_1 A_1' = \frac{B''^2 - AA'}{\sin^2\nu},$$

$$B_1'^2 - A_1'' A_1 = \frac{(B'^2 - AA'')\sin^2\nu}{\Delta^2} + \frac{(B''^2 - AA')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)^2}{\Delta^2\sin^2\nu}$$

$$- \frac{2(AB - B'B'')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)}{\Delta^2},$$

$$B_1^2 - A_1' A_1'' = \frac{B^2 - A'A''}{\Delta^2} + \frac{(B'^2 - AA'')\cos^2\nu}{\Delta^2} + \frac{(B''^2 - AA')\cos^2\mu}{\Delta^2}$$

$$+ \frac{2(AB - B'B'')\cos\mu\cos\nu}{\Delta^2} + \frac{2(A'B' - BB'')\cos\mu}{\Delta^2}$$

$$+ \frac{2(A''B'' - BB')\cos\nu}{\Delta^2};$$

$$\left.\begin{aligned}
A_1B_1 - B_1'B_1'' &= \frac{AB - B'B''}{\Delta} - \frac{(B''^2 - AA')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)}{\Delta\sin^2\nu},\\
A_1'B_1' - B_1B_1'' &= \frac{A'B' - BB''}{\Delta\sin\nu} + \frac{(AB - B'B'')\cos\nu}{\Delta\sin\nu}\\
&\quad + \frac{(B''^2 - AA')\cos\mu}{\Delta\sin\nu},\\
A_1''B_1'' - B_1B_1' &= \frac{(A''B'' - BB')\sin\nu}{\Delta^2}\\
&- \frac{(A'B' - BB'')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)}{\Delta^2\sin\nu} + \frac{(AB - B'B'')\cos\mu\sin\nu}{\Delta^2}\\
&- \frac{(AB - B'B'')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\cos\nu}{\Delta^2\sin\nu} + \frac{(B'^2 - AA'')\cos\nu\sin\nu}{\Delta^2}\\
&- \frac{(B''^2 - AA')(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\cos\mu}{\Delta^2\sin\nu};
\end{aligned}\right\}\quad \text{(XV)}$$

qui donnent

$$A_1 + A_1' + A_1'' = \frac{1}{\Delta^2}\left\{\begin{aligned}
&A\sin^2\lambda + 2BC(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda)\\
&+ A'\sin^2\mu + 2CA(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu)\\
&+ A''\sin^2\nu + 2AB(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)
\end{aligned}\right\}, \quad \text{(XVI)}$$

$$\begin{aligned}
&B_1^2 - A_1'A_1'' + B_1'^2 - A_1''A_1 + B_1''^2 - A_1A_1'\\
&= \frac{1}{\Delta^2}\left\{\begin{aligned}
&B^2 - A'A'' + 2(AB - B'B'')\cos\lambda\\
&+ B'^2 - A''A + 2(A'B' - B''B)\cos\mu\\
&+ B''^2 - AA' + 2(A''B'' - BB')\cos\nu
\end{aligned}\right\},
\end{aligned} \quad \text{(XVII)}$$

$$\begin{aligned}
&A_1B_1^2 + A_1'B_1'^2 + A_1''B_1''^2 - A_1A_1'A_1'' - 2B_1B_1'B_1''\\
&= \frac{1}{\Delta^2}[AB^2 + A'B'^2 + A''B''^2 - AA'A'' - 2BB'B''].
\end{aligned} \quad \text{(XVIII)}$$

# IX.

## Ueber ein Theorem von Fagnano.

Von
dem Herausgeber.

---

In der Abhandlung Thl. XXIV. Nr. XXIX. habe ich gezeigt, dass der Gebrauch der Anomalien in der Theorie der Ellipse und Hyperbel in vielen Fällen grosse Vortheile gewährt. Bekanntlich hat Fagnano *) gefunden, dass sich immer elliptische Bogen angeben lassen, deren Differenz durch geschlossene algebraische Ausdrücke dargestellt werden kann, was deshalb sehr merkwürdig ist, weil die Ellipse sich nicht in geschlossenen analytischen Ausdrücken rectificiren lässt. Dass auch bei dem Beweise des Theorems von Fagnano der Gebrauch der Anomalien vortreffliche Dienste leistet, will ich in diesem Aufsatze zeigen.

Die beiden Halbaxen der Ellipse bezeichne ich wie gewöhnlich durch $a$ und $b$, so dass $a$ die grössere, $b$ die kleinere Halbaxe ist. Die Coordinaten eines beliebigen Punktes der Ellipse seien $x$, $y$, und $u$ sei die Anomalie dieses Punktes; dann ist bekanntlich (m. s. a. a. O. S. 372.):

$$x = a\cos u, \quad y = b\sin u;$$

also:

---

*) Mollweide und Lacroix schreiben „Fagnani“, Klügel und Cauchy dagegen „Fagnano.“ Letztere Schreibart muss ich für die richtige halten, denn so ist der Name auf dem Titel seiner Produzioni Mathematiche. 2 vol. 4°. Pesaro. 1750. geschrieben, wie ich aus dem Catalog der Bibliothek des verewigten Schumacher (Berlin. 1855. S. 41.) sehe.

$$\partial x = -a \sin u \partial u, \quad \partial y = b \cos u \partial u.$$

Ist nun $s$ ein beliebiger, bei dem Punkte $(xy)$ sich endigender Bogen der Ellipse, so ist

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\partial s^2 = (a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2) \partial u^2.$$

Rechnen wir nun den Bogen $s$ von einem beliebigen Punkte der Ellipse an nach der Seite oder Richtung hin, nach welcher die Anomalien von 0 bis 360° gezählt werden, so nimmt $s$ mit der Anomalie gleichzeitig zu und ab, und es ist also

$$\partial s = \partial u \sqrt{a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2}.$$

Sind daher jetzt $u_0$ und $u_1$ die Anomalien zweier Punkte der Ellipse, so dass $u_1$ grösser als $u_0$ ist, und bezeichnet $s_{0,1}$ den Bogen der Ellipse, welchen man durchläuft, wenn man die Anomalie $u$ sich von $u_0$ bis $u_1$ stetig verändern lässt, so ist

$$s_{0,1} = \int_{u_0}^{u_1} \partial u \sqrt{a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2}.$$

Wir wollen uns jetzt die Anomalie $u'$ mittelst der Gleichung

$$\cot u' = -\frac{a}{b} \operatorname{tang} u$$

bestimmt denken, und einen bei dem Punkte der Ellipse, dessen Anomalie $u'$ ist, sich endigenden, wie vorher genommenen Bogen durch $s'$ bezeichnen; dann ist wie vorher:

$$\partial s' = \partial u' \sqrt{a^2 \sin u'^2 + b^2 \cos u'^2}.$$

Nun ist aber

$$\sin u'^2 = \frac{1}{1 + \cot u'^2} = \frac{1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} u^2} = \frac{b^2 \cos u^2}{a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2},$$

$$\cos u'^2 = \frac{\cot u'^2}{1 + \cot u'^2} = \frac{\frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} u^2}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tang} u^2} = \frac{a^2 \sin u^2}{a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2};$$

also

$$a^2 \sin u'^2 + b^2 \cos u'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin u^2 + b^2 \cos u^2}.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\frac{\partial u'}{\sin u'^2}=\frac{a}{b}\cdot\frac{\partial u}{\cos u^2},$$

also:

$$\partial u'=\frac{a}{b}\cdot\frac{\sin u'^2}{\cos u^2}\partial u=\frac{ab\partial u}{a^2\sin u^2+b^2\cos u^2}.$$

Folglich ist

$$\partial s'=\frac{a^2b^2\partial u}{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir wollen nun setzen, dass, indem die Anomalie $u$ sich von bis $u_1$ stetig verändert, die Anomalie $u'$ sich von $u_0'$ bis $u_1'$ stetig verändere, wo also nach dem Obigen

$$\cot u_0'=-\frac{a}{b}\tang u_0,\quad \cot u_1'=-\frac{a}{b}\tang u_1$$

ist, und wollen den Bogen der Ellipse, welchen man durchläuft, wenn man die Anomalie $u'$ sich von $u_0'$ bis $u_1'$ wie vorher stetig verändern lässt, durch $s'_{0,1}$ bezeichnen; dann ist nach dem Vorhergehenden:

$$s'_{0,1}=a^2b^2\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial u}{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aus den beiden gefundenen Ausdrücken von $s_{0,1}$ und $s'_{0,1}$ erhält man:

$$s_{0,1}-s'_{0,1}=\int_{u_0}^{u_1}\partial u\sqrt{a^2\sin u^2+b^2\cos u^2}-a^2b^2\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial u}{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Durch Differentiation überzeugt man sich aber auf der Stelle von der Richtigkeit der folgenden Gleichung:

$$\partial.\frac{(a^2-b^2)\sin u\cos u}{\sqrt{a^2\sin u^2+b^2\cos u^2}}=\frac{(a^2-b^2)(b^2\cos u^4-a^2\sin u^4)}{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}\partial u,$$

und folglich, weil

$$(a^2-b^2)(b^2\cos u^4-a^2\sin u^4)=a^2b^2-(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^2$$

ist:

$$\partial.\frac{(a^2-b^2)\sin u\cos u}{\sqrt{a^2\sin u^2+b^2\cos u^2}}=\frac{a^2b^2\partial u}{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}-\partial u\sqrt{a^2\sin u^2+b^2\cos u}$$

also, wenn man zwischen den Gränzen $u_0$ und $u_1$ integrirt:

$$(a^2-b^2)\left\{\frac{\sin u_1 \cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1{}^2+b^2\cos u_1{}^2}}-\frac{\sin u_0 \cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0{}^2+b^2\cos u_0{}^2}}\right\}$$

$$=a^2b^2\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial u}{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}-\int_{u_0}^{u_1}\partial u\sqrt{a^2\sin u^2+b^2\cos u^2},$$

oder

$$(a^2-b^2)\left\{\frac{\sin u_0 \cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0{}^2+b^2\cos u_0{}^2}}-\frac{\sin u_1 \cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1{}^2+b^2\cos u_1{}^2}}\right\}$$

$$=\int_{u_0}^{u_1}\partial u\sqrt{a^2\sin u^2+b^2\cos u^2}-a^2b^2\int_{u_0}^{u_1}\frac{\partial u}{(a^2\sin u^2+b^2\cos u^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Vergleicht man dies nun mit dem Obigen, so erhält man die sehr merkwürdige Gleichung:

$$s_{01}-s_{0,1}{}'=(a^2-b^2)\left\{\frac{\sin u_0 \cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0{}^2+b^2\cos u_0{}^2}}-\frac{\sin u_1 \cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1{}^2+b^2\cos u_1{}^2}}\right\},$$

welche in dieser Form früher noch nicht gegeben ist, aber nach meiner Meinung den besten, bestimmtesten und allgemeinsten Ausdruck des Theorems von **Fagnano** enthält. Wie leicht man auf dem vorhergehenden Wege mittelst der Anomalien zu derselben gelangt, brauche ich wohl nicht noch besonders hervorzuheben.

Setzen wir

$$x_0=a\cos u_0,\quad y_0=b\sin u_0;\quad x_1=a\cos u_1,\quad y_1=b\sin u_1;$$

so ist

$$\sin u_0 \cos u_0=\frac{x_0y_0}{ab},\quad \sin u_1 \cos u_1=\frac{x_1y_1}{ab}$$

und

$$a^2\sin u_0{}^2+b^2\cos u_0{}^2=\frac{a^2}{b^2}y_0{}^2+\frac{b^2}{a^2}x_0{}^2=\frac{a^4y_0{}^2+b^4x_0{}^2}{a^2b^2},$$

$$a^2\sin u_1{}^2+b^2\cos u_1{}^2=\frac{a^2}{b^2}y_1{}^2+\frac{b^2}{a^2}x_1{}^2=\frac{a^4y_1{}^2+b^4x_1{}^2}{a^2b^2};$$

also

$$s_{01}-s_{0,1}{}'=(a^2-b^2)\left\{\frac{x_0y_0}{\sqrt{a^4y_0{}^2+b^4x_0{}^2}}-\frac{x_1y_1}{\sqrt{a^4y_1{}^2+b^4x_1{}^2}}\right\}.$$

Bezeichnen wir die Normalen der Ellipse in den Punkten $(x_0y_0)$ und $(x_1y_1)$ durch $N_0$ und $N_1$, so ist bekanntlich:

$$\sqrt{a^4y_0^2+b^4x_0^2}=a^2N_0,\quad \sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}=a^2N_1;$$

also

$$s_{0,1}-s_{0,1}'=\frac{a^2-b^2}{a^2}\left(\frac{x_0y_0}{N_0}-\frac{x_1y_1}{N_1}\right).$$

Nach dem Obigen ist

$$\cos u_0'^2=\frac{a^2\sin u_0^2}{a^2\sin u_0^2+b^2\cos u_0^2},\quad \sin u_0'^2=\frac{b^2\cos u_0^2}{a^2\sin u_0^2+b^2\cos u_0^2};$$

also, weil bekanntlich

$$\cot u_0'=-\frac{a}{b}\tang u_0$$

ist, mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos u_0'=\pm\frac{a\sin u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0^2+b^2\cos u_0^2}},\quad \sin u_0'=\mp\frac{b\cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0^2+b^2\cos u_0^2}};$$

und ebenso mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos u_1'=\pm\frac{a\sin u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1^2+b^2\cos u_1^2}},\quad \sin u_1'=\mp\frac{b\cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1^2+b^2\cos u_1^2}}.$$

Setzen wir nun

$$x_0'=a\cos u_0',\ y_0'=b\sin u_0';\quad x_1'=a\cos u_1',\ y_1'=b\sin u_1';$$

so ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$x_0'=\pm\frac{a^2\sin u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0^2+b^2\cos u_0^2}},\quad y_0'=\mp\frac{b^2\cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0^2+b^2\cos u_0^2}};$$

und eben so ist mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$x_1'=\pm\frac{a^2\sin u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1^2+b^2\cos u_1^2}},\quad y_1'=\mp\frac{b^2\cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1^2+b^2\cos u_1^2}}.$$

Ist nun mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$x_0'=\pm\frac{a^2\sin u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0^2+b^2\cos u_0^2}},\quad x_1'=\pm\frac{a^2\sin u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1^2+b^2\cos u_1^2}};$$

so ist

$$x_0x_0'=\pm\frac{a^2\sin u_0\cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0{}^2+b^2\cos u_0{}^2}},\quad x_1x_1'=\pm\frac{a^2\sin u_1\cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1{}^2+b^2\cos u_1{}^2}};$$

also nach dem Obigen:

$$s_{0,1}-s_{0,1}'=\pm\frac{a^2-b^2}{a^3}(x_0x_0'-x_1x_1'),$$

und wenn man

$$\varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}$$

setzt:

$$s_{0,1}-s_{0,1}'=\pm\varepsilon^2.\frac{x_0x_0'-x_1x_1'}{a}.$$

Ist aber mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander

$$x_0'=\pm\frac{a^2\sin u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0{}^2+b^2\cos u_0{}^2}},\quad x_1'=\mp\frac{a^2\sin u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1{}^2+b^2\cos u_1{}^2}};$$

so ist

$$x_0x_0'=\pm\frac{a^3\sin u_0\cos u_0}{\sqrt{a^2\sin u_0{}^2+b^2\cos u_0{}^2}},\quad x_1x_1'=\mp\frac{a^3\sin u_1\cos u_1}{\sqrt{a^2\sin u_1{}^2+b^2\cos u_1{}^2}};$$

also nach dem Obigen:

$$s_{0,1}-s_{0,1}'=\pm\frac{a^2-b^2}{a^3}(x_0x_0'+x_1x_1')$$

oder

$$s_{0,1}-s_{0,1}'=\pm\varepsilon^2.\frac{x_0x_0'+x_1x_1'}{a}.$$

Dass man noch andere bemerkenswerthe Ausdrücke dieser Art würde finden können, erhellet leicht.

Die Gleichungen der Berührenden der Ellipse in den durch die Anomalien $u_0'$ und $u_1'$ bestimmten Punkten derselben sind nach Thl. XXIV. S. 375. bekanntlich:

$$y-b\sin u_0'=-\frac{b}{a}\cot u_0'(x-a\cos u_0'),$$

$$y-b\sin u_1'=-\frac{b}{a}\cot u_1'(x-a\cos u_1');$$

und bezeichnen wir also die Winkel, unter denen diese Berührenden gegen die Hauptaxe der Ellipse geneigt sind, durch $v_0$ und $v_1$, so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\operatorname{tang} v_0 = -\frac{b}{a}\cot u_0', \quad \operatorname{tang} v_1 = -\frac{b}{a}\cot u_1'.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$\cot u_0' = -\frac{a}{b}\operatorname{tang} u_0, \quad \cot u_1' = -\frac{a}{b}\operatorname{tang} u_1;$$

woraus sich die bemerkenswerthen Beziehungen

$$\operatorname{tang} v_0 = \operatorname{tang} u_0, \quad \operatorname{tang} v_1 = \operatorname{tang} u_1$$

ergeben, die ein Jeder leicht selbst geometrisch zu deuten im Stande sein wird.

---

# X.

# Ein Beitrag zur Inhaltsberechnung der Körper.

Von

Herrn Doctor *W. Ligowski,*

Lehrer der Mathematik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieur Schule zu Berlin.

---

Wir werden in der folgenden Abhandlung zeigen, wie sich auf elementarem Wege die Inhalte von sehr vielen Körpern aus ihrer Durchschnittsfläche, wenn diese als Function der Höhe gegeben ist, bestimmen lassen.

Der Satz: „Körper über gleichen Grundflächen und von gleicher Höhe sind gleich, wenn die parallelen Schnitte in gleicher Höhe überall beziehlich gleich sind", dient unserer Betrachtung als Grundlage.

Dieser Satz, welcher in vielen Werken als ein Grundsatz angeführt ist, kann, wenn man die Regel für die Inhaltsbestimmung der prismatischen Körper bewiesen hat, mit Hülfe eingeschriebener und umschriebener Prismen in aller Strenge bewiesen werden. Für unsern Zweck ist es nöthig, diesem Satze eine allgemeinere Fassung zu geben, und zwar folgende:

Ist die Summe der Inhalte der Durchschnittsflächen mehrerer Körper von gleichen Höhen, aber beliebigen Grundflächen, in gleichen Abständen von diesen gleich der Durchschnittsfläche eines andern Körpers von derselben Höhe, in denselben Abständen von der Grundfläche, dann ist der Inhalt dieses letztern Körpers gleich der Summe der Inhalte der erstern.

Dieser Satz gilt auch dann noch, wenn die Summe der Inhalte der Durchschnittsflächen eine algebraische ist.

Setzen wir den Satz von der Inhaltsbestimmung der Prismen als bekannt voraus, so ergiebt sich mit Hülfe des eben genannten Satzes, dass der Inhalt eines Körpers, dessen zur Grundfläche parallelen Durchschnitte gleich $a$ sind, bei einer Höhe $x$ das Volumen $a.x$ hat. Es sollen nun Körper mit veränderlichen Durchschnittsflächen untersucht werden, und zwar zunächst der einfachste Fall, dass die Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ gleich $b.x$ ist.

Diese Durchschnittsfläche $b.x$ kann man sich als ein Rechteck mit den Seiten $b$ und $x$ vorstellen; der Körper ist, wie man leicht übersieht, ein dreiseitiges Prisma mit den Grundkanten $x$, $x$ und $x\sqrt{2}$ und den Seitenkanten $b$. Stehen die Seitenkanten (Taf. II. Fig. I.) senkrecht zu $ABC$, dann ist der Körper gleich der Hälfte eines rechtwinkligen Parallelepipedums, bei welchem die in einer Ecke zusammenstossenden Kanten $x$, $x$ und $b$ sind; der Inhalt des Körpers ist daher:

$$V = \tfrac{1}{2}.bx^2.$$

Betrachtet man $BCFE$ als Durchschnittsfläche in der Höhe $AB = x$, dann ist der Inhalt dieses Schnitts $b.x$.

Wir wollen nun den Inhalt der Durchschnittsfläche eines Körpers in der Höhe $x$ gleich $x^2$ setzen und suchen, welches Volumen derselbe hat.

Nach einem bekannten Satze der Stereometrie übersieht man sofort, dass dieser Körper eine Pyramide ist. Der Bequemlichkeit wegen wollen wir den Inhalt des halben Körpers suchen, also eines Körpers, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe $x$

gleich $\frac{1}{2}x^2$ ist. Diese Durchschnittsfläche kann man sich als ei gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten $x$ vorstellen

Es sei in Taf. II. Fig. 2. diese Pyramide so gezeichnet, das die Höhe $x$ derselben die Grundfläche im Scheitel des rechten Winkels trifft, die in $B$ zusammenstossenden Kanten stehen als dann rechtwinklig zu einander.

In Taf. II. Fig. 3. ist diese Pyramide zu einem Prisma ergänzt Legt man durch $AD$ und $DF$ eine Ebene $ADF$, dann wird die Ergänzung $ACFED$ in zwei gleiche Pyramiden $AEFD$ und $ACFD$ zerlegt, dieselben haben gleiche Grundflächen und die Höhe ist für beide dieselbe.

Jede dieser Pyramiden ist aber auch gleich der Pyramide $ABCD$, weil sie mit derselben gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben. Man kann nämlich bei der Pyramide $ABCD$ $ABD$ als Grundfläche und $BC$ als Höhe, und bei der Pyramide $AEFD$ $AED = ABD$ als Grundfläche und $DF = BC$ als Höhe betrachten. Es folgt hieraus, dass die Pyramide $ABCD$ gleich dem dritten Theile des Prismas ist, mit welchem sie gleiche Grundfläche und Höhe hat. Das Volumen von $ABCD$ ist also

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{2}.$$

Der Inhalt des Körpers mit der Durchschnittsfläche $x^2$ in der Höhe $x$ wird nun doppelt so gross, also gleich $\frac{1}{3}x^3$ sein. Ein Körper, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ gleich $cx^2$ ist wird dasselbe Volumen haben wie $c$ Körper mit der Durchschnittsfläche $x^2$, d. h. der Durchschnittsfläche $cx^2$ entspricht das Volumen $\frac{1}{3}cx^3$.

Stellen wir das bis jetzt Gefundene zusammen:

| Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ | Volumen des Körperstücks von der Höhe $x$ |
|---|---|
| 1) $a$ | $ax$ |
| 2) $bx$ | $\frac{1}{2}bx^2$ |
| 3) $cx^2$ | $\frac{1}{3}cx^3$ |

Durch einfache Betrachtungen mit Hülfe der Grenzen liess sich nun auch zeigen, dass ein Körper mit der Durchschnittsfläche $px^n$ das Volumen $\frac{px^{n+1}}{n+1}$ hat, worauf wir aber nicht eingehen, weil wir den Weg der Construction nicht verlassen wollen

Ein Körper, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ gleich $a+bx+cx^2$, ist nun gleich der Summe der Körper mit den Durchschnittsflächen $a$, $bx$ und $cx^2$, d. h. der Durchschnittsfläche $a+bx+cx^2$ entspricht das Volumen $V=ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}$.

Als Beispiel möge der Inhalt eines Kugelabschnitts von der Höhe $x$ berechnet werden.

Die Durchschnittsfläche in der Höhe $x$, also die Grundfläche, ist nach bekannten Sätzen aus der Geometrie:

$$(2rx-x^2)\pi,$$

also

$$V=(rx^2-\frac{x^3}{3})\pi=\frac{x^2\pi}{3}(3r-x).$$

In der Form $a+bx+cx^2$ sind nun die Durchschnittsflächen der Pyramiden, Obelisken, der Kegel und der durch Rotation der Kegelschnitte um ihre Axe entstandenen Körper, so wie auch viele durch windschiefe Flächen begrenzte Körper enthalten; die Volumina derselben lassen sich daher alle nach der Formel

$$V=ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3}$$

berechnen.

Das Volumen der in $f(x)=a+bx+cx^2$ enthaltenen Körper lässt sich auch auf eine höchst einfache Weise durch die beiden Endflächen, die Mittelfläche und Höhe $x$ ausdrücken.

Es stelle Taf. II. Fig. 4. einen solchen Körper dar. Zählen wir die $x$ von $E$ an, dann ist

$$E=a,$$

$$M=a+b\frac{x}{2}+c\frac{x^2}{4},$$

und

$$4M=4a+2bx+cx^2,$$

$$G=a+bx+cx^2,$$

also

$$G+4M+E=6a+3bx+2cx^2,$$

und durch Multiplication mit $\frac{x}{6}$ entsteht:

$$\frac{x}{6}(G+4M+E)=ax+\frac{bx^2}{2}+\frac{cx^3}{3};$$

dieses ist aber $V$, mithin ist für alle in der Form $a+bx+cx$ enthaltene Körper auch

$$V=\frac{x}{6}(G+4M+E),$$

welches die bekannte Regel von Simpson ist.

Als Beispiel hierzu soll der Inhalt einer abgekürzten Pyramide mit den Endflächen $G$ und $E$, so wie der Höhe $h$, berechnet werden. Welche Form die Endflächen auch haben mögen, immer ist die abgekürzte Pyramide gleich einer von derselben Höhe mit quadratischen Endflächen von den Inhalten $G$ und $E$. Die Seiten der Endflächen sind dann $\sqrt{G}$ und $\sqrt{E}$, daher die Seite der Mittelfläche $\frac{\sqrt{G}+\sqrt{E}}{2}$, und mithin

$$V=\frac{h}{6}\left[G+4\left(\frac{\sqrt{G}+\sqrt{E}}{2}\right)^2+E\right]$$

$$=\frac{h}{6}[G+(\sqrt{G}+\sqrt{E})^2+E]$$

$$=\frac{h}{3}(G+\sqrt{GE}+E).$$

Der Geheime Rath Brix hat gezeigt, dass die Simpson'sche Regel auch dann noch gilt, wenn die Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ in der Form $a+bx+cx^2+dx^3$ enthalten ist.

Wir suchen nun den Inhalt des Körpers, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ durch

$$f(x)=a\sqrt{r^2-x^2}$$

gegeben ist.

Man übersieht sehr leicht, dass der Körper (Taf. II. Fig. 1) als ein Stück eines geraden Kreiscylinders von der Höhe $a$ und dem Radius $r$ der Grundfläche betrachtet werden kann.

Nimmt man $AEFB$ als Grundfläche an, dann ist $DHGC$ die Durchschnittsfläche in der Höhe $x$, der Inhalt derselben ist aber gleich

$$HD.DC=a\sqrt{r^2-x^2}.$$

Der Inhalt des Körpers $ABCDEFGH$ ist aber

$$V=a.ABCD.$$

Da nun Fläche $ABCD=\frac{1}{2}(x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\frac{x}{r})$ ist, so erhält man:

$$V=\frac{a}{2}(x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\frac{x}{r}).$$

als Inhalt des Körpers, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ gleich $a\sqrt{r^2-x^2}$ ist.

Ergänzt man Taf. II. Fig. 6. zu einem Viertelcylinder, dann hat diese Ergänzung, wenn die Höhe $x$ nicht von $D$, sondern von der Peripherie an gezählt wird, zur Durchschnittsfläche den Ausdruck

$$a\sqrt{2rx-x^2}.$$

Für das Volumen dieses Körpers hat man sofort den Ausdruck:

$$V=\frac{a}{2}(r^2\arcsin\frac{\sqrt{2rx-x^2}}{r}-(r-x)\sqrt{2rx-x^2}).$$

Es lassen sich nun die Inhalte der Körper, deren Durchschnittsflächen in der Form

$$a+bx+cx^2+d\sqrt{r^2-x^2}+g\sqrt{2\varrho x-x^2}$$

enthalten sind, sofort angeben.

Als Beispiel hierzu werden wir die Inhalte der Körper berechnen, welche entstehen, wenn sich die Fig. 6. u. 7., Taf. II., um $AB$ als Axe drehen.

Die Durchschnittsflächen in der Entfernung $x$ von $D$ sind

$$y^2\pi=(a\pm\sqrt{r^2-x^2})^2\pi=(a^2+r^2-x^2\pm 2a\sqrt{r^2-x^2})\pi,$$

mithin nach den oben gegebenen Formeln:

$$V=[(a^2+r^2)x-\frac{x^3}{3}\pm a(x\sqrt{r^2-x^2}+r^2\arcsin\frac{x}{r})]\pi.$$

Diese Formeln finden besonders Anwendung bei der Inhaltsberechnung der Geschützröhre.

Man kann dieselben Formeln mit Vortheil bei vielen Gewölben anwenden, ebenso bei der Berechnung von hufförmigen Abschnitten von Cylindern. Geht bei solchen Abschnitten die Schnittebene durch den Mittelpunkt der Grundfläche, dann reicht zur Berechnung des Inhalts die Simpson'sche Regel schon aus.

Zum Schlusse sollen noch die Volumina der Körper berechnet werden, deren Durchschnittsflächen in der Höhe $x$ durch

$$x\sqrt{r^2-x^2} \text{ und } x\sqrt{2rx-x^2}$$

gegeben sind. Auch diese Körper können als Abschnitte von geraden Kreiscylindern betrachtet werden.

Um den Inhalt des erstern Körpers zu erhalten, construiren wir die Fig. 8., Taf. II., analog der Fig. 5., Taf. II., tragen in derselben auf $BF$ und $CG$ von $B$ und $C$ aus $AB=x$ ab, legen durch $AD$ und $KJ$ eine Ebene, dann ist der Körper $ABJK$ ein solcher, dessen Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ gleich $x\sqrt{r^2-x^2}$ ist. Denn zählen wir die $x$ von $AD$, dann ist die Durchschnittsfläche in der Entfernung $AB=x$ von der Ebene $ADHE$ das Rechteck $BCKJ$ gleich $BJ.BC=x\sqrt{r^2-x^2}$.

Um den Inhalt dieses Körpers zu erhalten, zerlegen wir denselben durch die Ebene $KCL \parallel ABJ$ in das dreiseitige Prisma $ABJKCL$ und in das Cylinderstück $LCKDL$. Wird nun der Kürze wegen $BC$ mit $y$ bezeichnet, dann ist der Inhalt des oben genannten dreiseitigen Prismas $\frac{1}{2}x^2y$. Zur Inhaltsbestimmung des Cylinderstücks legen wir in der Entfernung $z$ von $LCK$ einen Schnitt $MNO$ durch denselben; dieser ist, wie man leicht übersieht, ein gleichschenkliges Dreieck, sein Inhalt daher gleich

$$\tfrac{1}{2}MN^2=\tfrac{1}{2}[r^2-(y+z)^2]=\tfrac{1}{2}(r^2-y^2-2yz-z^2)$$

oder, da $r^2-y^2=x^2$ ist, der Inhalt des Schnitts in der Entfernung $z$ von $LCK$:

$$\tfrac{1}{2}(x^2-2yz-z^2),$$

mithin das Volumen des Körpers von der Höhe $z$:

$$V=\tfrac{1}{2}(x^2z-yz^2-\frac{z^3}{3}).$$

Für $z=r-y$ erhält man hieraus das Volumen des Cylinderstücks $LCKDL$:

$$V=\tfrac{1}{2}[x^2(r-y)-y(r-y)^2-\tfrac{1}{3}(r-y)^3].$$

Daher der Inhalt des ganzen Körpers:

$$V=\tfrac{1}{2}x^2y+\tfrac{1}{2}[x^2(r-y)-y(r-y)^2-\tfrac{1}{3}(r-y)^3],$$

welches nach einigen Reductionen:

$$V=\tfrac{1}{3}(r^3-y^3) \text{ oder}$$
$$=\tfrac{1}{3}(r^3-(r^2-x^2)^{\frac{3}{2}})$$

giebt.

Zur Inhaltsberechnung des Körpers mit der Durchschnittsfläche $x\sqrt{2rx-x^2}$ construiren wir wiederum ein Viertel eines

Kreiscylinders (Taf. II. Fig. 9.). Der Radius des Quadranten $ABD$ sei gleich $r$ und $BF$ werde mit $x$ bezeichnet. Legt man nun durch $F$ senkrecht auf $AB$ einen Schnitt durch den Körper und trägt auf $FL$ und $CM$ von $F$ und $C$ aus $FG=CH=x$ ab, dann ist der durch die Ebenen $FCHG$ und $HGB$ vom Cylinder abgeschnittene Körper ein solcher, dessen Durchschnittsfläche in der Entfernung $x$ von $B$ gleich $x\sqrt{2rx-x^2}$ ist.

Um den Inhalt des Körpers berechnen zu können, setzen wir $AF=z$, dann ist $CF=\sqrt{r^2-z^2}$ und die Durchschnittsfläche $x\sqrt{2rx-x^2}$ ist dann gleich $(r-z)\sqrt{r^2-z^2}$; dieses ist aber auch die Durchschnittsfläche des Körperstücks $AFCDGHKJ$ in der Entfernung $z$ von $ADKJ$. Da $(r-z)\sqrt{r^2-z^2}=r\sqrt{r^2-z^2}-z\sqrt{r^2-z^2}$, so ist das Volumen des genannten Körpers nach dem Früheren:

$$V=\frac{r}{2}(z\sqrt{r^2-z^2}+r^2\arcsin\frac{z}{r})-\tfrac{1}{3}[r^3-(r^2-z^2)^{\frac{3}{2}}].$$

Der Körper $CFGHB$ ist der Unterschied der beiden Körper $ADKJB$ und $ADKJFCHG$, der letztere hat das Volumen $V$, der andere hat zum Inhalt

$$\frac{r}{2}.r^2\frac{\pi}{2}-\tfrac{1}{3}r^3,$$

welcher entsteht, wenn in $V$ statt $z$ $r$ gesetzt wird; demnach ist nun der Inhalt von

$$CFGHB=\frac{r}{2}r^2\frac{\pi}{2}-\tfrac{1}{3}r^3-\frac{r}{2}(z\sqrt{r^2-z^2}+r^2\arcsin\frac{z}{r})+\tfrac{1}{3}[r^3-(r^2-z^2)^{\frac{3}{2}}]$$

$$=\frac{r^3}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{z}{r}\right)-\frac{rz}{2}\sqrt{r^2-z^2}-\tfrac{1}{3}(r^2-z^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Da nun $\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{z}{r}=\arccos\frac{z}{r}$ ist, so wird hieraus der Inhalt von $CFGHB$ gleich

$$V=\frac{r^3}{2}\arccos\frac{z}{r}-\left(\frac{rz}{2}+\tfrac{1}{3}(r^2-z^2)\right)\sqrt{r^2-z^2}$$

$$=\frac{r^3}{2}\arccos\frac{z}{r}-\tfrac{1}{6}(2r^2+3rz-2z^2)\sqrt{r^2-z^2},$$

oder, wenn wir für $z$ seinen Werth $r-x$ einführen:

$$V=\frac{r^3}{2}\arccos\frac{r-x}{r}-\tfrac{1}{6}(3r^2+rx-2x^2)\sqrt{2rx-x^2},$$

als Volumen des Körpers, dessen Durchschnittsfläche in der I
$x$ gleich $x\sqrt{2rx-x^2}$ ist.

Nach dem bisher Vorgetragenen sind wir nun im Stande,
Inhalte von Körpern zu berechnen, deren Durchschnittsflä
Glieder von den folgenden Formen enthalten:

$a,\ bx,\ cx^2,\ a\sqrt{r^2-x^2},\ b\sqrt{2\varrho x-x^2},\ x\sqrt{r^2-x^2},\ x\sqrt{2\varrho x-}$

Es lassen sich leicht noch andere Formen finden, für we
die Kubirung der Körper gelingt. Benutzt man die vom Her
geber des Archivs auf elementarem Wege gegebene Forme
die Fläche der Hyperbel, dann kann man auch die Körper I
ren, deren Durchschnittsfläche in der Höhe $x$ gleich $a\sqrt{px+}$
ist. Durch Benutzung der Parabel erhält man auch den I
der Körper mit der Durchschnittsfläche $a\sqrt{b+cx}$. Mit vi
Vortheil kann man sich der mitgetheilten Methode bei den in
Mechanik vorkommenden Summirungen bedienen.

---

# XI.

## Zusätze zu §. 7. und §. 9. der Beiträge zur Summir der Reihen im 26. Bande 1. Heft S. 21 u. ff. des Arch

Von

Herrn Hofrath *Oettinger*

an der Universität zu Freiburg i. B.

---

Die in §. 7. und §. 9. behandelten Potenzen- und Fakultätenre
bieten so manches Eigenthümliche, dass es sich wohl der M
lohnen dürfte, noch etwas über dieselben beizufügen.

Ich hatte die Absicht, das, was noch beizufügen ist, am gehörigen Orte in den Text mit den nöthigen Umänderungen aufzunehmen. Die Abhandlung war aber schon gedruckt. Meine Bitte um Rücksendung des Manuscripts kam zu spät und konnte daher nicht mehr berücksichtigt werden. Ich trage nun, was beizufügen ist, hier nach.

Ausser der benutzten Methode lassen sich noch andere auf die dort behandelten Reihen anwenden, wodurch einerseits die gleichen, andererseits abweichende Resultate erzielt werden. Es dürfte daher sachgemäss sein, hierauf aufmerksam zu machen und die verschiedenen Betrachtungsweisen mit den daraus fliessenden Resultaten vorzulegen.

Geht man von den Gleichungen des §. 75. meiner Lehre von den aufsteigenden Functionen aus, so hat man:

$$1)\qquad x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p\ldots\ldots(-)^n(x+n\Delta x)^p$$
$$=(-)^n\zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^p+\zeta^{-1}x^p,$$

und hieraus:

$$2)\qquad x^p-(x+\Delta x)^p$$
$$+(x+2\Delta x)^p\ldots\ldots(-)^n(x+n\Delta x)^p(-)^{n+1}\zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^p=\zeta^{-1}x^p;$$

worin folgende Werthbestimmungen gelten:

$$3)\qquad \zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^p=\tfrac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^p$$
$$-\tfrac{1}{4}p(x+(n+1)\Delta x)^{p-1}\Delta x+\tfrac{1}{8}(p)_3(x+(n+1)\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3-\ldots\ldots,$$
$$\zeta^{-1}x^p=\tfrac{1}{2}x^p-\tfrac{1}{4}px^{p-1}\Delta x+\tfrac{1}{8}(p)_3x^{p-3}(\Delta x)^3-\tfrac{1}{4}(p)_5x^{p-5}(\Delta x)^5+\ldots\ldots$$

Nimmt man nun den Satz zu Hülfe, dass bei unendlich wachsendem $n$ die niedern Potenzen, welche $n$ führen, den höhern gegenüber vernachlässigt werden können, und der oft angewendet wird, so fallen die niedern Potenzen in der entwickelten Darstellung von

$$\zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^p$$

gegenüber der höchsten weg und man erhält sofort aus 2) und 3) für ein unendlich wachsendes $n$:

$$4)\qquad \mathrm{Lim}\left[S(-)^n(x+n\Delta x)^p(-)^{n+1}\tfrac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^p\right]=\zeta^{-1}x^p$$

und hieraus sofort:

5) $\operatorname{Lim}[S(-)^{2n}(x+2n\Delta x)^p - \frac{1}{2}(x+(2n+1)\Delta x)^p] = \zeta^{-1}x^p,$

$\operatorname{Lim}[S(-)^{2n-1}(x+(2n-1)\Delta x)^p + \frac{1}{2}(x+2n\Delta x)^p] = \zeta^{-1}x^p.$

Diese Resultate stimmen mit den in §. 7. gegebenen überein.

Eben so erhält man für die in §. 9. angegebenen Fakultäten-Reihen:

6) $x^{p|\Delta x} - (x+\Delta x)^{p|\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x} \ldots$

$\ldots (-)^n(x+n\Delta x)^p(-)^{n+1}\zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x} = \zeta^{-1}x^{p|\Delta x},$

worin nach §. 33. meiner **Lehre von den aufsteigenden Functionen** gilt:

$$\zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^p = \tfrac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}$$

$$-\tfrac{1}{4}p(x+(n+2)\Delta x)^{p-1|\Delta x}.\Delta x + \tfrac{1}{8}p^{2|-1}(x+(n+3)\Delta x)^{p-2|\Delta x}(\Delta x)^2 - \ldots$$

und

$$\zeta^{-1}x^{p|\Delta x} = \tfrac{1}{2}x^{p|\Delta x} - \tfrac{1}{4}p(x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}.\Delta x$$

$$+\tfrac{1}{8}p^{2|-1}(x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}.(\Delta x)^2 - \tfrac{1}{16}p^{3|-1}(x+3\Delta x)^{p-3|\Delta x}(\Delta x)^3.$$

Nimmt man auch hier den angezogenen Satz zu Hülfe und wendet ihn auf Fakultäten an, so ergibt sich aus 6) für ein unendlich wachsendes $n$:

7) $\operatorname{Lim}[S(-)^{2n}(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x} - \frac{1}{2}(x+(2n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}] = \zeta^{-1}x^{p|\Delta x},$

$\operatorname{Lim}[S(-)^{2n-1}(x+(2n-1)\Delta x)^{p|\Delta x} + \frac{1}{2}(x+2n\Delta x)^{p|\Delta x}] = \zeta^{-1}x^{p|\Delta x}.$

Diess stimmt mit den in §. 9. gegebenen Resultaten überein.

Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn man folgende Methode wählt. Die Gleichung 13) §. 7. kann unter der nachstehenden Form dargestellt werden:

8) $x^p - (x+\Delta x)^p + (x+2\Delta x)^p \ldots - (x+(2n-1)\Delta x)^p + \frac{1}{2}(x+2n\Delta x)^p$

$= \frac{1}{4}[(x+2n\Delta x)^p - (x+(2n-1)\Delta x)^p]$

$+ \frac{p}{8}[(x+2n\Delta x)^{p-1} - (x+(2n-1)\Delta x)^{p-1}]\Delta x$

$- \frac{(p)_3}{16}[(x+2n\Delta x)^{p-3} - (x+(2n-1)\Delta x)^{p-3}](\Delta x)^3$

. . . . . . . . . . . . . . .

$+ \frac{1}{2}x^p - \frac{p}{4}x^{p-1}\Delta x + \frac{1}{8}(p)_3x^{p-3}(\Delta x)^3 - \frac{1}{4}(p)_5x^{p-5}(\Delta x)^5 \ldots$

Nun ist $(x+2n\Delta x)^{p-k}-(x+(2n-1)\Delta x)^{p-k}=\Delta(x+(2n-1)\Delta x)^{p-k}$.
Hiernach geht 8) über in:

$$9)\quad x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p\ldots\ldots-(x+(2n-1)\Delta x)^p+\tfrac{1}{2}(x+2n\Delta x)^p$$
$$=\tfrac{1}{4}\Delta(x+(2n-1)\Delta x)^p+\tfrac{1}{8}p\,\Delta x\Delta(x+(2n-1)\Delta x)^{p-1}$$
$$-\tfrac{1}{16}(p)_3(\Delta x)^3\Delta(x+(2n-1)\Delta x)^{p-3}+\ldots\ldots$$
$$+\tfrac{1}{2}x^p-\tfrac{1}{4}px^{p-1}\Delta x+\tfrac{1}{8}(p)_3x^{p-3}(\Delta x)^3,$$

worin für die Glieder des Summenausdruckes folgende Gleichung gilt:

$$10)\quad \Delta(x+(2n-1)\Delta x)^{p-k}=(p-k)(x+(2n-1)\Delta x)^{p-k-1}\Delta x$$
$$+(p-k)_2(x+(2n-1)\Delta x)^{p-k-1}(\Delta x)^2$$
$$+(p-k)_3(x+(2n-1)\Delta x)^{p-k-3}(\Delta x)^3\ldots\ldots$$
$$=(p-k)(x+2n\Delta x)^{p-k-1}\Delta x$$
$$-(p-k)_2(x+2n\Delta x)^{p-k-2}(\Delta x)^2$$
$$+(p-k)_3(x+2n\Delta x)^{p-k-3}(\Delta x)^3-\ldots\ldots$$

Eben so erhält man:

$$11)\quad x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p\ldots\ldots(x+2n\Delta x)^p-\tfrac{1}{2}(x+(2n+1)\Delta x)^p$$
$$=-\tfrac{1}{4}\Delta(x+2n\Delta x)^p-\tfrac{1}{8}p\Delta x\,.\,\Delta(x+2n\Delta x)^{p-1}$$
$$+\tfrac{1}{16}(p)_3(\Delta x)^3\Delta(x+2n\Delta x)^{p-3}-\ldots\ldots$$
$$+\tfrac{1}{2}x^p-\tfrac{1}{4}px^{p-1}\Delta x+\tfrac{1}{8}(p)_3x^{p-3}(\Delta x)^3-\ldots\ldots$$

Auch hier gilt die Darstellung 10), wenn man $2n+1$ statt $2n$ setzt.

Aus 10) ergibt sich, dass der Summenausdruck in 9) und 11) in mehrere Reihen übergeht, die nach den fallenden Potenzen von $(x+2n\Delta x)$ oder von $(x+(2n\pm1)\Delta x)$ geordnet sind. Bei wachsendem $n$ wächst nun auch nach 10) der Werth der hieraus fliessenden Ausdrücke, und weder die einzelnen Ausdrücke, noch auch ihre Gesammtheit geht in 0 über. Es entstehen daher nach dieser Methode keine Grenzwerthe, wobei zu bemerken ist, dass die Ausdrücke auf der rechten Seite niedere Potenzen, als auf der linken führen.

In einem Falle jedoch, wenn $p=1$ ist, führen die genannten Reihen auf einen Grenzwerth, wenn man diesen Namen gebrauchen will, und man erhält aus 9) und 11) für ein unendlich wachsendes $n$:

$$12)\ \mathrm{Lim}\,[S(-)^{2n-1}(x+(2n-1)\Delta x)^p + \tfrac{1}{2}(x+2n\Delta x)^p] = \tfrac{1}{2}x,$$

$$\mathrm{Lim}\,[S(-)^{2n}(x+2n\Delta x)^p - \tfrac{1}{2}(x+(2n+1)\Delta x)^p] = \tfrac{1}{2}(x-\Delta x).$$

Aehnliches gilt von den Fakultäten-Reihen. Aus 3) §. 9. erhält man, wenn die negativen Aufstufungen der Fakultäten nach §. 83. meiner Lehre von den aufsteigenden Functionen entwickelt und die hieraus folgenden Reihen vereinigt und durch Unterschiede dargestellt werden:

$$13)\ x^{p|\Delta x} - (x+\Delta x)^{p|\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x} \ldots$$

$$\ldots (-)^n (x+n\Delta x)^{p|\Delta x} (-)^{n+1} \tfrac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}$$

$$= (-)^{n+1}[\tfrac{1}{4}\Delta(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x} - \frac{p\Delta x}{8}\Delta(x+(n+2)\Delta x)^{p-1|\Delta x}$$

$$+ \frac{p^{2|-1}(\Delta x)^2}{16}\Delta(x+(n+3)\Delta x)^{p-2|\Delta x} \ldots]$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^{p|\Delta x} - \frac{p}{4}(x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}\Delta x + \frac{p^{2|-1}}{8}(x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}(\Delta x)^2 - \ldots$$

Werden die angezeigten Unterschiede eingeführt, so entsteht:

$$14)\ x^{p|\Delta x} - (x+\Delta x)^{p|\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p|\Delta x} \ldots$$

$$\ldots (-)^n (x+n\Delta x)^{p|\Delta x} (-)^{n+1} \tfrac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^{p|\Delta x}$$

$$= (-)^{n+1}[\tfrac{1}{4}p(x+(n+2)\Delta x)^{p-1|\Delta x}\Delta x - \frac{p^{2|-1}}{8}(x+(n+3)\Delta x)^{p-2|\Delta x}$$

$$+ \frac{p^{3|-1}}{16}(x+(n+4)\Delta x)^{p-3|\Delta x}(\Delta x)^3 - \ldots$$

$$+ \tfrac{1}{2}x^{p|\Delta x} - \frac{p}{4}(x+\Delta x)^{p-1|\Delta x}\Delta x + \frac{p^{2|-1}}{8}(x+2\Delta x)^{p-2|\Delta x}(\Delta x)^2 - \ldots$$

Aus 14) zeigt sich, dass bei wachsendem $n$ kein Grenzwerth entsteht, und was vorhin über die in §. 7. benutzte Methode gesagt wurde, findet auch hier Anwendung.

Es liegen nun verschiedene Betrachtungsweisen vor, wovon die eine auf das Glied $\tfrac{1}{2}(x+2n\Delta x)^p$ und $\tfrac{1}{2}(x+(2n+1)\Delta x)^p$ Rücksicht nimmt, die andere nicht. Auch bei Aufnahme dieses Gliedes fliessen für eine und dieselbe Sache bei verschiedener Behandlungsweise verschiedene Resultate. Jeder Behandlungsweise stehen Gründe zur Seite. Welche Resultate werden nun als die richtigen zu bezeichnen sein? Hält man die Annahme des allmäligen Wachsens für $n$ und die möglichst einfache Darstellung der

Summenausdrücke, wie sie in No. 8) u. ff. gegeben wurde, fest, dann scheint die zuletzt entwickelte Methode den Vorzug vor den übrigen zu verdienen, und es müssen sofort die aus den andern Methoden hervorgehenden Resultate als unzulässig bezeichnet werden.

---

# XII.

# Kriterium der Convergenz und Divergenz der Reihen.

Von

Herrn *R. Hoppe*,

Privatdocenten an der Universität zu Berlin.

---

Unter den convergenten Reihen lassen sich zwei Classen unterscheiden: solche, deren Convergenz bei beliebiger Aenderung der Vorzeichen der Glieder fortbesteht, und solche, die nur für gewisse Bestimmung der Vorzeichen convergiren. Die Bedingung der Convergenz für die letztere Classe ist einfach, wenn die Vorzeichen beständig abwechseln: es reicht bekanntlich hin, wenn die absoluten Werthe der Glieder von irgend einem Gliede an beständig abnehmen und sich der Grenze 0 nähern. Ueber diesen besonderen Fall hinaus lässt sich hier nicht wohl ein allgemeines Gesetz aufstellen. In Betreff der erstern Classe hingegen scheint mir das gewöhnliche Verfahren bei Beurtheilung der Convergenz in mancher Hinsicht einer Verbesserung fähig zu sein. Wenn gleich die Division zweier auf einander folgender Glieder, auf der jenes Verfahren beruht, für viele Reihen die Untersuchung vereinfacht, so bringt dieser Umweg doch zugleich einige Mängel mit sich. Erstens bleibt dabei zwischen entschieden convergirenden

und entschieden divergirenden Reihen eine Lücke, die sich nur durch neue Kunstgriffe, und zwar wieder bloss bis zu einer neuen Grenze ausfüllen lässt. Zweitens lässt diess Verfahren eine wichtige Eigenschaft der Reihen erster Classe ganz unbenutzt, die nämlich, dass sie sich nach dem Grade ihrer Convergenz vergleichen lassen, so dass durch die Prüfung ihrer Convergenz zugleich deutlich wird, welche Veränderungen das allgemeine Glied erfahren kann, ohne dass die Convergenz aufhört.

Dass eine solche vergleichende Beurtheilung der Convergenz, und zwar bloss nach dem Verhalten der allgemeinen Glieder bei unendlich grossem Stellenzeiger, möglich ist, ist ohne Zweifel bekannt; hier soll gezeigt werden, dass zur Feststellung der Gesetze sowohl, wie zu ihrer Anwendung die Elemente der Differenzialrechnung vollkommen ausreichen, und dass in Bezug auf die Leichtigkeit der Behandlung die vorgeschlagene Methode der gewöhnlichen in keiner Weise nachsteht. Da hier nur von Reihen der ersten Classe die Rede sein wird, deren Merkmal darin besteht, dass die absoluten Werthe ihrer Glieder selbst convergente Reihen bilden, so können wir die Glieder überhaupt durchgängig positiv annehmen. Ferner können wir uns auf solche Reihen beschränken, deren Glieder fortwährend abnehmen. Denn, entfernt man vor jedem Gliede einer beliebigen Reihe alle vorausgehenden kleinern Glieder, so erhält man eine durchgängig abnehmende Reihe, die aus leicht zu übersehenden Gründen mit der ursprünglichen zu gleicher Zeit convergirt oder divergirt; ausgenommen wenn die Anzahl der zwischen je zwei Gliedern ausgestossenen Glieder mit der Stellenzahl in's Unendliche wächst, in welchem letztern Falle die Reihe die Form einer unendlichen Doppelreihe annimmt und als solche zu behandeln ist.

Sind nun $u_k$ und $v_k$ die durchgängig positiven und bei wachsendem $k$ beständig abnehmenden allgemeinen Glieder zweier Reihen, so braucht man in Betreff ihres Quotienten $\frac{v_k}{u_k}$ nur die drei Fälle in Betrachtung zu ziehen: 1) wo derselbe für $k=\infty$ verschwindet; 2) wo er einen von 0 verschiedenen Grenzwerth hat; 3) wo er mit $k$ in's Unendliche wächst. Ist er eine schwankende Function von $k$, so lässt sich eine der Reihen füglich als Doppelreihe betrachten; denn wenn er zwei verschiedene constante Werthe unendlich oft überschreiten soll, so muss die Anzahl der jedesmal dazwischen liegenden Glieder mit $k$ in's Unendliche wachsen.

Angenommen nun, dass die Reihe der $u_k$ convergirt, so wird in den beiden ersten Fällen auch die Reihe der $v_k$ convergiren,

da ihre Summe bei wachsendem $k$ stets kleiner bleibt, als die Summe der $u_k$, multiplicirt mit dem grössten Werthe von $\frac{v_k}{u_k}$. Im ersten Falle kann man überdiess sagen, die Reihe der $v_k$ convergire stärker als die der $u_k$, im zweiten, sie convergire mit ihr gleich stark. Im dritten Falle wird demgemäss die Reihe der $v_k$ entweder schwächer convergiren oder divergiren. Das Umgekehrte findet in Bezug auf Divergenz statt, falls die Reihe der $u_k$ divergirt; im ersten Falle wird die der $v_k$ schwächer divergiren oder convergiren, im zweiten gleich stark, im dritten stärker divergiren.

Demzufolge würde eine Reihe wie die der $u_k$ zur Prüfung aller übrigen dienen können, wenn sie unter allen convergenten Reihen am schwächsten convergirte oder unter allen divergenten am schwächsten divergirte. Diese Bedingung lässt sie zwar, weil keine Reihe die verlangte Eigenschaft absolut besitzt, nur successive erfüllen. Allein man kann die Form des allgemeinen Gliedes angeben, innerhalb deren man den Grad der Convergenz sowohl, als der Divergenz beliebig erniedrigen kann.

Zu diesem Ende sei

$$C_0x = x, \quad C_1x = \log x, \quad C_2x = \log\log x, \text{ etc.};$$

im Allgemeinen

$$C_nx = \log C_{n-1}x.$$

Setzt man überdiess der Kürze wegen

$$\varphi x = -\frac{1}{\alpha}(C_nx)^{-\alpha},$$

wo $\alpha$ eine beliebige Grösse $>0$ bezeichnet, so erhält man durch Differenziation:

$$\varphi' x = \frac{1}{C_0x C_1x \ldots . C_nx(C_nx)^{\alpha}}.$$

Nimmt man $x$ gross genug, dass nach $n$maliger Logarithmirung noch eine positive Grösse erscheint, so ist $\varphi x$ eine bei wachsendem $x$ beständig abnehmende und für $x = \infty$ verschwindende Function, folglich

$$(-1)^k \varphi\left(\frac{k}{2}\right)$$

das allgemeine Glied einer convergenten Reihe. Betrachtet man die Summe zweier auf einander folgender Glieder:

$$-\varphi(k-\tfrac{1}{2})+\varphi k,$$

welche nach dem Taylor'schen Satze

$$=\tfrac{1}{2}\varphi'(k-\frac{\vartheta}{2})$$

ist, indem $\vartheta$ eine Grösse zwischen 0 und 1 bezeichnet, als meines Glied derselben Reihe, so bestebt diese, von einem reichend grossen Werthe von $k$ an gerechnet, aus positiven dern und convergirt für irgend einen Werth von $\vartheta$ zwischen ( 1. Da aber

$$\varphi'k \overset{=}{<} \varphi'(k-\frac{\vartheta}{2})$$

ist, so convergirt auch die Reihe, deren allgemeines Glied

$$\varphi'k=\frac{1}{C_0kC_1k\ldots.C_nk(C_nk)^{\alpha}}.$$

Ferner ist:

$$\sum_{k=m}^{k=h-1}\{C_{n+1}(k+1)-C_{n+1}k\}=C_{n+1}h-C_{n+1}m$$

eine Grösse, die mit $h$ in's Unendliche wächst; folglich dive die Reihe, deren allgemeines Glied ist:

$$C_{n+1}(k+1)-C_{n+1}k=C_{n+1}'(k+\vartheta).$$

Nun hat man

$$C_{n+1}'x=\frac{1}{C_0xC_1x\ldots.C_nx},$$

woraus erhellt, dass

$$C_{n+1}'k \overset{=}{>} C_{n+1}'(k+\vartheta)$$

ist; folglich ist auch

$$C_{n+1}'k=\frac{1}{C_0kC_1k\ldots.C_nk}$$

das allgemeine Glied einer divergenten Reihe. Demgemäss die Grössen

$$\frac{1}{k^{1+\alpha}},\quad \frac{1}{k(\log k)^{1+\alpha}},\quad \frac{1}{k\log k(\log\log k)^{1+\alpha}},\ \text{etc.}$$

für $\alpha>0$ allgemeine Glieder convergenter, für $\alpha=0$ diverge

Reihen; und zwar leuchtet ein, dass immer die folgende schwächer convergirt oder resp. schwächer divergirt als die vorhergehende. Zur Prüfung der Convergenz anderer Reihen ergiebt sich hieraus folgender Satz:

Eine Reihe positiver, beständig abnehmender Glieder $u_k$ convergirt, wenn die Grösse

$$u_k C_0 k C_1 k \;\ldots\; C_n k (C_n k)^\alpha$$

für $\alpha > 0$ nicht mit $k$ in's Unendliche wächst, und divergirt, wenn dieselbe Grösse für $\alpha = 0$ bei wachsendem $k$ nicht verschwindet.

Nach Aufstellung dieses Kriteriums möchte es nicht überflüssig sein, den Einwand zu widerlegen, als ob dessen Anwendung, insbesondere die Prüfung der eben genannten Grösse in Bezug auf ihr Verhalten bei unendlich wachsendem $k$, besondere Schwierigkeiten böte. Hier ist auf einen Umstand hinzuweisen, den die Lehrbücher der Differenzialrechnung unbeachtet zu lassen pflegen, obwohl er in vielen ähnlichen Fällen sehr nutzbar werden kann. Zu prüfen ist nämlich nicht das ganze Product, sondern nur der Factor $u_k$. Ich nenne $v_k$ ein Aequivalent von $u_k$, wenn der Quotient beider Grössen für $k = \infty$ den Grenzwerth 1 hat. Es ist klar, dass alsdann in obigem Producte für jeden Factor ein beliebiges Aequivalent gesetzt werden kann. Nun ist die Grösse, mit der $u_k$ multiplicirt erscheint, schon in der Form ihres einfachsten Aequivalentes dargestellt. Man braucht daher nur das Gleiche mit $u_k$ zu thun, und die Entscheidung erfolgt augenblicklich.

Vergleicht man diess Verfahren mit dem gewöhnlichen, welches statt $u_k$ den Quotienten $\frac{u_k}{u_{k-1}}$ untersucht, so zeigt sich, dass der eigentliche Vortheil des letztern darin besteht, dass Producte von wachsender Anzahl von Factoren, die arithmetische Reihen bilden, durch Division entfernt werden. Um die gleiche Leichtigkeit für die in Rede stehende Methode zu erzielen, kommt es nur darauf an, das einfachste Aequivalent des Products einer arithmetischen Reihe

$$a(a+b)(a+2b)\ldots.(a+(k-1)b).$$

durch eine Formel festzustellen, was mit Hülfe des Taylorschen Lehrsatzes geschehen kann. Es sei

$$\varphi x = \frac{a+bx}{b}\log(a+bx) - x,$$

woraus durch Differenziation hervorgeht:

$$\varphi' x = \log(a+bx),$$

$$\varphi'' x = \frac{b}{a+bx},$$

$$\varphi''' x = -\frac{b^2}{(a+bx)^2}.$$

Nun ist allgemein:

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} \{\varphi(h+1) - \varphi h\} = \varphi k - \varphi 0,$$

und nach dem Taylor'schen Satze:

$$\Sigma\varphi(h+1) - \Sigma\varphi h = \Sigma\varphi' h + \tfrac{1}{2}\Sigma\varphi'' h + \tfrac{1}{6}\Sigma\varphi'''(h+\theta),$$

$$\tfrac{1}{2}\Sigma\varphi'(h+1) - \tfrac{1}{2}\Sigma\varphi' h = \tfrac{1}{2}\Sigma\varphi'' h + \tfrac{1}{4}\Sigma\varphi'''(h+\theta_1).$$

Zählt man die $h$ von $0$ bis $k-1$ und subtrahirt beide Gleich[un]gen, so erhält man gemäss der vorhergehenden:

$$\varphi k - \varphi 0 - \tfrac{1}{2}(\varphi' k - \varphi' 0) = \Sigma\varphi' h + \tfrac{1}{6}\Sigma\varphi'''(h+\theta) - \tfrac{1}{4}\Sigma\varphi'''(h+\theta_1)$$

und nach Einführung der Werthe der $\varphi$:

$$\frac{a+(k-\frac{1}{2})b}{b}\log(a+kb) - \frac{a-\frac{1}{2}b}{b}\log a - k = \sum_{h=0}^{h=k-1}\log(a+hb) -$$

wo

$$c_k = \sum_{h=0}^{h=k-1}\left\{\frac{b^2}{6(a+b(h+\theta))^2} - \frac{b^2}{4(a+b(h+\theta_1))^2}\right\}$$

gesetzt ist, und woraus unmittelbar folgt:

$$a(a+b)(a+2b)\dots(a+(k-1)b) = e^{c_k - k}\frac{(a+kb)^{\frac{a}{b}+k-\frac{1}{2}}}{a^{\frac{a}{b}-\frac{1}{2}}}.$$

Für $k=\infty$ hat $c_k$, weil sein Reihenausdruck convergirt, ei[nen] Grenzwerth $c'$. Setzt man

$$e^{c'} a^{\frac{1}{2}-\frac{a}{b}} = c,$$

so hat

$$\frac{a(a+b)\ldots(a+(k-1)b)}{ce^{-k}(a+kb)^{\frac{a}{b}+k-\frac{1}{2}}}$$

renzwerth 1, mithin ist

$$ce^{-k}(a+kb)^{\frac{a}{b}+k-\frac{1}{2}}$$

suchte Aequivalent des gegebenen Products. Die Grösse tets $>0$ und kann im Uebrigen als gleichgültig angesehen ı. Für $a=b=1$ erhält man insbesondere

$$ce^{-k}(k+1)^{k+\frac{1}{2}}$$

quivalent des Products

$$1.2\ldots.k.$$

sei z. B. die binomische Reihe in Bezug auf ihre Convergenz fen. Ihr allgemeines Glied ist

$$=\frac{a(a-1)\ldots.(a-k+1)}{1.2\ldots.k}x^k,$$

equivalent seines absoluten Werthes:

$$=c\,\frac{e^{-k}(k-a)^{k-a-\frac{1}{2}}}{e^{-k}(k+1)^{k+\frac{1}{2}}}x^k$$

$$=c\left(1-\frac{a+1}{k+1}\right)^{k+\frac{1}{2}}\left(1-\frac{a}{k}\right)^{-a-1}\frac{x^k}{k^{a+1}}.$$

sten Factoren haben für sich endliche, von 0 verschiedene verthe; daher braucht man als Aequivalent des allgemeinen s nur einzuführen:

$$\frac{x^k}{k^{a+1}}.$$

e Reihe wird convergiren, wenn

$$\frac{x^k}{k^{a+1}}k^{1+\alpha}=x^k k^{\alpha-a}$$

Grenzwerth hat, d. i. 1) für $x^2<1$; 2) für $x^2=1$, $a>0$, man $\alpha \overline{\overline{<}}\, a$ setzt.

e wird bei positiven Gliedern divergiren, wenn

$$x^k k^{-a}$$

nicht verschwindet, d. i. 1) für $x^2 > 1$; 2) für $x^2 = 1$, $a \overline{\gtrless} 0$. Beide Fälle schliessen sich vollkommen aus.

Bei abwechselnden Vorzeichen convergirt die Reihe, wenn das Aequivalent des allgemeinen Gliedes

$$x^k k^{-a-1}$$

verschwindet, d. i. für $x^2 < 1$ und für $x^2 = 1$, $a > -1$.

---

# XIII.

## Ueber die Werthbestimmung von Functionen in unbestimmter Form.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

---

Im Allgemeinen ist der Werth einer Function in unbestimmter Form abhängig 1) von der Form der Function und 2) von den in der Form enthaltenen Constanten. So erscheinen z. B. die Functionen

$$\frac{\lg(1+x)}{x} \quad \text{und} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{x-1}$$

für $x = 0$ beide unter der Form $\frac{0}{0}$, aber der Zahlwerth der ersteren ist 1 und jener der letzteren ist 2. Anderseits sind die folgenden Functionen (1) bis (5) sämmtlich in der Formel

$$(1+qx^m)^{\frac{1}{x^n}}$$

enthalten, reduciren sich für $x=0$ auf $1^{+\infty}$ und haben Zahlwerthe, welche zugleich mit $a$, $m$ und $n$ sich ändern.

(1) $$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

(2) $$(1-x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{e},$$

(3) $$(1-x^2)^{\frac{1}{x}} = 1,$$

(4) $$(1+x)^{\frac{1}{x^2}} = \infty,$$

(5) $$(1-x)^{\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Ebenso ist für $x=1$:

(6) $$x^{\frac{1}{1-x^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{e}}$$

abhängig von dem Werthe von $n$.

Es gibt aber, wie wir im Nachfolgenden zeigen werden, unbestimmte Formen, welche nur einen einzigen Zahlwerth zulassen, gleichgiltig, aus welcher Function sie herstammen.

Bezeichnen $u$ und $v$ zwei solche Functionen von $x$, dass $X=u^v$ für den besonderen Werth $a$ der Variabeln $x$ unter der Form $0^0$ oder $\infty^0$ erscheint, so ist bekanntlich der Zahlwerth von $X=e^w$, wenn $w=-\frac{u'.v^2}{u.v'}$, unter $u'$ und $v'$ die ersten Differenzial-Quotienten von $u$ und $v$ verstanden.

1) Wenn $X=u^v$ für $x=a$ sich in $0^0$ verwandelt, so ist $\frac{u}{v}=\frac{0}{0}$, mithin für $x=a$:

$$\frac{u}{v}=\frac{u'}{v'}=h,$$

wo $h$ den bestimmten Zahlwerth von $\frac{u}{v}$ bezeichnet. Nun ist

$$w=-\frac{u'}{v'}\cdot\frac{v}{u}.v=-h.\frac{1}{h}.v=-v=0, \text{ also } X=e^0=1.$$

Diess gilt selbst dann, wenn $h$ den Werth 0 oder $\infty$ hat, weil $\frac{h}{h}$ identisch der Einheit gleich ist. — Es gilt daher folgender

**Lehrsatz.**

**Erscheint die Function $u^v$ für einen besonderen Werth $a$ der Variabeln $x$ unter der Form $0^0$, so ist ihr Zahlwerth stets gleich 1.**

Beispiele. Für $x=0$ ist

$$(7)\qquad \frac{u}{v}=\frac{\lg(1+x)}{\sqrt{x}}=0, \text{ aber } X=[\lg(1+x)]^{\sqrt{x}}=1,$$

$$(8)\qquad \frac{u}{v}=\frac{\lg(1+x)}{x^2}=\infty, \text{ aber } X=[\lg(1+x)]^{x^2}=1.$$

2) Erzeugt $x=a$ in $X=u^v$ die Form $\infty^0$, so hat $\frac{v}{u^{-1}}$ die Form $\frac{0}{0}$, also ist für $x=a$:

$$\frac{v}{u^{-1}}=\frac{v'}{-u^{-2}.u'}=-\frac{u^2.v'}{u'} \text{ oder } uv=-\frac{u^2v'}{u'};$$

durch $u$ abgekürzt erhält man die Gleichung:

$$\text{für } x=a \quad v=-\frac{u.v'}{u'},$$

oder durch $v^2$ dividirt:

$$\frac{1}{v}=-\frac{u.v'}{v^2.u'}=\frac{1}{w}, \text{ mithin } w=v=0, \text{ also } X=e^0=1.$$

Diess beweist den

**Lehrsatz.**

**Erscheint die Function $u^v$ für den besonderen Werth $a$ von $x$ unter der Form $\infty^0$, so ist ihr Zahlwerth stets gleich 1.**

Beispiele. Für $x=\frac{\pi}{2}$ ist:

$$(9)\qquad uv=\operatorname{tg}x.\cos x=1, \text{ jedoch } X=[\operatorname{tg}x]^{\cos x}=1;$$

für $x=0$ ist:

$$(10) \qquad w=\left(\frac{1}{x}\right).(x.\lg x)=-\infty, \quad X=\left(\frac{1}{x}\right)^{x.\lg x}=1.$$

Functionen also, welche für einen particulären Werth der Variabeln unter einer dieser beiden Formen $0^0$ oder $\infty^0$ erscheinen, bedürfen **nicht jedesmal einer besonderen Untersuchung**, und diese Formen können nur insofern „unbestimmt“ genannt werden, als der ihnen entsprechende einzige Zahlwerth 1 aus $0^0$ und $\infty^0$ nicht unmittelbar mit genügender Strenge hergeleitet werden kann. (S. A. Cauchy, Calcul différentiel. Leçon 5.)

---

# XIV.

## Ueber die Eigenschaften der Summe einer combinatorischen Reihe.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

---

Der nöthigen Kürze wegen bezeichnen wir im Folgenden allgemein die Anzahl der Combinationen von $m$ Elementen zur $p$ Classe durch das bekannte Symbol $\binom{m}{p}$, und die Anzahl der Permutationen von $n$ Elementen durch $n!$, so dass folgende beide Gleichungen bestehen:

$$(1) \qquad \frac{m.(m-1).(m-2)\ldots.(m-p+1)}{1.2.3\ldots.p}=\binom{m}{p}$$

und

(2) $$1.2.3\ldots(n-1).n = n!.$$

Hierdurch erklärt sich der analytische Bau der Reihe (3), welche zuerst von Euler aufgestellt, die Lösung eines Problems de Wahrscheinlichkeits-Rechnung *) in sich schliesst und das Object unserer nachfolgenden Betrachtungen ist:

(3) $$G_m^n = \binom{m}{i}^n - \binom{m}{1}\binom{m-1}{i}^n + \binom{m}{2}\binom{m-2}{i}^n - \ldots\ldots$$

$$\ldots + (-1)^p.\binom{m}{p}.\binom{m-p}{i}^n + \ldots$$

$m$ und $n$ in $G_m^n$ sind Indexe, welche mit den Grössen $m$ und $n$ in der Reihe (3) correspondiren; derart, dass $G_{m-1}^n$, $G_m^{n-1}$ dasjenige bezeichnet, was aus der Reihe (3) wird, wenn $m-1$ oder $n-1$ an die Stelle von $m$ oder $n$ tritt.

Wir wollen nun, ohne Rücksicht auf die Beziehung zur Wahrscheinlichkeits-Rechnung, direct aus der Construction der Reihe (3) folgenden Lehrsatz beweisen:

Bezeichnen $m$, $n$ und $i$ ganze positive Zahlen und ist $m > ni$, so ist die Summe der Reihe (3) gleich Null; und ist $m = ni$, so ist die Summe der Reihe (3) gleich $\frac{(in)!}{(i!)^n}$. In der analytischen Zeichensprache:

$$G_m^n = 0 \text{ wenn } m > ni \text{ und } G_m^n = \frac{(i.n)!}{(i!)^n} \text{ wenn } m = ni.$$

Beweis. 1) So lange die Werthe von $m$ und $n$ von Null verschieden sind, ist die Reihe (3) mit dem $(m-i+1)$ten Gliede geschlossen. Ist $m > 0$ und $n = 0$, so reducirt sich dieselbe auf folgende $(m+1)$ Glieder:

$$1 - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \binom{m}{3} + \ldots + (-1)^m.\binom{m}{m} = (1-1)^m = 0,$$

und ist $m = n = 0$, so reducirt sich die Reihe auf das erste Glied und wird gleich $0^0 = 1$ **). Also hat man:

(4) $$G_m^0 = 0 \text{ wenn } m > 0,$$

(5) $$G_0^0 = 1.$$

*) S. Lacroix, Calcul des probabilités. S. 64.

**) S. Seite 226. erster Lehrsatz.

2) Setzen wir in (3) statt $m$ $m-1$ und addiren das Resultat der Substitution zu (3), so ist der erste Theil der neuen Gleichung $G^n_m + G^n_{m-1}$. In dieser neuen setzen wir wieder $m-1$ an die Stelle von $m$, so ist die Summe der zwei neuen Gleichungen $G^n_m + 2.G^n_{m-1} + G^n_{m-2}$; verwandelt man auch hier wieder $m$ in $m-1$ und addirt, so ist die Summe $G^n_m + 3.G^n_{m-1} + 3.G^n_{m-2} + G^n_{m-3}$. Führen wir diese Operation $i$mal aus, indem wir zur Reduction der zweiten Theile unserer Gleichungen immer von der aus der Combinationslehre bekannten Gleichung (6) Gebrauch machen, so haben wir folgende Rechnung:

$$(6)\qquad \binom{m}{p} - \binom{m-1}{p-1} = \binom{m-1}{p},$$

$$G^n_m = \binom{m}{i}^n - \binom{m}{1}\cdot\binom{m-1}{i}^n + \binom{m}{2}\cdot\binom{m-2}{i}^n - \binom{m}{3}\cdot\binom{m-3}{i}^n$$
$$+ \ldots + (-1)^p.\binom{m}{p}\cdot\binom{m-p}{i}^n + \ldots,$$

$$G^n_{m-1} = \binom{m-1}{i}^n - \binom{m-1}{1}\cdot\binom{m-2}{i}^n + \binom{m-1}{2}\cdot\binom{m-3}{i}^n$$
$$- \ldots + (-1)^{p-1}.\binom{m-1}{p-1}\cdot\binom{m-p}{i}^n + \ldots,$$

$$G^n_m + G^n_{m-1} = \binom{m}{i}^n - \binom{m-1}{1}\cdot\binom{m-1}{i}^n + \binom{m-1}{2}\cdot\binom{m-2}{i}^n$$
$$- \binom{m-1}{3}\cdot\binom{m-3}{i}^n + \ldots + (-1)^p.\binom{m-1}{p}\cdot\binom{m-p}{i}^n + \ldots,$$

$$G^n_{m-1} + G^n_{m-2} = \binom{m-1}{i}^n - \binom{m-2}{1}\cdot\binom{m-2}{i}^n + \binom{m-2}{2}\cdot\binom{m-3}{i}^n$$
$$- \ldots + (-1)^{p-1}.\binom{m-2}{p-1}\cdot\binom{m-p}{i}^n + \ldots,$$

$$G^n_m + 2.G^n_{m-1} + G^n_{m-2} = \binom{m}{i}^n - \binom{m-2}{1}\cdot\binom{m-1}{i}^n$$
$$+ \binom{m-2}{2}\cdot\binom{m-2}{i}^n - \binom{m-2}{3}\cdot\binom{m-3}{i}^n$$
$$+ \ldots + (-1)^p.\binom{m-2}{p}\cdot\binom{m-p}{i}^n + \ldots,$$

$$G^n_{m-1}+2.G^n_{m-2}+G^n_{m-3}=\binom{m-1}{i}^n-\binom{m-3}{1}\cdot\binom{m-2}{i}^n$$

$$+\binom{m-3}{2}\cdot\binom{m-3}{i}^n-\ldots+(-1)^{p-1}.\binom{m-3}{p-1}\cdot\binom{m-p}{i}^n+\ldots,$$

$$G^n_m+3.G^n_{m-1}+3.G^n_{m-2}+G^n_{m-3}=\binom{m}{i}^n-\binom{m-3}{1}\cdot\binom{m-1}{i}^n$$

$$+\binom{m-3}{2}\binom{m-2}{i}^n-\ldots+(-1)^p.\binom{m-3}{p}\cdot\binom{m-p}{i}^n+\ldots;$$

und man gelangt endlich zur Gleichung:

$$(7)\qquad G^n_m+\binom{i}{1}G^n_{m-1}+\binom{i}{2}G^n_{m-2}+\ldots+\binom{i}{i}G^n_{m-i}$$

$$=\binom{m}{i}^n-\binom{m-i}{1}\cdot\binom{m-1}{i}^n+\binom{m-i}{2}\cdot\binom{m-2}{i}^n$$

$$-\ldots+(-1)^p.\binom{m-i}{p}\cdot\binom{m-p}{i}^n+\ldots$$

Zuletzt setzen wir in dieser Gleichung noch $n-1$ an die Stelle von $n$ und erhalten:

$$(8)\qquad G^{n-1}_m+\binom{i}{1}G^{n-1}_{m-1}+\binom{i}{2}G^{n-1}_{m-2}+\ldots+\binom{i}{i}G^{n-1}_{m-i}$$

$$=\binom{m}{i}^{n-1}-\binom{m-i}{1}\cdot\binom{m-1}{i}^{n-1}+\binom{m-i}{2}\cdot\binom{m-2}{i}^{n-1}$$

$$-\ldots+(-1)^p.\binom{m-i}{p}\cdot\binom{m-p}{i}^n+\ldots$$

Nehmen wir nun in (8) $\binom{m}{i}$ als Factor heraus und bedenken, dass allgemein:

$$(9)\qquad \binom{m}{p}\cdot\binom{m-p}{i}^n=\binom{m}{p}\cdot\binom{m-p}{i}\cdot\binom{m-p}{i}^{n-1}$$

und

$$10)\qquad \frac{\binom{m}{p}\binom{m-p}{i}}{\binom{m}{i}}=\binom{m-i}{p},$$

so ist

$$(11)\qquad G_m^n=\binom{m}{i}\cdot\Big[\binom{m}{i}^{n-1}-\binom{m-i}{1}\cdot\binom{m-1}{i}^{n-1}$$
$$+\binom{m-i}{2}\binom{m-2}{i}^{n-1}-\ldots+(-1)^p\cdot\binom{m-i}{p}\cdot\binom{m-p}{i}^{n-1}+\ldots\Big].$$

Der Factor von $\binom{m}{i}$ ist gleich dem zweiten Theile der Gleichung (8), und es ist daher:

$$(12)\qquad G_m^n=\binom{m}{i}\cdot\Big[G_m^{n-1}+\binom{i}{1}\cdot G_{m-1}^{n-1}+\binom{i}{2}G_{m-2}^{n-1}+\binom{i}{3}G_{m-3}^{n-1}$$
$$+\ldots+\binom{i}{i}G_{m-i}^{n-1}\Big].$$

3) Die Gleichung (12) zeigt den Zusammenhang zwischen $(i+2)$ verschiedenen Grössen $G$ und bildet als Hauptgleichung den Mittelpunkt unseres Beweises.

Werden in dieser Gleichung successive, statt $m$ und $n$ paarweise, die Glieder folgender abnehmender Reihen substituirt:

$m-i$ und $n-1$,

$m-2i$ „ $n-2$,

. . . . . . . . . . .

$m-(n-3)i$ „ $3$,

$m-(n-2)i$ „ $2$,

$m-(n-1)i$ „ $1$,

und die Resultate der Substitution in umgekehrter Ordnung angesetzt, so erhält man folgendes System von Gleichungen:

$$(13)\begin{cases} G^1_{m-(n-1)i} = \binom{m-(n-1)i}{i} \cdot \Big[ G^0_{m-(n-1)i} + \binom{i}{1} \cdot G^0_{m-(n-1)i-1} \\ \qquad + \binom{i}{2} \cdot G^0_{m-(n-1)i-2} + \ldots + G^0_{m-ni} \Big], \\ G^2_{m-(n-2)i} = \binom{m-(n-2)i}{i} \cdot \Big[ G^1_{m-(n-2)i} + \binom{i}{1} \cdot G^1_{m-(n-2)i-1} \\ \qquad + \binom{i}{2} \cdot G^1_{m-(n-2)i-2} + \ldots + G^1_{m-(n-1)i} \Big], \\ G^3_{m-(n-3)i} = \binom{m-(n-3)i}{i} \cdot \Big[ G^2_{m-(n-3)i} + \binom{i}{1} \cdot G^2_{m-(n-3)i-1} \\ \qquad + \binom{i}{2} \cdot G^2_{m-(n-3)i-2} + \ldots + G^2_{m-(n-2)i} \Big], \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ G^{n-1}_{m-i} = \binom{m-i}{i} \cdot \Big[ G^{n-2}_{m-i} + \binom{i}{1} \cdot G^{n-2}_{m-i-1} + \binom{i}{2} G^{n-2}_{m-i-2} \\ \qquad + \ldots + G^{n-2}_{m-2i} \Big], \\ G^n_m = \binom{m}{i} \cdot \Big[ G^{n-1}_m + \binom{i}{1} G^{n-1}_{m-1} + \binom{i}{2} G^{n-1}_{m-2} \\ \qquad + \ldots + G^{n-1}_{m-i} \Big]. \end{cases}$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass in den reihenförmigen Factoren der zweiten Theile unserer Gleichungen die unteren Stellenzeiger von der Rechten zur Linken wachsen.

Ist nun zuvörderst $m > ni$, so ist $m - ni > 0$, mithin nach (4) $G^0_{m-ni} = 0$; also sind im zweiten Theile der ersten Gleichung alle vorhergehenden Grössen $G$ um so mehr gleich Null, weil die unteren Stellenzeiger von der Rechten zur Linken wachsen; also ist auch $G^1_{m-(n-1)i} = 0$.

$G^1_{m-(n-1)i}$ ist gleich Null geworden, weil $m - ni > 0$ oder weil $m-(n-1)i > i$; da aber auch im zweiten Theile der zweiten Gleichung die unteren Stellenzeiger von der Rechten zur Linken wachsen, so ist diese Relation bei den vorhergehenden $G$ um so mehr erfüllt, also sind auch diese gleich Null; mithin auch $G^2_{m-(n-2)i} = 0$.

$G^2_{m-(n-2)i}$ ist gleich Null geworden, weil $m-(n-1)i > i$ oder, was dasselbe ist, weil $m-(n-2)i > 2i$; da nun im zweiten Theile

der dritten Gleichung die unteren Stellenzeiger von der Rechten zur Linken ebenfalls wachsen, während der obere Index unverändert bleibt, so sind auch alle vorhergehenden Glieder der Null gleich; mithin ist $G^3_{m-(n-3)i}=0$.

Da endlich jedes $G$ im ersten Theile einer vorhergehenden Gleichung im letzten Gliede des zweiten Theiles der nächstfolgenden Gleichung erscheint, welches in diesem Theile das Verschwinden aller vorhergehenden $G$ zur Folge hat, so muss das Nullwerden der Grössen

$$G^0_{m-ni},\quad G^1_{m-(n-1)i},\quad G^2_{m-(n-2)i} \ldots G^{n-1}_{m-i},\quad G^n_m$$

um so mehr statt finden, zu einem je späteren Gliede dieser Reihe wir vorschreiten, mithin ist allgemein $G^n_m=0$, wenn $m>ni$, und damit ist der erste Theil unseres Lehrsatzes bewiesen.

4) Beweisen wir nun auch den zweiten Theil, indem wir von der Voraussetzung ausgehen: $m=ni$. Das Gleichungen-System (12) verwandelt sich alsdann in folgendes:

$$(14)\left\{\begin{aligned}
G^1_i &= \binom{i}{i}\cdot\left[G^0_i+\binom{i}{1}G^0_{i-1}+\binom{i}{2}G^0_{i-2}+\ldots G^0_0\right]=\binom{i}{i}\cdot G^0_0,\\
G^2_{2i} &= \binom{2i}{i}\cdot\left[G^1_{2i}+\binom{i}{1}G^1_{2i-1}+\binom{i}{2}G^1_{2i-2}+\ldots G^1_i\right]=\binom{2i}{i}\cdot G^1_i,\\
G^3_{3i} &= \binom{3i}{i}\cdot\left[G^2_{3i}+\binom{i}{1}G^2_{3i-1}+\binom{i}{2}G^2_{3i-2}+\ldots G^2_{2i}\right]=\binom{3i}{i}\cdot G^2_{2i},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
G^n_{ni} &= \binom{ni}{i}\cdot\left[G^{n-1}_{ni}+\binom{i}{1}G^{n-1}_{ni-1}+\binom{i}{2}G^{n-1}_{ni-2}+\ldots G^{n-1}_{ni-i}\right]\\
&= \binom{ni}{i}\cdot G^{n-1}_{ni-i}.
\end{aligned}\right.$$

Da nach dem Bewiesenen alle jene $G$ der Null gleich sind, deren untere Stellenzeiger grösser sind als die $i$fachen oberen, so reduciren sich die in (14) vorkommenden polynomischen Factoren auf ihr letztes Glied. Werden sämmtliche Gleichungen mit einander multiplicirt, das Product abgekürzt, so erhält man mit Rücksicht auf die Gleichung (5) $G^0_0=1$:

$$G_{ni}^{n} = \binom{i}{i}\cdot\binom{2i}{i}\cdot\binom{3i}{i}\cdots\binom{ni}{i}$$

$$= \frac{[i\ldots.2.1]}{1.2\ldots.i}\cdot\frac{[2i\ldots.(i+1)]}{1.2\ldots.i}\cdot\frac{[3i\ldots.(2i+1)]}{1.2\ldots.i}\cdots\frac{[ni\ldots.(ni-i+1)]}{1.2\ldots.i}$$

$$= \frac{[1.2\ldots.i]\,[(i+1)\ldots.2i]\,[(2i+1)\ldots.3i]\ldots.ni}{(1.2\ldots.i)^{n}},$$

mithin

$$G_{ni}^{n} = \frac{(in)!}{(i!)^{n}}. \tag{15}$$

Zusatz. Wird in unserer combinatorischen Reihe (3) $i=1$ gesetzt, so verwandelt sie sich in folgenden, aus der „Rechnung mit endlichen Differenzen“ bekannten Ausdruck:

$$m^{n}-\binom{m}{1}(m-1)^{n}+\binom{m}{2}(m-2)^{n}-\binom{m}{3}(m-3)^{n}+\ldots, \tag{16}$$

und unser Beweis sagt, dass er Null ist, so lange $m>n$; ist aber $m=n$, so ist der Werth desselben $=n!=1.2.3\ldots.n$, was mit dem Resultate anderartiger Untersuchungen im Einklange steht.

# XV.

## Zwei Gedichte von Tycho de Brahe und Kepler.

Uebersetzt von

Herrn *Ernst Strehlke*,

Kandidaten der Philologie, und mitgetheilt von dessen Vater, Herrn Director Dr. F. Strehlke zu Danzig.

Ewiger Dank gebührt den grossen Männern, welche durch die Entdeckung der wahren Gesetze der Weltharmonie Licht und Wahrheit verbreiteten und die Nebel des Wahns zerstreuten. Nach langer Gefangenschaft die freien Schwingen entfaltend, er-

hob sich der entfesselte Geist zu den Inseln im Aethermeere, den fernen Gestirnen, indem er sich überirdische Werkzeuge aus irdischem Stoff erschuf. Eine begeisterte Stimmung weht in den Werken eines Copernicus, eines Kepler; der gewöhnliche prosaische Ausdruck genügt nicht mehr der Erhebung der Seele und der Schwung der Gedanken ergiesst sich in dichterischen Worten.

„Durch keine andere Anordnung", sagt Copernicus (Humboldt's Kosmos Thl. 2. S. 347.), „habe ich eine so bewundernswürdige Symmetrie des Universums, eine so harmonische Verbindung der Bahnen finden können, als da ich die Weltleuchte, die Sonne, die ganze Familie der kreisenden Gestirne lenkend, wie in die Mitte des schönen Naturtempels auf einen königlichen Thron gesetzt."

Gleichwohl konnte Tycho sich nicht von der Wahrheit dieser Weltharmonie überzeugen. Festhaltend an der Vorstellung von der ruhenden Erde, welche das Zeugniss der Sinne unmittelbar zu bestätigen scheint, fürchtet er in seinem Zuruf an die Bearbeiter der Sternkunde, das neue System des Copernicus zerbreche die festen Säulen des Atlas, bewege die Erde aus ihrer festen Lage und stürze die Menschen und alle Geschöpfe und die ganze Welt in das alte Chaos zurück. Darum ruft er den Astronomen zu, sie sollten die Gewölbe des Himmels mit neuen Säulen stützen, bevor der ganze Bau zusammenbreche. Eine herrliche Krone ist hier zu gewinnen, stralend von Gold und edlem Gestein und dauernder Ruhm für alle Jahrhunderte und Gemeinschaft mit göttlichen Geistern. „Aber ich selber", sagt er am Schlusse des Gedichts, wohl erkennend den Werth genauer Beobachtungen, „will wie bisher den Erdgebornen die weiten Säle des Himmels aufschliessen! Winke nur Du mir Erhörung zu, Du weiser Gründer des Weltalls, und hilf dem, der Deine staunenswürdigen Wunder verkündet!"

Durch die Genauigkeit der Tychoni'schen Beobachtungen gelangte Kepler zur Entdeckung der berühmten Gesetze, auf denen die neuere Astronomie beruht. Der dankbare, bescheidene Kepler, wie keiner „verfolgt von des Geschicks ergrimmtem Wetter", errang die von Tycho verheissene Krone und verdiente mehr als mancher Heroe des Alterthums, dass ihm die dankbare Nachwelt ein stralendes Denkmal unter Sternen gesetzt hätte. In einem Gedichte, das Kepler seinem Werke über die Bewegungen des Planeten Mars nach Tycho de Brahe's Beobachtungen vorgesetzt hat, vergleicht er sein Loos mit dem Tycho's, die, obwohl äusserlich sehr verschieden, doch darin überein-

kämen, dass den Einen der Reichthum, den Andern die Armut von der Beobachtung des Himmels abhalten konnte, hätte nic Urania beiden die göttliche Liebe zum Himmel eingehaucht. „V dieser Liebe entflammt", ruft er aus, „wage ich den Himmel m neuen Säulen zu stützen! O lebtest Du doch und hätte die Par Dir nicht die wohlverdienten Triumphe Deiner arbeitsvollen Näch entrissen! Du hättest Dich selbst überzeugt, dass nicht ande Säulen als die meinen des Himmels Dom zu stützen vermögen.

Ich lasse jetzt die beiden Gedichte in metrischer Uebersetzu folgen:

## Tycho's Zuruf an die Bearbeiter der Sternkund aus der restitutio stellarum fixarum.

Und schon bahnt sich der Weg; Jahrtausenden war er verschlosse
Der durch dauernde Müh' nachtwachender Sorgen eröffnet,
Auf zu den unerstiegenen Höhen des Himmels hinaufführt
Und zu den hellen Gestirnen, der seeligen Götter Behausung.
5. Siehe! der stehenden Ort, wie der wandelnden Sterne Bewegu
Löst vor des Schauenden Blick sich vom Nebel der alten Verwirrun
Und mit erhabener Pracht aufstralen die Wunder Jehova's.
Darum eilet herbei, ihr Jünglinge, denen von Eifer
Glühet der Geist, die der Genius liebt und Urania selber
10. Bei der Geburt mit göttlicher Liebe zum Himmel beschenkt ha
Jünglinge, die kein irdisches Gut vom Streben nach oben
Abzuwenden vermag, soll euch leichtsinnige Rede
Und unkundigen Volks absprechendes Urtel bethören?
Lasst sie dem Maulwurf gleich hinleben in finsteren Hölen!
15. Lasst sie, wie es ihr Wunsch, hinleben in ewiger Blindheit!
Und mit begeistertem Herzen, den Blick zum Himmel gerichtet
Eilet herbei! Raubt nicht dem vom Himmel entstammenden Geis
Dies sein väterlich Land, bringt her ausdauernde Kräfte
Zu der Begeist'rung gesellt und helft dem ermüdeten König!
20. Nicht mehr trüg' Alphonsus die Last, die er einst von den Schulte
In zu kühnem Entschluss dem benachbarten Atlas gehoben;
Auch Copernicus heischt, der gewaltige, mächtigen Beistan
Der misskennend die Wucht, herkulische Lasten zu tragen
Nicht sich gescheut, nun erliegt der die Kraft aufzehrenden Arbe
25. Denn sonst wanket der Himmel; den Säulen des hohen Alcide
Atlas festem Gebirg droht sonst ein gewaltiger Einsturz,
Und von dem sicheren Orte gelöst umschwinget die Erde,
Nun der Rohheit ein Sitz, wie solch Nichtkennen des Himmels
Nur sie erzeugt; unsicheren Zugs durch nächtliches Dunkel

30. Reissend der Menschen Geschlechter dahin und die Thiere des Feldes,
Senkt sie die berstende Welt in das uranfängliche Chaos.
Wehret dem Frevel und bauet entgegen dem dräuenden Unheil!
Jugendlich kraftvoll steigt mit mir zum erhab'nen Olymp auf,
Dass in gemeinsamer Müh' wir die drohenden Risse verschliessen
35. Und mit neuem Gestein ausbauen des Himmels Gewölbe,
Ehe das Weltall ganz einstürzt und in Trümmer dahinsinkt! —
Nahet sich wer voll Lust zu gewinnen die prächtige Krone,
Glänzend von Edelgestein, aus stralendem Golde bereitet,
Die kein feindlich Geschick von des Tragenden Schläfen herabreisst,
40. Willig, den eigenen Geist zu gesellen den himmlischen Geistern?
Wie? Tritt keiner hervor, der also Hohes im Sinn trägt,
Aus der unendlichen Zahl der die Erde bewohnenden Menschen?
Will denn keiner der Welt allmächtigen Schöpfer erkunden,
Und die erhabene Schrift, die er schrieb an den Himmel, entziffern?
45. Wie? So schweiget ihr Alle, da euch so Hohes geboten?
Zweifelnd murmelt ihr nur: legt Hand an die harrende Arbeit,
Dass sich endlich einmal aufrolle des Himmels Geheimniss!
Wen der Gewinn, wen Ruhmes Begier, Unwissenheit, Prachtlust,
Von so hehrem Beginn ablenkend zum Staube verdammen,
50. Hemme die Anderen nicht, sie des schönsten Gewinnes beraubend!
Ich auch, wenn mich mit gnädigem Blick anschauen die Götter,
Und noch ferner dem Geist Ausdauer und Stärke verleihen,
Hemnisse wie wohl sonst zu bezwingen in mächtigem Andrang,
Eifere fort, dem Geschlechte der Menschen die Pforten des Himmels
55. Aufzuthun und hinweg den bedeckenden Schleier zu heben.
Siehe nur gnädig herab, o Schöpfer der himmlischen Wunder;
Gieb mir Kräfte dazu, Dein herrliches Werk zu verkünden!

## Kepler antwortet:

Herrlicher Mann, aus hohem Geschlecht, von erlauchtem Geblüte,
Dem, wenn Einem ein Geist auch göttlichen Adels verliehen,
Kraft auch zu herrlichen Thaten und hehrem Gesange geschenkt ist,
Und durch der Rede Gewalt auch Sterbende neu zu beleben,
5. Warum fachtest Du an in meinem Gemüth, das sie wünschte,
Aber sie scheute zugleich, der Begier auflodernde Flamme?
Hat wohl And're das Lied, das Du sangst, zu gewaltiger Arbeit
Fördernden Helfern gewollt, als mich, wohl bessere Meister;
Hat die Natur wohl schwächeren Geist mir als Willen verliehen,
10. Kraft, noch schwächer als ihn, doch senkte die neunte der Schwestern

Mir in den Busen hinein zum Himmel die göttliche Liebe.
Grausame Liebe, wohin nicht treibst du die Herzen der Menschen!
Mir ward kräftig der Arm, mir wuchsen des Geistes Vermögen;
Aber es fehlt zu gleichem Erfolg die belebende Hoffnung,
15. Weil, abwechselnder Gunst, von Dir mich Juno geschieden
Zu abweichendem Glück: Dir hat freigebig der Tugend
Pfad sie gebahnt, mir aber erschwert: gleich blieb sich die Absicht,
Ab uns vom Himmel zu zieh'n und gedenk Prometheischen Diebstals
In sorgfältiger Hut das geheiligte Feuer zu wahren.
20. Reichthum schenkte sie Dir; sie gedachte die himmlischen Lichter
Dir durch den blendenden Glanz goldstralender Schätze zu leiden,
Und Dein Auge zur Lust an des Purpurs Pomp zu gewöhnen,
(Dem beifälliges Murmeln ertönt von der staunenden Menge)
Endlich der Schätze Verlust für den Gipfel zu halten des Unglücks.
25. Sei mir, Sieger, gegrüsst, Du bezwangest den Willen der Göttin,
Zwangest die irdische Lust; was Dir als würdigen Zielpunkt
Wiess die Vernunft, dem bist Du gefolgt ausharrenden Geistes;
Was Dir der Zufall gab, Reichthümer und Schätze verachtend.
Wahrlich! ein seltenes Lob! Lass' ab Theilnehmer zu rufen,
30. Und auf rinnendes Wasser zu schreiben! Es lieben einander
Tugend und Reichthum nicht; denn über die trennenden Fernen
Klingt nur selten ein Laut vom Himmel hernieder zur Erde.
Mir hat Juno das Lob so schöner Entsagung verweigert;
Hat in ein enges Geheg die gewaltigen Wünsche beschränkend
35. Mir nicht Schätze verlieh'n, um die ich des Himmels Erforschung
Nachzusetzen vermocht', zu verachten die Gnade der Musen.
Und sie hätte gesiegt, ein mächtiges Wagniss gehindert,
Hätte den kühneren Schwungs zum Himmel begierigen Geist mir
Nieder zu Boden gedrückt, wenn nicht, wo die Wege zum Leben
40. Auf sich dem Jünglinge thun, Sehnsucht nach des Himmels Geheimniss,
Hätte zu Dir mich geführt, zum rettenden Hafen geleitet.
Und ich schauet' im Geist der Planeten gewaltige Bahnen,
Ihren gewundenen Lauf; ich schau'te die klaffenden Leeren,
Fürchtend des Weltengebäu's Einsturz, das der Säulen ermangelt;
45. Da noch schauriges Dunkel die Gründe verbirgt, und die Weisen,
Was Copernicus lehrt, mit trägem Gemüthe verschlafen,
Und ich entschloss mich kühn mich zu weih'n so hohem Beginnen,
Aus mit neuem Gesteine zu bauen des Himmels Gewölbe.
Aber Pythagoras lieh mir den Stoff, fünf Körpergestalten;
50. Richtscheid gab mir Euclid, das belebende Denken Minerva,
Und Urania hat, am Erfolge sich freuend, des Beifalls
Sturm mir erregt und selber erhebt sie die Stimme zur Feier.

Deinen beharrenden Sinn, Dich hab' ich, Brahe, bewundert.
Hast Du auch es verschmäh't, von der Meinungen Banden zu lassen,
55. Die Dich zu falschem Vermuthen von Himmel und Erde verlockten;
Dennoch sucht' ich den Ruhm, mich unter die Deinen zu zählen;
Was Dein nächtlicher Fleiss Dich lehrte, der langen Betrachtung
Unvollendetes Werk zum stralenden Ziele zu bringen.
Hätte die Parze Dich nicht der gewaltigen Mühen gerechten
60. Lohnes beraubt, Dir den Kranz des verdienten Triumphes entrissen,
Wahrlich! es hätte sich noch vor Deinem durch helfende Künste
Schärferen Blick nicht anders bezeugt das Gebäude des Weltalls,
Als vor des Lesenden Sinn mein Forschergedanken es aufbaut.
Doch nun nahmen sie mir, die unsterblichen Schwestern, den Meister;
65. Nahmen den lieblichsten Reiz von der Freude gelingender Forschung;
Denn ihm sollte sie Lust, ihm festliche Tage bereiten.
Eins nur nahmen sie nicht. Mit des schaffenden Geistes Vermögen
Ruf' ich Dich her und belebe das Bild der verehrten Erinn'rung.
Vor mir stehst Du ein Hoherpriester im Sternengewande,
70. Wo sich der Altar erhebt am Gewölbe des himmlischen Domes,
Gott dem Erbauer geweiht, um den sich in reissendem Umschwung
An sechs Bahnen geknüpft, sechs leuchtende Feuer bewegen;
Auf ihm selber die Glut ursprünglichen ewigen Lichtes.
Bittend nah' ich mich Dir; nimm an der gelehrten Bemühung
75. Zeugniss, Dankes Beweis, mein Buch aus der opfernden Rechten;
Weihrauch, schöner als noch jemals zum Himmel gestiegen;
Aber die Bäume gepflanzt hast Du, mir gabst Du die Ernte.
Heil Dir, seeliger Geist! Wie Du mit erhobener Stimme
Fleh' ich zum Herrscher der Welt: o Schöpfer der himmlischen Wunder,
80. Gieb mir Kräfte dazu, Dein herrliches Werk zu verkünden.

---

## XVI.

## Miscellen.

**Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professors Steczkowski an der Universität zu Cracau an den Herausgeber.**

Die Veranlassung zu meinem heutigen Schreiben gab mir die Güte des Herrn Rectors Dr. Nagel, mit welcher Er mir die ge-

naue und richtige Auskunft über das von mir im 24. Bande Ihres Archivs erwähnte geometrische Werk gegeben hat. Nachdem ich mit den von Herrn Nagel im dritten Hefte des 25. Bandes des Archivs der Mathematik und Physik angegebenen Merkmalen das in meinen Händen befindliche Werk verglichen hatte, fand ich wirklich unter der von Herrn Nagel erwähnten Figur die Abbildung des Schlosses Strezen und die Volksscene, wie sie Herr Nagel aus seinem Exemplare beschrieben hat; dass aber die Ausgabe, welche ich in Händen habe, eine spätere ist, beweisen folgende Umstände:

1. Mein Exemplar ist nicht gedruckt, aber auf Kupferplatten cursive gestochen.

2. Ein anderer Verleger, nämlich Johann Georg Hertel.

3. Mein Exemplar fängt gleich auf dem umgekehrten Titelblatte an mit „Von denen Auslegungen Etlicher in der Mess-Kunst gebräuchlichen Wörter", fehlen also anfangs: die Dedication, die Vorrede, von der Geometria in gemein, von dem Nutzen der Mess-Kunst und von dem Ursprung der Mess-Kunst; zu Ende aber fehlt die „Kurzverfasste Beschreibung derer Vestungen und Schlösser etc." und das Register.

Ich ersuche Sie also, dem Herrn Rector Dr. Nagel in Ihrem schätzbaren Archive meinen verbindlichsten Dank für diese Auskunft zu sagen, indem Er dadurch auch der Geschichte der Mathematik einigen Dienst erwiesen hat; denn manche Werke nicht ohne Werth liegen an verschiedenen Orten im Staube begraben, aus welchen man doch Einiges lernen oder wenigstens auf neue Gedanken kommen kann. Uebrigens wenn man bedenkt, dass wahrscheinlich das hier besprochene Werk von Burckhardt in der Zeit seines Erscheinens grosses Aufsehen gemacht haben möchte, wäre es unbillig, selbes jetzt der Vergessenheit zu übergeben.

---

## Druckfehler.

Literarischer Bericht Nr. CI. S. 1. Z. 2. v. u. statt „ihm rühmenden u. s. w." setze man „ihn rühmenden u. s. w."

Theil XXV. S. 123. Z. 3. v. u. statt „plasieurs" setze man „plusieurs."

Thl. XXVI. S. 53. Z. 7. v. u. statt „bekannt" setze man „bekanntlich."

# Literarischer Bericht

## CII.

---

### Arithmetik.

**Programm des kais. kön. Obergymnasiums zu Böhmisch-Leipa am Schlusse des Schuljahres 1855. Inhalt: Ueber Kettenbrüche vom Professor Paul Hackel. Prag. Haase Söhne. 1855. 4.**

Dieses neun Bogen starke Programm enthält eine sehr deutliche Darstellung der ganzen Lehre von den Kettenbrüchen, und genügt seinem in dem Vorworte von dem Herrn Verfasser angegebenen Zwecke: „den gereifteren Gymnasialschülern zu zeigen, welch' hohes Interesse eine Lehre gewähre, die das Urtheil und die mathematische Begabung in so hohem Grade fördert" in vorzüglicher Weise. Nachdem die allgemeinsten Sätze und Aufgaben in §. 1. bis §. 4. eine gründliche Behandlung gefunden haben, beschäftigt sich der Herr Verfasser in §. 5. mit den Eigenschaften der Näherungsbrüche jener Kettenbrüche, deren Theilzähler und Theilnenner positive ganze Zahlen und die Theilzähler durchaus gleich 1 sind. §. 7. behandelt die Transformation der Kettenbrüche, §. 8. die Verwandlung der Kettenbrüche in Reihen; §. 9. die Verwandlung der Reihen in Kettenbrüche, wo selbst auch die Gaussische Reihe vorkommt; §. 10. die sämmtlichen verschiedenen Anwendungen der Kettenbrüche in sehr vollständiger und lehrreicher Weise; §. 11. endlich ist der Geschichte und Literatur der Kettenbrüche gewidmet. Aus dieser Inhaltsangabe werden die Leser sehen, dass in dieser Schrift eine sehr vollständige Behandlung der Theorie der Kettenbrüche

geliefert ist, und der Zustand des mathematischen Unterrichts auf dem Leipaer Gymnasium muss jedenfalls ein sehr guter sein, wenn es möglich ist, dieses Programm dem Unterrichte gereifterer Schüler in der Lehre von den Kettenbrüchen als Leitfaden zu Grunde zu legen. Auf die dem Herrn Verfasser eigenthümliche schematische Methode der Berechnung der Theilnenner bei der Verwandlung der Quadratwurzeln in Kettenbrüche ist noch besonders aufmerksam zu machen. Aus den angehängten Schulnachrichten haben wir endlich mit besonderem Vergnügen ersehen, dass die analytische Geometrie in der Ebene und die Kegelschnitte von dem mathematischen Unterrichte auf den österreichischen Gymnasien nicht ausgeschlossen sind. Wie wichtig eine solche Vorbereitung, namentlich in der Theorie der Kegelschnitte, für den höheren mathematischen Unterricht auf Universitäten ist, wird wohl jeder Universitätslehrer erfahren haben; denn wo soll man bei den Vorträgen über Differential- und Integralrechnung mit Einschluss der gewöhnlichsten Anwendungen auf Geometrie die so nöthigen Beispiele zur Uebung und Erläuterung anders hernehmen, als aus der Lehre von den Kegelschnitten? Und es ist jedenfalls ein grosser Nachtheil für den akademischen Unterricht in den genannten Wissenschaften, wenn die Zuhörer nicht schon eine einigermassen genügende Bekanntschaft mit der Lehre von den Kegelschnitten von der Schule mitbringen.

## Ueber eine Restbetrachtung der Arcussinus-Reihe.

Als ich eben im Begriff bin, das vorliegende Heft des Archivs zu schliessen, wird mir das erste Heft der von den Herren Professoren Schlömilch und Witzschel an der höheren polytechnischen Lehranstalt zu Dresden herausgegebenen „Zeitschrift für Mathematik und Physik“ zugesandt. In diesem Hefte der genannten Zeitschrift findet sich S. 48. ein von Herrn Professor Schlömilch verfasster Aufsatz mit der Ueberschrift: Restbetrachtung der Arcussinus-Reihe. Bei meinen Vorlesungen über die höhere Analysis ist es mir, wie gewiss auch manchem anderen gewissenhaften Lehrer, immer sehr unangenehm gewesen, die Entwickelung der Function $\operatorname{Arcsin} x$ in eine Reihe, weil ich wegen der Weitläufigkeit der Ausdrücke der höheren Differentialquotienten dieser Function eine genügende Betrachtung des bei der Entwickelung dieser Reihe mittelst des Maclaurinschen Satzes hervortretenden Restes nicht zu geben vermochte, in der Differentialrechnung nicht vortragen zu können und in die Integralrechnung verweisen zu müssen, wo dieselbe mittelst des bekannten Satzes:

**Wenn**, indem $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ Functionen von $x$ bezeichnen, für jedes zwischen den Gränzen $a$ und $b$ liegende $x$

$$s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots$$

ist, so ist für jedes zwischen denselben Gränzen liegende $x$

$$\int_a^x s\partial x = \int_a^x u_0\partial x + \int_a^x u_1\partial x + \int_a^x u_2\partial x + \int_a^x u_3\partial x + \ldots \text{*)}$$

allerdings leicht und mit aller Strenge gegeben werden kann. Deshalb, und weil ich selbst schon öfter mich bemühet habe, diesen wichtigen Punkt des mathematischen Unterrichts auf eine genügende Weise zur Erledigung zu bringen, musste natürlich der oben genannte Aufsatz des Herrn Professors Dr. Schlömilch von besonderem Interesse für mich sein; und da ich annehmen durfte, dass dies auch bei vielen Lesern des Archivs der Fall sein werde, überdies auch das Archiv stets die Bestimmung gehabt hat und immer haben wird, Alles aufzubewahren, was irgend zur Förderung des mathematischen Unterrichts wesentlich beizutragen geeignet ist, so beschloss ich sogleich, die von Herrn Professor Dr. Schlömilch gegebene Restbetrachtung der Arcussinus-Reihe den Lesern noch in diesem Hefte mitzutheilen, wenn dieselbe den Ansprüchen der Wissenschaft zu genügen geeignet sein sollte. Aber in dieser letzteren Beziehung bin ich nun freilich leider sehr getäuscht worden; und so ungern sich das Archiv auf ausführliche, sehr in's Einzelne gehende Kritiken, die weniger als bloss kürzere resümirende Angaben des wesentlichen Inhalts der betreffenden Schriften in seiner Bestimmung liegen, einlässt; so scheint es mir doch auf der anderen Seite in diesem Falle, wo es sich um einen sehr wesentlichen Punkt des mathematischen Unterrichts, dessen Verbesserung, wie schon erinnert, eine der Hauptaufgaben des Archivs ist, handelt, die Pflicht dieser Zeitschrift zu sein, alle Lehrer der Mathematik auf das, nach meiner Meinung, Ungenügende der von Herrn Professor Dr. Schlömilch in dem ersten Hefte der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" gegebenen Restbetrachtung der Arcussinus-Reihe aufmerksam zu machen, und so vor hier leicht möglichen Täuschun-

*) M. s. meine Elemente der Differential- und Integralrechnung. Thl. II. S. 8. §. 9. und S. 89. §. 62. und §. 63.

gen zu wahren, was nur im reinsten Interesse für den Fortschritt des mathematischen Unterrichts geschieht.

Im Wesentlichen ganz richtig beweiset Herr Professor Dr. Schlömilch den folgenden arithmetischen Satz:

Für positive $\alpha$ und $\beta$ ist

$$\operatorname{Lim}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)}=0,$$

sobald $\alpha>\beta$ und $n=\infty$ ist.

Da der Satz an sich interessant ist, so theile ich den Beweis hier mit, um zugleich diesem Aufsatze einen andern als bloss kritischen Inhalt zu geben und dadurch für die Leser interessanter zu machen. Aus dem Binomischen Lehrsatze für positive ganze Exponenten oder auch aus der Gleichung

$$\frac{(1+x)^k-1}{x}=\frac{(1+x)^k-1}{(1+x)-1}=1+(1+x)+(1+x)^2+\ldots.+(1+x)^{k-1},$$

wenn man überlegt, dass die Reihe rechts für $x>0$ und $k>1$ offenbar $>k$ ist, folgt auf der Stelle, dass für jedes Null übersteigende $x$ und für eine jede die Einheit übersteigende positive ganze Zahl $k$

$$(1+x)^k>1+kx,$$

also

$$\frac{1}{1+x}<\left(\frac{1}{1+kx}\right)^{\frac{1}{k}}$$

ist. Wenn man dies auf den Ausdruck

$$\frac{\beta+m}{\alpha+m}=\frac{1}{1+\frac{\alpha-\beta}{\beta+m}}$$

anwendet, so erhält man:

$$\frac{\beta+m}{\alpha+m}<\left(\frac{1}{1+k\frac{\alpha-\beta}{\beta+m}}\right)^{\frac{1}{k}}$$

oder

$$\frac{\beta+m}{\alpha+m}<\sqrt[k]{\frac{\beta+m}{\beta+m+k(\alpha-\beta)}}.$$

Nimmt man nun das noch willkührliche positive ganze $k$ so, dass

$$k \overline{\underline{>}} \frac{1}{\alpha-\beta}, \text{ also } k(\alpha-\beta) \overline{\underline{>}} 1$$

ist, so ist

$$\frac{\beta+m}{\alpha+m} < \sqrt[k]{\frac{\beta+m}{\beta+m+1}},$$

und folglich für $m=0, 1, 2, 3, \ldots. n-1$ und durch Multiplication aller entstehenden Ungleichungen:

$$\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\ldots.(\beta+n-1)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots.(\alpha+n-1)} < \sqrt[k]{\frac{\beta}{\beta+n}},$$

woraus unmittelbar der zu beweisende Satz folgt.

Bekanntlich ist nun, wenn man nicht unterlässt, die Quadratwurzel gehörig positiv und negativ zu nehmen:

$$\frac{\partial^{n+1} \operatorname{Arcsin} x}{\partial x^{n+1}} = \frac{\partial^n.(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x^n} = \frac{\partial^n.(1+x)^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x^n},$$

also nach der bekannten Regel für die mehrmalige Differentiation der Producte:

$$\frac{\partial^{n+1} \operatorname{Arcsin} x}{\partial x^{n+1}} = \frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2^n \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{(1-x)^n} \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{1.n_1}{2n-1} \cdot \frac{1-x}{1+x} \\ + \frac{1.3.n_2}{(2n-1)(2n-3)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 \\ - \frac{1.3.5.n_3}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\} *)$$

wo $n_1, n_2, n_3, n_4, \ldots.$ die Binomial-Coefficienten für den Exponenten $n$ bezeichnen.

Aus diesem Ausdrucke, den wir hier mitgetheilt haben, weil er an sich nicht ganz ohne Interesse ist, leitet Herr Professor Schlömilch durch Schlüsse, auf die es uns hier weiter nicht ankommt und die bei der Verfehltheit der ganzen Betrachtung in ihrem wesentlichen Bestandtheile kein Interesse anderer Art haben,

---

*) Ueber einen anderen Ausdruck s. m. Euleri Institutiones calculi differentialis. T. I. Cap. VI. §. 201.

welche die Leser also der Kürze wegen a. a. O. selbst nachsehen mögen, ab, dass, wenn $\varepsilon$ einen nicht weiter angebbaren ächten Bruch bezeichnet, sich setzen lässt:

$$\frac{\partial^{n+1}\operatorname{Arcsin} x}{\partial x^{n+1}}=\frac{1.3.5....(2n-1)}{2^n\sqrt{1-x^2}}\cdot\frac{1}{(1-x)^n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1+x}{x}.$$

Nach dem Maclaurinschen Satze ist nun

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1}x+\frac{f''(0)}{1.2}x^2+....+\frac{f^{(n)}(0)}{1....n}x^n+R_{n+1},$$

wenn wir, den zweiten von Cauchy gegebenen Ausdruck des Restes *) benutzend, indem $\vartheta$ eine die Einheit nicht übersteigende positive Grösse bezeichnet,

$$R_{n+1}=\frac{(1-\vartheta)^n x^{n+1}}{1.2.3....n}f^{(n+1)}(\vartheta x)$$

setzen. Im Falle der Arcussinus-Reihe ist folglich nach dem Obigen

$$R_{n+1}=\tfrac{1}{2}\varepsilon\,\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}\cdot\left\{\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}\right\}^n\cdot\frac{1}{\vartheta}\cdot\sqrt{\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x}},$$

und es kommt nun darauf an, zu untersuchen, ob dieser Rest sich der Null nähert, wenn $n$ in's Unendliche wächst. Herr Professor Schlömilch schliesst dies, unter der Voraussetzung, dass $x$ positiv und nicht grösser als die Einheit ist, mit Hülfe des oben bewiesenen arithmetischen Satzes ohne Weiteres in einer Weise, von der er uns erlauben möge, dieselbe mit einem Worte zu bezeichnen, dessen er sich S. 20., bei Gelegenheit der Beurtheilung einer Schrift des trefflichen, so vielfach verdienten Fechner, gegen Poisson, bedient, allerdings nicht mit der Pietät, mit welcher jeder Mathematiker das Andenken dieses Mannes von so immensem Verdienst bewahrt. Um unsere Leser von der Grundlosigkeit der in den Worten: „bei unendlich wachsendem $n$ wird hier (nach Nr. I. für $\alpha=1$ und $\beta=\frac{1}{2}$)

$$\operatorname{Lim}\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....(2n)}=0;$$

die übrigen Factoren bleiben endliche Grössen, so lange $x$ die Einheit nicht überschreitet, und so ergiebt sich $\operatorname{Lim} R_{n+1}=0$ unter der Bedingung $1\geqq x\geqq 0$, welche sich leicht auf $1\geqq x\geqq -1$ ausdehnen lässt" ausgespro-

*) M. s. meinen Leitfaden für den ersten Unterricht in der höheren Analysis. S. 46. §. 41.

chenen Schlussfolgerung des Herrn Profssors **Schlömilch** zu überzeugen, ist die folgende weitläufigere Auseinandersetzung erforderlich.

In dem obigen Ausdrucke des Restes $R_{n+1}$ kommen die folgenden Factoren vor:

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon,\quad \frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n},\quad \left\{\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}\right\}^n,\quad \frac{1}{\vartheta},\quad \sqrt{\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x}},$$

Jeder dieser Factoren erfordert eine besondere Betrachtung, wenn wir zu völliger Klarheit über das Verhalten des Restes $R_{n+1}$ bei in's Unendliche wachsendem $n$ gelangen wollen. Wir stellen dieselbe im Nachstehenden an.

I. Da $\varepsilon$ ein nicht näher bestimmbarer ächter Bruch ist, so ist $\frac{1}{2}$ der grösste Werth, welchen $\frac{1}{2}\varepsilon$ überhaupt haben kann.

II. Für $\alpha=1$ und $\beta=\frac{1}{2}$ ergiebt sich aus dem oben bewiesenen arithmetischen Satze, dass

$$\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}$$

sich der Null nähert, wenn $n$ in's Unendliche wächst, oder kurz, für $n=\infty$ ist

$$\frac{1.3.5....(2n-1)}{2.4.6....2n}=0.$$

III. Der höchste Werth, welchen der Bruch $\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}$ überhaupt annehmen kann, ist die Einheit. Denn, uns der Kürze wegen einer analytischen Schlussweise bedienend, aus

$$\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}\overset{=}{<}1 \quad\text{oder}\quad \frac{x-\vartheta x}{1-\vartheta x}\overset{=}{<}1$$

folgt unter den gemachten Voraussetzungen:

$$x-\vartheta x\overset{=}{<}1-\vartheta x,$$

also $x\overset{=}{<}1$, was der Voraussetzung entspricht *).

---

*) Dass auch $\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}$ nie grösser als $x$ ist, wonach die folgenden Schlüsse abgeändert werden könnten, erhellet leicht. Ich würde (mit Rücksicht auf die Note auf der folgenden Seite) eigentlich lieber diese Schlussweise angewandt haben, zog es aber doch vor, die im Texte gebrauchte Schlussweise beizubehalten, um mich den von Herrn Prof. S. gebrauchten Worten: „**die übrigen Factoren bleiben endliche Grössen**" möglichst anzuschliessen.

IV. Also kann auch

$$\left\{\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}\right\}^n,$$

wie weit auch $n$ wachsen mag, die Einheit nie übersteigen *).

V. Der höchste Werth, welchen der Bruch

$$\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x}$$

überhaupt annehmen kann, ist die bestimmte von $\vartheta$ und $n$ unabhängige Grösse

$$\frac{1+x}{1-x},$$

wobei wir jedoch $0 \overline{\gtrless} x < 1$ anzunehmen genöthigt sind. Denn aus

$$\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x} \overline{\gtrless} \frac{1+x}{1-x}$$

folgt unter den gemachten Voraussetzungen:

$$1+\vartheta x-x-\vartheta x^2 \overline{\gtrless} 1-\vartheta x+x-\vartheta x^2,$$

also $2\vartheta x \overline{\gtrless} 2x$, und folglich $\vartheta \overline{\gtrless} 1$, was wieder bekanntlich richtig ist.

VI. Der höchste Werth also, welchen

$$\sqrt{\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x}}$$

annehmen kann, ist die von $\vartheta$ und $n$ unabhängige Grösse

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

VII. Also ist der höchste Werth, welchen

$$\tfrac{1}{2}e\left\{\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}\right\}^n\sqrt{\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x}}$$

annehmen kann, die endliche völlig bestimmte Grösse

*) Auch selbst dann, wenn sich unter gewissen Voraussetzungen sollte nachweisen lassen, dass diese Grösse bei wachsendem $n$ in's Unendliche abnehme, würde doch immer unten No. VIII. bestehen.

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

VIII. Wie steht es denn nun aber endlich mit dem Factor $\frac{1}{\vartheta}$ des Restes $R_{n+1}$? Weiss denn Herr Schlömilch von $\vartheta$ mehr als andere Mathematiker? Die strenge Analysis weiss von $\vartheta$ weiter gar nichts, als dass diese Grösse, um in Worten zu reden, eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse ist. Dass diese Grösse sich auch mit $n$ ändern muss oder wenigstens kann, wird wohl Herr Schlömilch nicht in Abrede zu stellen geneigt sein; wenigstens hat bis jetzt noch Niemand die Unabhängigkeit der Grösse $\vartheta$ von $n$ behauptet, viel weniger bewiesen. Ist aber $\vartheta$ von $n$ abhängig und ändert sich mit demselben zugleich, weiss man ferner von $\vartheta$ weiter nichts, als dass es eine positive, die Einheit nicht übersteigende Grösse ist, d. h. dass $\vartheta$ zwischen Null und der Einheit liegt, so bleibt immer die Möglichkeit, dass, wenn $n$ in's Unendliche wächst, $\vartheta$ der Null sehr nahe kommt oder sich der Null nähert; dann wird aber der in dem Reste $R_{n+1}$ vorkommende Factor $\frac{1}{\vartheta}$, wenn $n$ zunimmt, in's Unendliche wachsen, und daraus, dass, wenn $n$ in's Unendliche wächst, der Factor

$$\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}$$

sich der Null nähert; ferner die Grösse

$$\tfrac{1}{2}\varepsilon\left\{\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}\right\}^n\sqrt{\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x}}$$

die endliche Grösse

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

nicht übersteigt*); endlich $\frac{1}{\vartheta}$ möglicherweise in's Unendliche wachsen kann: folgt rücksichtlich des Verhaltens des Restes

$$R_{n+1}=\tfrac{1}{2}\varepsilon\frac{1.3.5\ldots.(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}.\left\{\frac{(1-\vartheta)x}{1-\vartheta x}\right\}^n.\frac{1}{\vartheta}.\sqrt{\frac{1+\vartheta x}{1-\vartheta x}}$$

bei in's Unendliche wachsendem $n$ gar nichts.

Hiernach ist also die in der „Zeitschrift für Mathematik und Physik" a. a. O. von Herrn Professor Dr. Schlömilch

---

*) Selbst dann, wenn obige Grösse bei wachsendem $n$ sich der Null näherte, würde nichts rücksichtlich des Verhaltens des Restes folgen.

gegebene Restbetrachtung der Arcussinus-Reihe null und nichtig. — „Sed sapienti sat!" wozu wir jedoch noch fügen wollen: „errare humanum est." G.

Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. In systematischer Folge bearbeitet für Gymnasien, höhere Bürgerschulen und Gewerbeschulen. Von Dr. E. Heis, Professor der Mathematik und Astronomie an der Königl. Akademie zu Münster. Siebente vermehrte und verbesserte Auflage. Köln. Du Mont-Schauberg. 1856.

Von dieser mit Recht beliebten und weit verbreiteten Aufgaben-Sammlung ist so eben die siebente Auflage erschienen. Möge das in vielen Beziehungen ausgezeichnete Buch noch lange fortfahren, zur Hebung und Belebung des mathematischen Unterrichts beizutragen! Eine weitere Empfehlung eines Buchs, das so viel Anerkennung gefunden hat, würde unpassend sein.

Anleitung zur Waldwerthberechnung, so wie zur Berechnung des Holzzuwachses und nachhaltigen Ertrages der Wälder. Von Karl Breymann, Professor an der k. k. Forstlehranstalt in Mariabrunn. Wien. Braumüller. 1855. 8.

Dieses ausgezeichnete Buch betrifft freilich einen technischen Gegenstand; aber sein ganzer Inhalt ist so durch und durch mathematisch, dass es in diesen Literarischen Berichten besprochen und den Lesern überhaupt zur Beachtung empfohlen zu werden verdient. Der erste Abschnitt mit der Ueberschrift: „Die Waldwerthberechnung" enthält eine überaus gründliche und vollständige analytische Darstellung der zusammengesetzten Zins- und Rentenrechnung mit einer grossen Anzahl sehr lehrreicher Beispiele und Anwendungen auf die Waldwerthberechnung. Der zweite Abschnitt mit der Ueberschrift: „Erforschung der Gesetze des Holzzuwachses" ist gleichfalls einer der lehrreichsten des Buchs, da er ganz das Interpoliren oder Einschalten betrifft, und eine sehr lehrreiche, vollständig durchgeführte Anwendung dieser wichtigen mathematischen Methode auf die Bestimmung der Gesetze des Holzzuwachses liefert. Die Interpolationsformeln, welche der Herr Verfasser in Anwendung bringt, entwickelt er in ganz selbstständiger Weise, und gelangt zuletzt zu der eleganten Formel von Lagrange, deren praktische Anwendung er gleichfalls erläutert. Dass der Herr Verfasser bei diesem Gegenstande sich bloss der eigentlichen Interpolations-

oder Einschaltungsmethoden, und nicht der Methode der kleinsten Quadrate bedient hat, finden wir vollständig gerechtfertigt, und sehen es als einen Beweis seiner Umsicht und genauen Kenntniss des Wesens dieser Methoden an. Die Methode der kleinsten Quadrate wird jetzt so häufig auf alle möglichen Dinge angewendet, dass man sich oft sehr wundern muss, wie wenig Diejenigen, welche dergleichen Anwendungen mit Zugrundelegung oft sehr roher und ihrer Natur nach höchst ungenauer Beobachtungen und Versuche machen, die Grundbedingungen zu kennen scheinen, welche bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate erfüllt sein müssen, wenn dieselbe zu Werth habenden Resultaten führen soll. Wir wiederholen also, dass wir es ganz billigen, dass der Herr Verfasser sich nur der eigentlichen Interpolationsmethoden bedient hat, und hätten nur gewünscht, dass derselbe auch der schönen Methode von Cauchy, die im Archiv. Thl. II. Nr. II. S. 41. in einem besonderen Aufsatze entwickelt worden ist, seine Aufmerksamkeit geschenkt hätte, da wir überhaupt wünschen, dass von dieser trefflichen Methode einmal eine grössere praktische Anwendung gemacht werden möchte, was bis jetzt noch nicht geschehen zu sein scheint. Der dritte Abschnitt mit der Ueberschrift: „Anwendung der Gesetze des Holzzuwachses zur Bestimmung des nachhaltigen Ertrages der Wälder“ enthält weniger mathematische Entwickelungen wie die beiden ersten, ist aber in praktischer Beziehung gleichfalls sehr lehrreich. Der Anhang enthält: „Tafeln für den Werth der Einheit nach den am häufigsten in Anwendung kommenden Abstufungen des Zinsfusses.“ Wir empfehlen dieses, wie gesagt, namentlich auch in mathematischer Beziehung lehrreiche Buch, welches zugleich einen höchst vortheilhaften Begriff von dem wissenschaftlichen Geiste der k. k. Forstlehranstalt zu Mariabrunn zu erwecken geeignet ist, nochmals der Beachtung unserer Leser, namentlich auch der Beachtung der Lehrer an allen, mehr eine praktische Richtung verfolgenden Lehranstalten: Realschulen, höheren Bürger- und Gewerbeschulen u. s. w. recht sehr.

---

## Mechanik.

Bekanntlich hat Poinsot's Théorie de la rotation (übersetzt von Herrn Professor Schellbach *)) eine gewisse Berühmt-

*) Diese Uebersetzung ist mir leider nicht zu Gesicht gekommen; ich kenne sie nur aus Stegmann's geometrischen Untersuch. über Drehung. Marburg 1853. S. 36.

heit erlangt. Vielleicht ist es daher manchem Leser des Archivs aufgefallen, dass das Archiv bisher über diese Theorie und manche derselben sich anschliessende Schriften geschwiegen hat. Der Herausgeber bekennt aber offen, dass er, ohne zu einem hier so nothwendigen tieferen Eingehen, was schon das grosse Ansehen des Urhebers dieser Theorie beanspruchen musste, wenn Berechtigung zum Aussprechen irgend eines bestimmten Urtheils gegeben sein sollte, Zeit gewinnen zu können, gewisse Zweifel an der vollkommenen inneren Richtigkeit dieser Theorie der Rotation gehegt hat. Desto interessanter musste es für ihn sein, dass diese Theorie jetzt einen sehr bestimmten Angriff in den trefflichen, von Herrn Terquem herausgegebenen Nouvelles Annales de Mathématiques. Tome XV. Février. 1856. p. 63. erfährt. Derselbe geht, wenigstens mittelbar, von Herrn Saint-Guilhem, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, aus, und bei der Wichtigkeit des Gegenstandes hält es der Herausgeber für seine Pflicht, den Lesern des Archivs mitzutheilen, was Herr Saint-Guilhelm und der verehrte Herr Herausgeber der Nouvelles Annales über die berühmte Théorie de la rotation sagen, so weit es hier der beschränkte Raum gestattet. Mögen die Leser hieraus von Neuem ersehen, wie grosse Vorsicht bei allen solchen Dingen in Anwendung zu bringen ist, bevor man sie namentlich in den Unterricht und die Lehrbücher aufnimmt!

Der betreffende Aufsatz ist überschrieben:

> Nouvelle solution synthétique du problème de la rotation des corps; par M. P. Saint-Guilhem, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées;

und beginnt auf folgende Weise:

„Le problème dont il s'agit, et qui a pour objet la détermination du mouvement d'un corps de figure invariable autour d'un point fixe, est considéré par les géomètres comme un des plus importants et des plus difficiles de la mécanique rationelle. Toutes les solutions de cette question, jusqu'à celle de M. Poinsot, avaient été déduites de l'analyse par des calculs plus ou moins compliqués, plus ou moins élégants:

Dans un Mémoire lu à l'Institut en 1834, l'illustre auteur de la Théorie des couples a exposé une solution synthétique, remarquable par les vues élevées et les considérations ingénieuses qu'elle renferme. Cette solution, présentée sous une forme très-simple et dépouillée de l'appareil des calculs, est entrée sans

objection dans le domaine de la science où elle a tenu jusqu'a présent une haute place.

Aujourd' hui un de nos savants confrères à l'Académie de Toulouse, **M. Gascheau,** conteste, avec toute l'autorité que donnent de grandes lumières et un esprit rigoureux, la solidité d'un des principes fondamentaux sur lesquelles elle repose; **il n'attribue qu'à une compensation d'erreurs l'exactitude des résultats auxquels elle conduit.**

Nous partageons, après un examen réfléchi, l'opinion de notre savant confrère; l'assertion qu'il a émise, à laquelle nous avons d'abord refusé de croire, est, pour nous, **maintenant parfaitement justifiée:** une application très simple, placée à la fin de ce Mémoire, met en évidence l'erreur du principe auquel nous faisons allusion."

In einer Note fügt Herr Saint-Guilhem hinzu: „L'erreur est de supposer que la force centripète d'un point matériel qui fait partie d'un corps doué d'un mouvement de rotation est proportionelle à la distance de ce point à l'axe instantané; elle est réellement proportionelle à la distance de ce point au centre de courbure du petit arc qu'il décrit dans un instant."

Herr Saint-Guilhem weiset hierauf die Falschheit der Theorie Poinsot's noch besonders durch eine Aufgabe nach, wegen welcher wir aber der Beschränktheit des Raumes wegen die Leser auf die Nouvelles Annales selbst verweisen müssen, indem wir nur den Schluss der gegebenen Auflösung mittheilen:

„Au moyen de ces valeurs, la formule (4) devient

$$\varrho=\sqrt{\frac{(1+\sin^2\varphi)^3}{5+3\sin^2\varphi}}. \tag{5}$$

Pour que le rayon de courbure de la trajectoire au point $m$ soit égal, comme le suppose M. Poinsot, à la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe instantané correspondant, il faut que l'on ait, quel que soit $\varphi$,

$$\frac{(1+\sin^2\varphi)^2}{5+3\sin^2\varphi}=\tfrac{1}{2}.$$

Or cette équation n'est satisfaite que par les valeurs $\varphi=90^0.(1\pm2n)$, $n$ étant un nombre entier quelconque; ces valeurs correspondent au point unique où la trajectoire vient couper le plan des $xy$.

**Ainsi la solution du problème de la rotation des corps par M. Poinsot est inacceptable.“**

„Note du Rédacteur. L'erreur signalée provient de ce que les vitesses dépendent d'infiniment petits du premier ordre, tels sont les contacts des tangentes; tandis que les forces accéleratrices, et, par conséquent, les forces centripètes dépendent d'infiniment petits du second ordre, tels sont les contacts des cercles de courbures.“

Der Unterzeichnete enthält sich für jetzt jedes bestimmteren Urtheils, hofft aber späterhin auf diesen jedenfalls sehr merkwürdigen Gegenstand zurückzukommen. Nur so viel will sich derselbe für jetzt erlauben, zu sagen, dass **ihm**, insofern die Herren Saint-Guilhem, Gascheau und Terquem, wie kaum bezweifelt werden kann, Recht haben, der wahre Grund und die wahre Veranlassung des Fehlers lediglich darin zu liegen scheinen, dass man sich einer ganz strengen Gränzenbetrachtung entschlagen und mit vageren Anschauungen des Unendlich-Kleinen u. s. w. begnügt und zufrieden gegeben hat. Wie nothwendig strenge Betrachtungen der ersteren Art also auch in der Mechanik sind, wird sich hieraus von Neuem deutlich ergeben. G.

---

## Nautik.

Ueber Orkane. Für Seeleute. Von Capt. V. v. Graefe. Hamburg. Meissner. 1856.

Dieses kleine, mit praktischem Sinne abgefasste, recht lehrreiche Schriftchen empfehlen wir Seeleuten und allen den jungen Leuten, die sich dem Seewesen widmen wollen, auch Physikern, recht sehr zur Beachtung. Es ist sehr verständig abgefasst, giebt überall leichte praktische Regeln zur Vermeidung der Orkane auf der See, und macht den Eindruck, dass der Herr Verfasser vielfach aus eigener Erfahrung geschöpft und seine Regeln selbst auf der See erprobt hat. Nach der gleich am Anfange gegebenen Erklärung sind Orkane, Cyclonen, Typhoons Stürme, die nicht wie die gewöhnlichen Winde in ein und derselben Richtung wehen, sondern sich kreisförmig mit grosser Geschwindigkeit um einen Mittelpunkt (Centrum, Vortex des Orkans) bewegen. Ausser dieser kreisförmigen Bewegung besitzt aber der Orkan noch eine zweite fortschreitende Bewegung des Vortex und mit ihm des ganzen Orkanfeldes in einer gewissen Richtung. Während das

Rad sich um seine Axe dreht, folgt diese der Richtung des Wagens; eben so dreht sich der Orkan um den Vortex, während das ganze Sturmfeld sich in einer gewissen Richtung fortbewegt. Die kreisförmige Bewegung der Orkane hat die ausserordentliche Eigenschaft, dass in beiden Hemisphären zu Seiten des Aequators der Wind sich stets und ohne Ausnahme gegen die Sonne dreht. Die Richtung der fortschreitenden Bewegung der Orkane ist nicht so genau bestimmbar wie die kreisförmige. Im Allgemeinen geht dieselbe auf beiden Hemisphären von Osten nach Westen, indem sie sich allmählig nach dem Pole ihrer Hemisphäre zu krümmt. Diese Richtung geht also im Süden der Linie von Osten nach Westen und Süden, im Norden von Osten nach Westen und Norden. Die Orkane kommen in den Herbstmonaten oder in den Jahreszeiten beider Hemisphären vor, wo die Sonne sich von ihrem Sommersolstitium nach der Linie zu bewegt, im Süden also vom December bis April, im Norden vom Juni bis October, doch dehnen sich die Zeiten ihrer Erscheinung über diese Termine aus. Die Orkane sind eine Erscheinung der heissen Zone und mag die Gegend ihres Vorkommens als zwischen 30° N. und 30° S. liegend betrachtet werden. Die Breiten nahe der Linie von 8° S. bis 8° N. sind davon ausgenommen. Mitunter finden sie sich auf höheren Breiten, doch ist ihr Auftreten dort nur vereinzelt und als Ausnahme zu betrachten. — Dies sind die Hauptgesetze, auf welche der Herr Verfasser seine praktischen Regeln zur Vermeidung der Orkane auf der See gründet. Das lehrreiche Schriftchen ist dem verdienten Director der Hamburger Sternwarte, Herrn C. Rümker, gewidmet.

---

## Vermischte Schriften.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu Wien. (S. Liter. Ber. Nr. XCIX. S. 15.)

Jahrgang 1855. Band XVI. 2. Heft. S. 294. Fritsch: Resultate der im Jahre 1854 in Wien und an einigen anderen Orten des österreichischen Kaiserstaates angestellten Vegetationsbeobachtungen. — S. 415. Pick: Ueber die Sicherheit barometrischer Höhenmessungen. (Besonders angezeigt Literar. Ber. Nr. C. S. 4.) — S. 447. Schönbichler: Die Complanation des schiefen Kegels durch Vermittelung der Integrale $\int d\varphi \sin^{2n}\varphi(1-k\sin^2\varphi)^m$ und $\int d\varphi \cos^{2n}\varphi(1-k\cos^2\varphi)^m$ und Auflösung dieser Integrale in trigonometrische, durch einen stäten logarithmischen Calcul berechenbare Factoren (eine lesenswerthe Abhandlung aus dem Ge-

biete der reinen Mathematik). — S. 540. Oeltzen: Eigene Bewegungen von Fixsternen, abgeleitet aus der Vergleichung der Histoire céleste mit den Argelander'schen nördlichen Zonen.

Jahrgang 1855. Band XVII. Heft 1. S. 3. K. v. Littrow: Nachträgliche Mittheilung bezüglich der in den Sitzungen vom 18. Jänner und 22. März d. J. vorgelegten Arbeiten des Herrn Dr. C. Hornstein über die Bahn der Calliope. — S. 4. Grunert: Ueber eine geometrische Aufgabe, mit besonderer Rücksicht auf die Bestimmung der Stillstandspunkte oder Stationen der um die Sonne sich bewegenden Weltkörper. — S. 35. Grunert: Ueber eine astronomische Aufgabe. — S. 171. Zantedeschi: Nuovo Elettroscopio per le due ellettricità d'influenza. (Con 1 tavola.)

Jahrgang 1855. Band XVII. Heft 2. S. 187. Haidinger: Vereinfachte Methode der graphischen Winkelmessungen kleiner Krystalle. — S. 191. Schiefferdecker: Bericht über die vom Verein für wissenschaftliche Heilkunde in Königsberg in Preussen angestellten Beobachtungen über den Ozongehalt der atmosphärischen Luft und sein Verhältniss zu den herrschenden Krankheiten. — S. 238. Waltenhofen: Entwurf einer Construction der Luftpumpe. — S. 257. Zantedeschi: Ricerche sulla contemporaneità del passaggio delle opposte correnti elettriche in un filo metallico. Memoria II. — S. 282. Marcus: Der Antigraph (Gegen- oder Verkehrtzeichner.)

Jahrgang 1855. Band XVII. Heft 3. S. 361. Zenger: Ueber die Messung der Strom-Intensität mit der Tangenten-Boussole. — S. 411. v. Littrow: Ueber den Zusammenhang der Flecken und Protuberanzen der Sonne (besonders angezeigt Literar. Ber. Nr. C. S. 15.). — S. 601. Hornstein: Opposition der Calliope im Jahre 1856.

# XVII.

## Ueber die Reste der Potenzen der Zahlen.

Von

Herrn Doctor *P. Buttel*,

Privatdocenten an der Universität zu Kiel.

---

### I. Quadratische Reste.

Bekanntlich lässt sich eine Congruenz von der Form $x^2 \equiv a$, mod $p$, wenn $p$ eine ungerade Primzahl bedeutet, auflösen oder nicht, jenachdem die Congruenz stattfindet:

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv +1, \text{ mod } p \text{ oder } a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \text{ mod } p.$$

Im ersten Fall heisst $a$ ein quadratischer Rest von $p$, im andern $a$ ein quadratischer Nichtrest von $p$; nach Gauss $aRp$ oder $aNp$ und nach Legendre $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ oder $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$. Es ist hierdurch ein sicheres und leicht anzuwendendes Criterium für die Möglichkeit einer Congruenz zweiten Grades gegeben, welches sich aber auch weiter dahin benutzen lässt, die Zahlen, welche quadratische Reste oder Nichtreste von $p$ sind, sogleich aus der Tafel der primitiven Wurzel zu entnehmen. Eine solche findet sich bis zu der Primzahl 101 in Crelle's Journal Bd. IX. Abhandl. 2. pag. 27. etc.

Da unter den Zahlen 1, 2, 3 .... $p-1$ immer $\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste und eben so viel quadratische Nichtreste sind, so kann man die ersteren dadurch erhalten, dass man von den Quadraten der Zahlen 1, 2, 3 .... $\frac{p-1}{2}$ die Reste nach dem mod $p$

nimmt. Alle diese Reste sind Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3 \ldots p-1$, also kleiner als $p$; die unter diesen Resten nicht vorkommenden Zahlen sind alsdann quadratische Nichtreste von $p$. So einfach dies Verfahren ist, so wird doch noch immer einige Rechnung erfordert, die man sich ersparen kann, sobald man die oben erwähnte Tafel der primitiven Wurzeln benutzt. Da aber die Zahlen, welche von einer gegebenen Primzahl quadratische Reste oder Nichtreste sind, bei Untersuchungen in der Zahlentheorie häufig vorkommen, so hielt ich es nicht für überflüssig, auf den Zusammenhang zwischen den quadratischen Resten und den primitiven Wurzeln hinzuweisen, zumal derselbe, wenn ich nicht irre, nirgends so besonders hervorgehoben ist.

Nach dem Fermat'schen Satze ist immer $a^{p-1} \equiv 1$, mod $p$, unter der Voraussetzung, dass $p$ eine ungerade Primzahl ist; zugleich ist $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1$, mod $p$. Wenn nun unter den Zahlen $1, 2, 3 \ldots p-1$ $h$ eine solche Zahl ist, dass sie erst zu der $(p-1)$sten Potenz erhoben congruent Eins ist, so heisst sie, wie bekannt ist, eine primitive Wurzel der Congruenz; dahingegen können alle Zahlen, die zu Exponenten, welche kleiner wie $p-1$ und zugleich Theiler von $p-1$ sind, gehören, secundäre Wurzeln genannt werden, so dass, wenn $g$ eine solche Wurzel ist, welche zum Exponenten $q$ gehört, immer erst $g^q \equiv 1$, mod $p$ wird, worin $q$ ein Theiler von $p-1$ sein muss. Ferner ist die Anzahl dieser primitiven oder secundären Wurzeln immer gleich der Anzahl der zu $p-1$ oder $q$ relativ primen Zahlen, kleiner wie $p-1$ oder $q$, oder, um es kurz zu bezeichnen, gleich $S'''(p-1)$ oder $S'''q$. Diese Anzahl $S'''(p-1)$ bestimmt sich daraus, dass, sobald $p-1 = a^\alpha . b^\beta . c^\gamma \ldots$ ist, immer die Relation

$$S'''(p-1) = a^{\alpha-1}.(a-1).b^{\beta-1}.(b-1).c^{\gamma-1}.(c-1) \ldots$$

stattfindet. Will man also die quadratischen Reste von $p$ aus jener Tafel bestimmen, so werden diejenigen Wurzeln, welche zu dem Exponenten $\frac{p-1}{2}$ gehören, R$p$ sein, da für diese immer die Bedingung $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$, mod $p$ erfüllt ist.

Wenn $\frac{p-1}{2}$ eine Primzahl ist, so erhält man sämmtliche R$p$, ausgenommen die Eins, während die übrigen Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3 \ldots p-1$ N$p$ sind, so dass man die quadratischen Reste und Nichtreste sogleich aus der Tafel entnehmen kann, wie für die Moduli 5, 7, 11, 23, 47, 59, 83.

Ist hingegen $\frac{p-1}{2}$ eine zusammengesetzte Zahl, so erhält man nicht unmittelbar sämmtliche R$p$ durch die Zahlen, welche zu $\frac{p-1}{2}$ gehören; es können jedoch nur diejenigen Wurzeln noch hinzukommen, welche zu solchen Exponenten, die Theiler von $\frac{p-1}{2}$ sind, gehören. Wenn $a^q \equiv 1$, mod $p$, d. h. wenn $a$ zu $q$ gehört und die Bedingung $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$, mod $p$ zu erfüllen ist, so muss, wenn $\frac{p-1}{2} > q$, $\frac{p-1}{2}$ ein Vielfaches von $q$ sein. Man kann daher die Wurzeln, welche zu Exponenten als Theilern von $\frac{p-1}{2}$ gehören, wieder aus der Tafel entnehmen. Hierdurch erhält man sämmtliche R$p$, deren Anzahl $\frac{p-1}{2}$ beträgt, aus der Zahlenreihe $1, 2, 3 \ldots. p-1$, aus der Tafel. Die übrigen Zahlen aus dieser Reihe sind dann N$p$. Wenn z. B. $p=29$ ist und $\frac{p-1}{2}=14$, so ergiebt die Tafel für $a^{14} \equiv 1$, mod 29 die Zahlen 4.5.6.9.13.22. Ausserdem kommen noch als quadratische Reste von 29 die Zahlen hinzu, welche zu den Exponenten 1, 2 und 7 gehören, d. h. bezüglich 1; 28; 7.16.20.23.24.25, so dass im Ganzen

R. 29 sind: 1.4.5.6.7.9.13.16.20.22.23.24.25.28,

und

N. 29: 2.3.8.10.11.12.14.15.17.18.19.21.26.27.

Sowohl für quadratische Reste als Nichtreste ist die Anzahl 14.

Dass man auf diese Weise sämmtliche quadratische Reste und Nichtreste von $p$ erhalten muss, ergiebt sich aus dem schon angeführten Satze, dass die Anzahl der Zahlen, die zu einem Exponenten $q$ gehören, immer $S'''q$ beträgt. Wenn man aber als quadratische Reste immer die Zahlen erhält, welche zu einem Theiler von $\frac{p-1}{2}$, 1 und $\frac{p-1}{2}$ selbst mitgerechnet, gehören, so gilt für diese die Relation, dass die Summe der Anzahl derjenigen Zahlen, welche zu den Theilern einer Zahl, incl. Eins und der Zahl selbst, relative Primzahlen und kleiner als diese sind, immer gleich der Zahl ist. Wenn also die Theiler von $\frac{p-1}{2}$ sind $1, t_1, t_2, \ldots. \frac{p-1}{2}$, so ist:

$$S^m 1 + S^m t_1 + S^m t_2 + \dots + S^m \frac{p-1}{2} = \frac{p-1}{2}.$$

Zugleich ist $\frac{p-1}{2}$ die Anzahl der Wurzeln der Congruenz $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1$, mod $p$, kleiner als $p$.

Es folgen hierbei noch die quadratischen Reste und Nichtreste der Primzahlen von 3 bis 101:

mod 3. R. 1.<br>N. 2.

mod 5. R. 1. 4.<br>N. 2. 3.

mod 7. R. 1. 2. 4.<br>N. 3. 5. 6.

mod 11. R. 1. 3. 4. 5. 9.<br>N. 2. 6. 7. 8. 10.

mod 13. R. 1. 3. 4. 9. 10. 12.<br>N. 2. 5. 6. 7. 8. 11.

mod 17. R. 1. 2. 4. 8. 9. 13. 15. 16.<br>N. 3. 5. 6. 7. 10. 11. 12. 14.

mod 19. R. 1. 4. 5. 6. 7. 9. 11. 16. 17.<br>N. 2. 3. 8. 10. 12. 13. 14. 15. 18.

mod 23. R. 1. 2. 3. 4. 6. 8. 9. 12. 13. 16. 18.<br>N. 5. 7. 10. 11. 14. 15. 17. 19. 20. 21. 22.

mod 29. R. 1. 4. 5. 6. 7. 9. 13. 16. 20. 22. 23. 24. 25. 28.<br>N. 2. 3. 8. 10. 11. 12. 14. 15. 17. 18. 19. 21. 26. 27.

mod 31. R. 1. 2. 4. 5. 7. 8. 9. 10. 14. 16. 18. 19. 20. 25. 28.<br>N. 3. 6. 11. 12. 13. 15. 17. 21. 22. 23. 24. 26. 27. 29. 30.

mod 37. R. 1. 3. 4. 7. 9. 10. 11. 12. 16. 21. 25. 26. 27. 28. 30. 33. 34. 36.<br>N. 2. 5. 6. 8. 13. 14. 15. 17. 18. 19. 20. 22. 23. 24. 29. 31. 32. 35.

mod 41. R. 1. 2. 4. 5. 8. 9. 10. 16. 18. 20. 21. 23. 25. 31. 32. 33. 36. 37. 39. 40.<br>N. 3. 6. 7. 11. 12. 13. 14. 15. 17. 19. 22. 24. 26. 27. 28. 29. 30. 34. 35. 38.

mod 43. R. 1. 4. 6. 9. 10. 11. 13. 14. 15. 16. 17. 21. 23. 24. 25. 31. 35. 36. 38. 40. 41.<br>N. 2. 3. 5. 7. 8. 12. 18. 19. 20. 22. 26. 27. 28. 29. 30. 32. 33. 34. 37. 39. 42.

mod 47. R. 1. 2. 3. 4. 6. 7. 8. 9. 12. 14. 16. 17. 18. 21. 24. 25. 27. 28. 32. 34. 36. 37. 42.<br>N. 5. 10. 11. 13. 15. 19. 20. 22. 23. 26. 29. 30. 31. 33. 35. 38. 39. 40. 41. 43. 44. 45. 46.

mod 53. R. 1. 4. 6. 7. 9. 10. 11. 13. 15. 16. 17. 24. 25. 28. 29. 36. 37. 38. 40. 42. 43. 44. 46. 47. 49. 52.<br>N. 2. 3. 5. 8. 12. 14. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 26. 27. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 39. 41. 45. 48. 50. 51.

**mod 59. R.** 1.3.4. 5. 7. 9.12.15.16.17.19.20.21.22.25.26.27.28.29.35.
36.41.45.46.48.49.51.53.57.
**N.** 2.6.8.10.11.13.14.18.23.24.30.31.32.33.34.37.38.39.40.42.
43.44.47.50.52.54.55.56.58.

**mod 61. R.** 1.3.4.5. 9.12.13.14.15.16.19.20.22.25.27.34.36.39.41.42.
45.46.47.48.49.52.56.57.58.60.
**N.** 2.6.7.8.10.11.17.18.21.23.24.26.28.29.30.31.32.33.35.37.
38.40.43.44.50.51.53.54.55.59.

**mod 67. R.** 1.4.6.9.10.14.15.16.17.19.21.22.23.24.25.26.29.33.35.36.
37.39.40.47.49.54.55.56.59.60.62.
64.65.
**N.** 2.3.5.7. 8.11.12.13.18.20.27.28.30.31.32.34.38.41.42.43.
44.45.46.48.50.51.52.53.57.58.61.
63.66.

**mod 71. R.** 1. 2. 3. 4. 5. 6. 8. 9.10.12.15.16.18.19.20.24.25.27.29.
30.32.36.37.38.40.43.45.48.49.50.
54.57.58.60.64.
**N.** 7.11.13.14.17.21.22.23.26.28.31.33.34.35.39.41.42.44.46.
47.51.52.53.55.56.59.61.62.63.65.
66.67.68.69.70.

**mod 73. R.** 1.2. 3. 4. 6. 8. 9.12.16.18.19.23.24.25.27.32.35.36.37.
38.41.46.48.49.50.54.55.57.61.64.
65.67.69.70.71.72.
**N.** 5.7.10.11.13.14.15.17.20.21.22.26.28.29.30.31.33.34.39.
40.42.43.44.45.47.51.52.53.56.58.
59.60.62.63.66.68.

**mod 79. R.** 1.2.4. 5. 8. 9.10.11.13.16.18.19.20.21.22.23.25.26.31.32.
36.38.40.42.44.45.46.49.50.51.52.
55.62.64.65.67.72.73.76.
**N.** 3.6.7.12.14.15.17.24.27.28.29.30.33.34.35.37.39.41.43.47.
48.53.54.56.57.58.59.60.61.63.66.
68.69.70.71.74.75.77.78.

**mod 83. R.** 1.3.4.7. 9.10.11.12.16.17.21.23.25.26.27.28.29.30.31.33.
36.37.38.40.41.44.48.49.51.59.61.
63.64.65.68.69.70.75.77.78.81.

N. 2. 5. 6. 8. 13. 14. 15. 18. 19. 20. 22. 24. 32. 34. 35. 39. 42. 43. 45.
46. 47. 50. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 60.
62. 66. 67. 71. 72. 73. 74. 76. 79. 80. 82.

mod 89. R. 1. 2. 4. 5. 8. 9. 10. 11. 16. 17. 18. 20. 21. 22. 25. 32. 34. 36. 39.
40. 42. 44. 45. 47. 49. 50. 53. 55. 57. 64.
67. 68. 69. 71. 72. 73. 78. 79. 80. 81. 84.
85. 87. 88.

N. 3. 6. 7. 12. 13. 14. 15. 19. 23. 24. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 33. 35. 37.
38. 41. 43. 46. 48. 51. 52. 54. 56. 58. 59.
60. 61. 62. 63. 65. 66. 70. 74. 75. 76. 77.
82. 83. 86.

mod 97. R. 1. 2. 3. 4. 6. 8. 9. 11. 12. 16. 18. 22. 24. 25. 27. 31. 32. 33. 35.
36. 43. 44. 47. 48. 49. 50. 53. 54. 61. 62.
64. 65. 66. 70. 72. 73. 75. 79. 81. 85. 86.
88. 89. 91. 93. 94. 95. 96.

N. 5. 7. 10. 13. 14. 15. 17. 19. 20. 21. 23. 26. 28. 29. 30. 34. 37. 38. 39.
40. 41. 42. 45. 46. 51. 52. 55. 56. 57. 58.
59. 60. 63. 67. 68. 69. 71. 74. 76. 77. 78.
80. 82. 83. 84. 87. 90. 92.

mod 101. R. 1. 4. 5. 6. 9. 13. 14. 16. 17. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 30. 31. 33.
36. 37. 43. 45. 47. 49. 52. 54. 56. 58. 64.
65. 68. 70. 71. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82.
84. 85. 87. 88. 92. 95. 96. 97. 100.

N. 2. 3. 7. 8. 10. 11. 12. 15. 18. 26. 27. 28. 29. 32. 34. 35. 38. 39. 40.
41. 42. 44. 46. 48. 50. 51. 53. 55. 57. 59.
60. 61. 62. 63. 66. 67. 69. 72. 73. 74. 75.
83. 86. 89. 90. 91. 93. 94. 98. 99.

## II. Reste der Potenzen.

Die Reste der Potenzen nach einer Primzahl als Modulus bieten, wie überhaupt die Congruenzen, interessante Beziehungen dar, von denen im Folgenden mehrere aufgestellt und nachgewiesen werden sollen.

Man bilde die successiven Potenzen einer Zahl $x$; dieselbe lässt sich kleiner als der Modulus $p$ annehmen, da immer, so

bald eine Zahl $h$ um $x$ grösser als irgend ein Vielfaches von $p$ ist, der Rest einer beliebigen Potenz von $h$, deren Exponent eine der Zahlen 1, 2, 3 .... $p-1$ ist, so dass

$$h^r = (np + x)^r, \quad r < p,$$

sich auf den Rest der Potenz $x^r$, mod $p$ reducirt. Wenn daher $x$ eine solche Zahl ist, welche zu dem Exponenten $q$, der alsdann ein Theiler von $p-1$ sein muss, gehört, oder auch eine primitive Wurzel der Congruenz ist, d. h. zum Exponenten $p-1$ selbst gehört, so sind die Reste der Zahlen

$$x^0, \quad x^1, \quad x^2, \quad x^3 \ldots.$$

sämmtlich verschieden, und zwar bilden dieselben eine Periode, welche sich entweder im ersten Fall von $x^q$ ab oder im zweiten Fall von $x^{p-1}$ ab wiederholt. Diese Reste der Potenzen einer Zahl nach dem Modulus $p$ lassen sich auf verschiedene Weise berechnen. Wendet man das Verfahren, welches sich in der unbestimmten Analytik von Scheffler §. 142. angegeben findet, an, so sucht man sich die Reste der Vielfachen von $x$, $1x$, $2x$, $3x \ldots (p-1)x$, mod $p$, und ordnet dieselben so, dass der Factor von $x$ gleich dem Reste aus der vorhergehenden Congruenz ist, bis sich zuletzt eine der Congruenzen wiederholt. Substituirt man für die Factoren des $x$ aus der vorhergehenden Congruenz den Werth, welcher diesem Factor congruent ist, so wird man nach einander die Potenzen von $x$ mit ihren Resten erhalten. Einfacher möchte aber noch das folgende Verfahren sein. Wenn $x^n$ irgend eine Potenz von $x$ bedeutet mit einem Exponenten $n$ kleiner als $p$, und es ist

$$x^n \equiv r_n, \text{ mod } p,$$

so folgt durch Multiplication mit $x$:

$$x^{n+1} \equiv r_n x, \text{ mod } p.$$

$r_n x$ kann grösser oder kleiner als $p$, aber da $p$ eine Primzahl ist, nie gleich $p$ werden. In dem Falle $r_n x > p$ wird man $r_n x \equiv r_{n+1}$, mod $p$ haben, also auch

$$x^{n+1} \equiv r_{n+1}, \text{ mod } p;$$

in dem Falle $r_n x < p$ ist $r_n x$ unmittelbar der Rest der Potenz $x^{n+1}$. Die Regel ist also diese: Um die Reste der Potenzen einer Zahl $x$ nach dem Modulus $p$ zu erhalten, multiplicire man die vorhergehende Congruenz mit der Zahl selbst, und bestimme, wenn das zweite Glied grösser als $p$ ist, den Rest desselben nach $p$; z. B.:

$$5^1 \equiv 5, \text{ mod } 13,$$

$$5^2 \equiv 5.5 \equiv 12, \text{ mod } 13,$$

$$5^3 \equiv 5.12 \equiv 8, \text{ mod } 13,$$

$$5^4 \equiv 5.8 \equiv 1, \text{ mod } 13.$$

In diesem Fall gehört 5 zum Exponenten 4; es werden also die Reste der Potenzen von 5 von der vierten Potenz ab wiederkehren. Bekannt ist auch die Eigenschaft der Periode dieser Reste, dass, wenn man dieselben addirt, sobald man den Rest der 0ten Potenz der Zahl mit hinzunimmt, die Summe dieser Reste innerhalb der Periode immer durch $p$ ohne Rest theilbar ist.

Ausserdem bieten die Reste der Zahlen von 1 bis $p-1$, welche zu gleich hohen Potenzen erhoben werden, folgende Beziehungen dar. Wenn man die Reste der Potenzen der Zahlen $1, 2, 3 \ldots p-1$ bis zur $(p-1)$sten Potenz bildet, so lassen sich dieselben in der Weise anordnen, dass man die Reste der gleich hohen Potenzen neben einander schreibt; dann erhält man sowohl in vertikaler, als in horizontaler Richtung immer $p-1$ Zahlen, wie dies aus dem folgenden Beispiele hervorgeht, in welchem 7 der Modulus ist.

| | Exp. | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wurz. | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 2 | 1 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| | 3 | 1 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 |
| | 4 | 1 | 2 | 4 | 4 | 2 | 1 |
| | 5 | 1 | 4 | 5 | 2 | 3 | 6 |
| | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

Es sind hierin nur die Reste angegeben, indem die Wurzeln der Congruenzen aus der ersten Horizontalreihe zu entnehmen sind und die Exponenten die erste Vertikalreihe bilden.

Um zu der Eigenthümlichkeit der angegebenen Reihe von Resten zu gelangen, ist zu unterscheiden, ob die Wurzeln einen geraden oder ungeraden Exponenten haben.

1. Wenn der Exponent gerade ist. Da die Anzahl der Zahlen $1, 2, 3 \ldots p-1$ wegen der ungeraden Primzahl $p$ immer eine gerade ist, so lassen sich dieselben in zwei Klassen bringen; die erste enthält die Zahlen $1, 2, 3 \ldots \frac{p-1}{2}$; die zweite die Zahlen $\frac{p+1}{2}, \frac{p+3}{2} \ldots p-1$. Wenn $a$ irgend eine Zahl aus der ersten Klasse ist, so findet sich in der zweiten eine Zahl $(p-a)$, welche von der Mitte eben so weit nach rechts entfernt ist, wie $a$ nach

links. Die Potenz $a^{2n}$ wird irgend einen Rest $r$ nach $p$ lassen, so dass $a^{2n} \equiv r$, mod $p$.

Da aber $(p-a) \equiv -a$, mod $p$, also $(p-a)^{2n} \equiv (-a)^{2n} \equiv +a^{2n}$ ist, so folgt:

$$(p-a)^{2n} \equiv r, \text{ mod } p,$$

d. h. je zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3 \ldots . p-1$, welche von der Mitte gleichweit entfernt stehen, lassen zu geraden Potenzen erhoben immer gleiche Reste.

Es werden daher die Reste dieser geraden Potenzen von der Mitte ab sich in umgekehrter Ordnung wiederholen oder sie liegen auf beiden Seiten der Mitte symmetrisch.

2. Wenn der Exponent ungerade ist. Wenn $a^{2n+1} \equiv r$, mod $p$, so ist:

$$(p-a)^{2n+1} \equiv (-a)^{2n+1} \equiv -1 \,.\, a^{2n+1}, \text{ mod } p,$$

also

$$(p-a)^{2n+1} \equiv -r_1 \equiv (p-r_1), \text{ mod } p,$$

d. h. je zwei Zahlen aus der Reihe $1, 2, 3 \ldots . p-1$, welche von der Mitte gleichweit entfernt stehen, lassen zu ungeraden Potenzen erhoben zwei Reste, deren Summe immer gleich dem Modulus $p$ ist.

Beide Resultate lassen sich auch mittelst des binomischen Lehrsatzes leicht ableiten. Die Summe der Zahlen, welche von der Mitte gleichweit entfernt stehen, beträgt immer $p$, nämlich $a+(p-a)=p$. Wenn man $(p-a)^{2n}$ entwickelt, so ist die Anzahl der Glieder des Binoms $2n+1$, also das letzte Glied $a^{2n}$ positiv. Da in allen übrigen Gliedern der Factor $p$ erscheint, so folgt unmittelbar $(p-a)^{2n} \equiv a^{2n}$, mod $p$, d. h. $a^{2n}$ und $(p-a)^{2n}$ lassen gleiche Reste. Erhebt man $p-a$ zur $(2n+1)$sten Potenz und entwickelt dieses Binom, so ist, da die Anzahl der Glieder $2n+2$, also gerade ist, das letzte Glied $a^{2n+1}$ negativ, und da die übrigen Glieder den Factor $p$ enthalten, so folgt:

$$(p-a)^{2n+1} \equiv -a^{2n+1}, \text{ mod } p.$$

Wenn daher $a^{2n+1} \equiv r$, mod $p$, so ist

$$-a^{2n+1} \equiv -r, \equiv (p-r_1), \text{ mod } p,$$

also

$$(p-a)^{2n+1} \equiv (p-r_1), \text{ mod } p,$$

und $r_1 + (p-r_1)$ beträgt $p$.

Ebenso ist die Summe der ungeraden Potenzen zweier solcher Zahlen $a$ und $p-a$ immer gleich einer Zahl, welche durch $p$ theilbar ist, oder

$$\frac{a^{2n+1}+(p-a)^{2n+1}}{p}=E.$$

In der folgenden Tafel der Reste der Potenzen sind nur die Reste selbst angegeben, während die Exponenten aus der ersten Vertikalreihe, die Basis aber aus der ersten Horizontalreihe zu nehmen ist. Auch sind die Reste der Potenzen von Eins weggelassen, daher sie bei der Vergleichung als erste Vertikalreihe nach der Reihe der Exponenten in Gedanken hinzuzufügen sind.

| mod 3 | Exp. | R. |
|---|---|---|
| Wurz. | 1 | 2 |
| | 2 | 1 |

| mod 5 | Exp. | Reste | | |
|---|---|---|---|---|
| Wurz. | 1 | 2 | 3 | 4 |
| | 2 | 4 | 4 | 1 |
| | 3 | 3 | 2 | 4 |
| | 4 | 1 | 1 | 1 |

| mod 7 | Exp. | Reste | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Wurz. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | 2 | 4 | 2 | 2 | 4 | 1 |
| | 3 | 1 | 6 | 1 | 6 | 6 |
| | 4 | 2 | 4 | 4 | 2 | 1 |
| | 5 | 4 | 5 | 2 | 3 | 6 |
| | 6 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| mod 11 | Exp. | Reste | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wurz. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| | 2 | 4 | 9 | 5 | 3 | 3 | 5 | 9 | 4 | 1 |
| | 3 | 8 | 5 | 9 | 4 | 7 | 2 | 6 | 3 | 10 |
| | 4 | 5 | 4 | 3 | 9 | 9 | 3 | 4 | 5 | 1 |
| | 5 | 10 | 1 | 1 | 1 | 10 | 10 | 10 | 1 | 10 |
| | 6 | 9 | 3 | 4 | 5 | 5 | 4 | 3 | 9 | 1 |
| | 7 | 7 | 9 | 5 | 3 | 8 | 6 | 2 | 4 | 10 |
| | 8 | 3 | 5 | 9 | 4 | 4 | 9 | 5 | 3 | 1 |
| | 9 | 6 | 4 | 3 | 9 | 2 | 8 | 7 | 5 | 10 |
| | 10 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| mod 13 | Exp. | Reste | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wurz. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| | 2 | 4 | 9 | 3 | 12 | 10 | 10 | 12 | 3 | 9 | 4 | 1 |
| | 3 | 8 | 1 | 12 | 8 | 8 | 5 | 5 | 1 | 12 | 5 | 12 |
| | 4 | 3 | 3 | 9 | 1 | 9 | 9 | 1 | 9 | 3 | 3 | 1 |
| | 5 | 6 | 9 | 10 | 5 | 2 | 11 | 8 | 3 | 4 | 7 | 12 |
| | 6 | 12 | 1 | 1 | 12 | 12 | 12 | 12 | 1 | 1 | 12 | 1 |
| | 7 | 11 | 3 | 4 | 8 | 7 | 6 | 5 | 9 | 10 | 2 | 12 |
| | 8 | 9 | 9 | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | 3 | 9 | 9 | 1 |
| | 9 | 5 | 1 | 12 | 5 | 5 | 8 | 8 | 1 | 12 | 8 | 12 |
| | 10 | 10 | 3 | 9 | 12 | 4 | 4 | 12 | 9 | 3 | 10 | 1 |
| | 11 | 7 | 9 | 10 | 8 | 11 | 2 | 5 | 3 | 4 | 6 | 12 |
| | 12 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| mod 17 | Exp. | Reste | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wurz. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| | 2 | 4 | 9 | 16 | 8 | 2 | 15 | 13 | 13 | 15 | 2 | 8 | 16 | 9 | 4 | 1 |
| | 3 | 8 | 10 | 13 | 6 | 12 | 3 | 2 | 15 | 14 | 5 | 11 | 4 | 7 | 9 | 16 |
| | 4 | 16 | 13 | 1 | 13 | 4 | 4 | 16 | 16 | 4 | 4 | 13 | 1 | 13 | 16 | 1 |
| | 5 | 15 | 5 | 4 | 14 | 7 | 11 | 9 | 8 | 6 | 10 | 3 | 13 | 12 | 2 | 16 |
| | 6 | 13 | 15 | 16 | 2 | 8 | 9 | 4 | 4 | 9 | 8 | 2 | 16 | 15 | 13 | 1 |
| | 7 | 9 | 11 | 13 | 10 | 14 | 12 | 15 | 2 | 5 | 3 | 7 | 4 | 6 | 8 | 16 |
| | 8 | 1 | 16 | 1 | 16 | 16 | 16 | 1 | 1 | 16 | 16 | 16 | 1 | 16 | 1 | 1 |
| | 9 | 2 | 14 | 4 | 12 | 11 | 10 | 8 | 9 | 7 | 6 | 5 | 13 | 3 | 15 | 16 |
| | 10 | 4 | 8 | 16 | 9 | 15 | 2 | 13 | 13 | 2 | 15 | 9 | 16 | 8 | 4 | 1 |
| | 11 | 8 | 7 | 13 | 11 | 5 | 14 | 2 | 15 | 3 | 12 | 6 | 4 | 10 | 9 | 16 |
| | 12 | 16 | 4 | 1 | 4 | 13 | 13 | 16 | 16 | 13 | 13 | 4 | 1 | 4 | 16 | 1 |
| | 13 | 15 | 12 | 4 | 3 | 10 | 6 | 9 | 8 | 11 | 7 | 14 | 13 | 5 | 2 | 16 |
| | 14 | 13 | 2 | 16 | 15 | 9 | 8 | 4 | 4 | 8 | 9 | 15 | 16 | 2 | 13 | 1 |
| | 15 | 9 | 6 | 13 | 7 | 3 | 5 | 15 | 2 | 12 | 14 | 10 | 4 | 11 | 8 | 16 |
| | 16 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| mod 19 | Exp. | Reste | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wurz. | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| | 2 | 4 | 9 | 16 | 6 | 17 | 11 | 7 | 5 | 5 | 7 | 11 | 17 | 6 | 16 | 9 | 4 | 1 |
| | 3 | 8 | 8 | 7 | 11 | 7 | 1 | 18 | 7 | 12 | 1 | 18 | 12 | 8 | 12 | 11 | 11 | 18 |
| | 4 | 16 | 5 | 9 | 17 | 4 | 7 | 11 | 6 | 6 | 11 | 7 | 4 | 17 | 9 | 5 | 16 | 1 |
| | 5 | 13 | 15 | 17 | 9 | 5 | 11 | 12 | 16 | 3 | 7 | 8 | 14 | 10 | 2 | 4 | 6 | 18 |
| | 6 | 7 | 7 | 11 | 7 | 11 | 1 | 1 | 11 | 11 | 1 | 1 | 11 | 7 | 11 | 7 | 7 | 1 |
| | 7 | 14 | 2 | 6 | 16 | 9 | 7 | 8 | 4 | 15 | 11 | 12 | 10 | 3 | 13 | 7 | 5 | 18 |
| | 8 | 9 | 6 | 5 | 4 | 16 | 11 | 7 | 17 | 17 | 7 | 11 | 16 | 4 | 5 | 6 | 9 | 1 |
| | 9 | 18 | 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 18 | 1 | 18 | 1 | 18 | 18 | 18 | 18 | 1 | 1 | 18 |
| | 10 | 17 | 16 | 4 | 5 | 6 | 7 | 11 | 9 | 9 | 11 | 7 | 6 | 5 | 4 | 16 | 17 | 1 |
| | 11 | 15 | 10 | 16 | 6 | 17 | 11 | 12 | 5 | 14 | 7 | 8 | 2 | 13 | 3 | 9 | 4 | 18 |
| | 12 | 11 | 11 | 7 | 11 | 7 | 1 | 1 | 7 | 7 | 1 | 1 | 7 | 11 | 7 | 11 | 11 | 1 |
| | 13 | 3 | 14 | 9 | 17 | 4 | 7 | 8 | 6 | 13 | 11 | 12 | 15 | 2 | 10 | 5 | 16 | 18 |
| | 14 | 6 | 4 | 17 | 9 | 5 | 11 | 7 | 16 | 16 | 7 | 11 | 5 | 9 | 17 | 4 | 6 | 1 |
| | 15 | 12 | 12 | 11 | 7 | 11 | 1 | 18 | 11 | 8 | 1 | 18 | 8 | 12 | 8 | 7 | 7 | 18 |
| | 16 | 5 | 17 | 6 | 16 | 9 | 7 | 11 | 4 | 4 | 11 | 7 | 9 | 16 | 6 | 17 | 5 | 1 |
| | 17 | 10 | 13 | 5 | 4 | 16 | 11 | 12 | 17 | 2 | 7 | 8 | 3 | 15 | 14 | 6 | 9 | 18 |
| | 18 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| mod 23 Exp. | Reste | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Wurz. 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 2 | 4 | 9 | 16 | 2 | 13 | 3 | 18 | 12 | 8 | 6 | 6 | 8 | 12 | 18 | 3 | 13 | 2 | 16 | 9 | 4 | 1 |
| 3 | 8 | 4 | 18 | 10 | 9 | 21 | 6 | 16 | 11 | 20 | 3 | 12 | 7 | 17 | 2 | 14 | 13 | 5 | 19 | 15 | 22 |
| 4 | 16 | 12 | 3 | 4 | 8 | 9 | 2 | 6 | 18 | 13 | 13 | 18 | 6 | 2 | 9 | 8 | 4 | 3 | 12 | 16 | 1 |
| 5 | 9 | 13 | 12 | 20 | 2 | 17 | 16 | 8 | 19 | 5 | 18 | 4 | 15 | 7 | 6 | 21 | 3 | 11 | 10 | 14 | 22 |
| 6 | 18 | 16 | 2 | 8 | 12 | 4 | 13 | 3 | 6 | 9 | 9 | 6 | 3 | 13 | 4 | 12 | 8 | 2 | 16 | 18 | 1 |
| 7 | 13 | 2 | 8 | 17 | 3 | 5 | 12 | 4 | 14 | 7 | 16 | 9 | 19 | 11 | 18 | 20 | 6 | 15 | 21 | 10 | 22 |
| 8 | 3 | 6 | 9 | 16 | 18 | 12 | 4 | 13 | 2 | 8 | 8 | 2 | 13 | 4 | 12 | 18 | 16 | 9 | 6 | 3 | 1 |
| 9 | 6 | 18 | 13 | 11 | 16 | 15 | 9 | 2 | 20 | 19 | 4 | 3 | 21 | 14 | 8 | 7 | 12 | 10 | 5 | 17 | 22 |
| 10 | 12 | 8 | 6 | 9 | 4 | 13 | 3 | 18 | 16 | 2 | 2 | 16 | 18 | 3 | 13 | 4 | 9 | 6 | 8 | 12 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 22 | 1 | 22 | 1 | 1 | 22 | 22 | 1 | 1 | 22 | 22 | 1 | 22 | 1 | 22 | 22 | 22 | 22 |
| 12 | 2 | 3 | 4 | 18 | 6 | 16 | 8 | 9 | 13 | 12 | 12 | 13 | 9 | 8 | 16 | 6 | 18 | 4 | 3 | 2 | 1 |
| 13 | 4 | 9 | 16 | 21 | 13 | 20 | 18 | 12 | 15 | 17 | 6 | 8 | 11 | 5 | 3 | 10 | 2 | 7 | 14 | 19 | 22 |
| 14 | 8 | 4 | 18 | 13 | 9 | 2 | 6 | 16 | 12 | 3 | 3 | 12 | 16 | 6 | 2 | 9 | 13 | 18 | 4 | 8 | 1 |
| 15 | 16 | 12 | 3 | 19 | 8 | 14 | 2 | 6 | 5 | 10 | 13 | 18 | 17 | 21 | 9 | 15 | 4 | 20 | 11 | 7 | 22 |
| 16 | 9 | 13 | 12 | 13 | 2 | 6 | 16 | 8 | 4 | 18 | 18 | 4 | 8 | 16 | 6 | 2 | 3 | 12 | 13 | 9 | 1 |
| 17 | 18 | 16 | 2 | 15 | 12 | 19 | 13 | 3 | 17 | 14 | 9 | 6 | 20 | 10 | 4 | 11 | 8 | 21 | 7 | 5 | 22 |
| 18 | 13 | 2 | 8 | 6 | 3 | 18 | 12 | 4 | 9 | 16 | 16 | 9 | 4 | 12 | 18 | 3 | 6 | 8 | 2 | 13 | 1 |
| 19 | 3 | 6 | 9 | 7 | 18 | 11 | 4 | 13 | 21 | 15 | 8 | 2 | 10 | 19 | 12 | 5 | 16 | 14 | 17 | 20 | 22 |
| 20 | 6 | 18 | 13 | 12 | 16 | 8 | 9 | 2 | 3 | 4 | 4 | 3 | 2 | 9 | 8 | 16 | 12 | 13 | 18 | 6 | 1 |
| 21 | 12 | 8 | 6 | 14 | 4 | 10 | 3 | 18 | 7 | 21 | 2 | 16 | 5 | 20 | 13 | 19 | 9 | 17 | 15 | 11 | 22 |
| 22 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Anmerkung.** Die Berechnung der Reste der Potenzen einer Zahl auf die oben angegebene Weise lässt sich dadurch erleichtern, dass man, wenn $q$ eine gerade Zahl oder die Wurzel eine primitive ist, die Reste nur bis zu der Potenz $\frac{q}{2}$ oder $\frac{p-1}{2}$ durch Multiplication bestimmt. Von da ab ist es nur nöthig, aus den vorhergehenden Resten die Ergänzungen zum Mod. $p$ der Reihe nach als Reste zu nehmen, da, sobald erst $x^q \equiv 1$ oder bezüglich $x^{p-1} \equiv 1$, mod $p$ ist, immer die Congruenzen stattfinden:

$$x^{\frac{q}{2}} \equiv -1 \text{ oder } x^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \text{ mod } p.$$

Sei also

$x^0 \equiv 1$, mod $p$, so folgt hieraus $x^{\frac{q}{2}+1} \equiv -1 . x \equiv -r_1 \equiv (p-r_1)$.

$x^1 \equiv r_1$, $\qquad x^{\frac{q}{2}+2} \equiv x^{\frac{q}{2}} . x^2 \equiv -1 . r_2 \equiv (p-r_2)$,

$x^2 \equiv r_2$, $\qquad x^{\frac{q}{2}+3} \equiv -1 . r_3 \equiv (p-r_3)$,

$x^3 \equiv r_3$, $\qquad \ldots\ldots\ldots$

. . . .

$x^{\frac{q}{2}} \equiv -1 \equiv p-1$, $\qquad x^q \equiv -1 . -1 . \equiv +1$.

Aehnlich ist die Ableitung der Reste für die Potenzen von $x$ bis zu der Potenz $p-1$, wenn $x$ eine primitive Wurzel ist. Wenn $q$ ungerade ist, so müssen die Reste bis $x^q$ berechnet werden, da in diesem Falle keine Potenz $x^{\frac{q}{2}} \equiv -1$ existirt, in welcher der Exponent $\frac{q}{2}$ eine ganze Zahl ist. Eine solche Berechnung kann hingegen nie bei den primitiven Wurzeln stattfinden, da die zu diesen gehörigen Exponenten immer gerade sind. Man sieht hieraus, dass bei der Anfertigung der Tafel der Reste höchstens der vierte Theil durch Multiplication zu berechnen ist, während die übrigen Reste theils in umgekehrter Reihenfolge wiederkehren, theils die Ergänzungen zum Mod. $p$ bilden, wie es im Vorhergehenden näher angegeben ist.

## III. Theilbarkeit der Zahlen.

Da die Untersuchung über die Theilbarkeit der Zahlen in Folge der Eigenthümlichkeit des dekadischen Systems mit den Potenzen der Zahl 10 und deren Resten nach einer Zahl als Modulus zusammenhängt, so liegt es nahe, die Frage, ob eine gegebene Zahl durch eine andere theilbar ist oder nicht, durch die Congruenzen zu beantworten, wie es im Folgenden geschehen soll. Vorausgesetzt werden nur die ersten Begriffe der Congruenz und die höchst einfachen Beziehungen zwischen den Potenzen einer Zahl und ihren Resten nach einem gegebenen Modul.

Es lässt sich irgend eine Zahl allgemein durch $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0$ bezeichnen, in welcher $a_n$, $a_{n-1} \ldots$ die Ziffern bedeuten, deren Indices mit den Exponenten der Potenzen der Zahl 10 übereinstimmen. Es ist daher:

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 = a_n . 10^n + a_{n-1} . 10^{n-1} + \dots + a_1 . 10^1 + a_0.$$

Da aber, wenn $r_0, r_1, r_2 \dots$ bezüglich die Reste der Potenzen $10^0, 10^1, 10^2 \dots$ nach dem Modulus $p$ sind, wo $p$ irgend eine beliebige Zahl sein soll, die Congruenzen stattfinden:

$$\begin{aligned}
a_n . 10^n &\equiv a_n r_n, \bmod p, \\
a_{n-1} . 10^{n-1} &\equiv a_{n-1} r_{n-1}, \\
&\dots\dots\dots \\
a_1 . 10^1 &\equiv a_1 r_1, \\
a_0 . 10^0 &\equiv a_0 . 1;
\end{aligned}$$

so folgt, dass, wenn

$$a_n r_n + a_{n-1} r_{n-1} + \dots + a_1 r_1 + a_0 \equiv 0, \bmod p$$

ist, auch die Zahl $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv 0, \bmod p$ sein muss, d. h. dieselbe ist durch $p$ ohne Rest theilbar.

Es wird also eine beliebige Zahl durch eine andere ohne Rest theilbar sein, sobald die Summe der Producte der einzelnen Ziffern in die Reste der Potenzen der Zahl 10, auf welche sich jene beziehen, durch diese Zahl ohne Rest theilbar ist.

Wendet man dies Verfahren auf die einzelnen Zahlen an, so gelangt man zu folgenden Resultaten:

1. Modulus 2. Es ist die Zahl $a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv 0, \bmod 2$, sobald $a_0 \equiv 0, \bmod 2$ ist oder sobald $a_0$ eine gerade Zahl ist. Denn man hat, da nur $10^0 \equiv 1, \bmod 2$, und alle übrigen Potenzen congruent 0 sind:

$$\begin{aligned}
a_n . 10^n &\equiv 0, \bmod 2, \\
a_{n-1} . 10^{n-1} &\equiv 0, \\
&\dots\dots \\
a_1 . 10^1 &\equiv 0, \\
a_0 &\equiv a_0;
\end{aligned}$$

also

$$a_n . 10^n + a_{n-1} . 10^{n-1} + \dots + a_1 . 10^1 + a_0 = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_0, \bmod 2.$$

2. Moduli 3, 9 und 6. Da $10^1 \equiv 1, \bmod 3$ ist, so sind es auch alle folgenden Potenzen von 10, so dass man erhält:

$$\begin{aligned}
a_n . 10^n &\equiv a_n, \bmod 3, \\
a_{n-1} . 10^{n-1} &\equiv a_{n-1}, \\
&\dots\dots \\
a_1 . 10^1 &\equiv a_1, \\
a_0 &\equiv a_0;
\end{aligned}$$

folglich

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0, \text{ mod } 3.$$

Wenn daher $a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \equiv 0$, mod 3 ist, d. h. wenn die Summe der einzelnen Ziffern durch 3 theilbar ist, so muss es auch die Zahl selbst sein.

Da 9 sich zu den Potenzen von 10 eben so verhält wie 3, indem auch nach dem Modulus 9 nur der Rest 1 vorkommt, so folgt unmittelbar die bekannte Regel für die Zahlen, welche durch 9 theilbar sind.

Wenn man die durch 6 theilbaren Zahlen untersucht, so ergiebt sich, dass, da die Potenzen von 10, ausgenommen $10^0$, sämmtlich den Rest 4 lassen:

$$a_n . 10^n \equiv 4a_n, \text{ mod } 6,$$
$$a_{n-1} . 10^{n-1} \equiv 4a_{n-1},$$
$$\dots\dots\dots$$
$$a_1 . 10^1 \equiv 4a_1,$$
$$a_0 \equiv a_0;$$

also

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv 4(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) + a_0, \text{ mod } 6.$$

Ist daher die rechte Seite congruent 0, so ist die gegebene Zahl durch 6 theilbar. Wenn aber $4(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) + a_0 \equiv 0$, mod 6 sein soll, so ist dies nur möglich, wenn $a_0$ eine gerade Zahl, etwa $2\alpha_0$ ist. Dann ist

$$2\{2(a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1) + \alpha_0\} \equiv 0, \text{ mod } 6.$$

Hieraus ergiebt sich eine Regel für die Theilbarkeit einer Zahl durch 6: Man wird die gewöhnliche Regel erhalten, wenn man berücksichtigt, dass, sobald zwei Zahlen $m$ und $n$ relativ prim sind und

$$a \equiv b, \text{ mod } m; \quad a \equiv b, \text{ mod } n, \quad \text{auch } a \equiv b, \text{ mod } mn$$

sein muss. Wenn daher

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv 0, \text{ mod } 2,$$
$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv 0, \text{ mod } 3;$$

so folgt:

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv 0, \text{ mod } 6$$

oder die bekannte Regel.

3. **Moduli 4, 8, 16, 32....** In Bezug auf die Potenzen von 2 als Moduli findet man, dass für $2^2$, $2^3$, $2^4$.... bezüglich die Potenzen $10^2$, $10^3$, $10^4$,.... erst congruent Null werden. Allgemein muss sein:

$$10^n \equiv 0, \bmod 2^n,$$

denn es ist

$$\frac{10^n}{2^n} = \left(\frac{10}{2}\right)^n = 5^n = \text{int.}$$

Dahingegen ist

$$\frac{10^{n-1}}{2^n} = \frac{5^{n-1}}{2},$$

also nie gleich einer ganzen Zahl. Alle Potenzen von 10, deren Exponent grösser als der des Modulus ist, werden ebenfalls congruent Null.

Wenn daher die Zahl $a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \equiv 0, \bmod 2^m$ sein soll, worin $m < n$, so muss man, sobald die gegebene Zahl im Allgemeinen auf ihre Theilbarkeit durch $2^m$ geprüft werden soll, bis zu der Potenz $10^m$ gehen und die Reste derselben nach dem $\bmod 2^m$ untersuchen.

Die ersten niedrigeren Potenzen geben einfache Resultate. Da

$$10^1 \equiv 1, \bmod 4, \quad 10^2 \equiv 2, \quad 10^3 \equiv 0;$$

so folgt:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \equiv 2a_1 + a_0 \equiv 0, \bmod 4.$$

**Also ist eine Zahl durch 4 theilbar, sobald die Summe aus der doppelten vorletzten Ziffer und der letzten Ziffer durch 4 theilbar ist.**

Da

$$10^0 \equiv 1, \bmod 8, \quad 10^1 \equiv 2, \quad 10^2 \equiv 2^2, \quad 10^3 \equiv 0;$$

so folgt

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \equiv 2^2 . a_2 + 2a_1 + a_0 \equiv 0, \bmod 8.$$

**Also ist eine Zahl durch 8 theilbar, sobald die Summe der drei letzten Ziffern, welche bezüglich mit den Potenzen $2^0$, $2^1$, $2^2$ multiplicirt sind, durch 8 theilbar ist.** Geht man weiter, so tritt bei dem mod 16 für $2a_1$ der Rest $10a_1$ an die Stelle, während die anderen Potenzen von 2 bleiben. Man wird die Theilbarkeit einer Zahl durch 16, 32, 64 überhaupt aus dem folgenden Schema erkennen:

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \equiv 2^3 a_3 + 2^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \equiv 0, \bmod 16,$$

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \equiv 2^4 a_4 + 2^3 a_3 + 2^2 a_2 + 10 a_1 + a_0 \equiv 0, \bmod 32,$$

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \equiv 2^5 a_5 + 2^4 a_4 + 40 a_3 + 36 a_2 + 10 a_1 + a_0 \equiv 0, \bmod 64.$$

Man sieht hieraus, dass sich die Regel der Theilbarkeit einer Zahl durch 64 auf diesem Wege complicirter gestaltet. Leichter lassen sich die sonst üblichen Regeln in diesem Falle anwenden.

4. Moduli 5 und 10. Da alle Potenzen von 10, ausgenommen $10^0$, congruent 0, sowohl nach dem mod 5, als auch nach dem mod 10 sind, so kommt es auf die Beschaffenheit der Ziffer $a_0$ an, indem

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 \equiv a_0 \equiv 0, \bmod 5, 10$$

sein soll. Diese Ziffer ist nur in zwei Fällen durch 5 theilbar, sobald sie nämlich 0 oder 5 ist. Ebenso kann $a_0$ nur congruent 0 nach dem mod 10 sein, wenn sie selbst 0 ist.

5. Modulus 7. Da die Reste der Potenzen von 10 nach dem mod 7:

$$\begin{aligned} 10^1 &\equiv 3, \\ 10^2 &\equiv 2, \\ 10^3 &\equiv 6 \equiv -1, \\ 10^4 &\equiv 4 \equiv -3, \\ 10^5 &\equiv 5 \equiv -2, \\ 10^6 &\equiv 1 \end{aligned}$$

sich verschieden sind, so lassen sich die Regeln für die Theilbarkeit durch 7 am zweckmässigsten für die verschiedenen mehrziffrigen Zahlen aufstellen, wobei die Reste grösser als $\frac{7}{2}$ durch die kleinsten Reste, negativ genommen, ausgedrückt sind.

$$\begin{aligned} a_1 a_0 &\equiv 3a_1 + a_0 \equiv 0, \bmod 7, \\ a_2 a_1 a_0 &\equiv 2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv 0, \\ a_3 \ldots a_0 &\equiv -a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv 0, \\ a_4 \ldots a_0 &\equiv -(3a_4 + a_3) + 2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv 0, \\ a_5 \ldots a_0 &\equiv -(2a_5 + 3a_4 + a_3) + 2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv 0, \\ a_6 \ldots a_0 &\equiv a_6 - (2a_5 + 3a_4 + a_3) + 2a_2 + 3a_1 + a_0 \equiv 0, \text{ u. s. f.} \end{aligned}$$

Da nach $10^6 \equiv 1$, mod 7 dieselben Reste wiederkehren, so lässt sich das Gesetz leicht fortbilden.

6. Modulus 11. Hierfür ergiebt sich die Regel sehr leicht, wenn man die kleinsten negativen Reste mit in Rechnung zieht. Da

$$10^0 \equiv 1,$$
$$10^1 \equiv -1,$$
$$10^2 \equiv +1, \text{ u. s. f.},$$

so ist

$$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 \equiv (-1)^n a_n + (-1)^{n-1} a_{n-1} + \dots + a_2 - a_1 + a_0 \equiv 0, \text{ mod } 11.$$

Die Zeichen ergeben sich je nach der Beschaffenheit des $n$, so wie die bekannte Regel unmittelbar hieraus folgt.

7. Modulus 17. Da 10 eine primitive Wurzel von 17 ist und die einzelnen Reste kein regelmässiges Bildungsgesetz befolgen, so wird die Prüfung, ob eine Zahl durch 17 theilbar ist, nicht kürzer als die Division selbst sein. Die Reste sind:

| Exp. | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10, | 11, | 12, | 13, | 14, | 15, | 16. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste | 10, | 15, | 14, | 4, | 6, | 9, | 5, | 16, | 7, | 2, | 3, | 13, | 11, | 8, | 12, | 1. |
| | −7, | −2, | −3, | +4, | +6, | −8, | +5, | −1, | +7, | +2, | +3, | −4, | −6, | +8, | −5, | +1. |

Nimmt man negative Reste mit hinzu, so hat man folgendes Schema:

$$a_1 a_0 \equiv -7a_1 + a_0 \equiv 0, \text{ mod } 17,$$
$$a_2 a_1 a_0 \equiv -(2a_2 + 7a_1) + a_0 \equiv 0,$$
$$a_3 \dots a_0 \equiv -(3a_3 + 2a_2 + 7a_1) + a_0 \equiv 0,$$
$$a_4 \dots a_0 \equiv -(3a_3 + 2a_2 + 7a_1) + 4a_4 + a_0 \equiv 0,$$
$$a_5 \dots a_0 \equiv -(3a_3 + 2a_2 + 7a_1) + 6a_5 + 4a_4 + a_0 \equiv 0,$$
$$a_6 \dots a_0 \equiv -(8a_6 + 3a_3 + 2a_2 + 7a_1) + 6a_5 + 4a_4 + a_0 \equiv 0,$$
$$a_7 \dots a_0 \equiv -(8a_6 + 3a_3 + 2a_2 + 7a_1) + 5a_7 + 6a_5 + 4a_4 + a_0 \equiv 0, \text{ u. s. f.}$$

8. Modulus 19. Die Reste der Potenzen sind folgende:

| Exp. | 1, | 2, | 3, | 4, | 5, | 6, | 7, | 8, | 9, | 10, | 11, | 12, |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste | 10, | 5, | 12, | 6, | 3, | 11, | 15, | 17, | 18, | 9, | 14, | 7, |
| | +10, | +5, | +12, | +6, | +3, | −8, | −4, | −2, | −1, | −10, | −5, | −12, |

| Exp. | 13, | 14, | 15, | 16, | 17, | 18. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Reste | 13, | 16, | 8, | 4, | 2, | 1. |
| | −6, | −3, | +8, | +4, | +2, | +1. |

Nimmt man die Reste aus der zweiten Reihe, so gelten für die verschiedenen mehrziffrigen Zahlen in Zeichen die folgenden Regeln:

$$a_1 a_0 \equiv 10a_1 + a_0 \equiv 0, \text{ mod } 19,$$
$$a_2 a_1 a_0 \equiv 5a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv 0,$$
$$a_3 a_2 a_1 a_0 \equiv 12a_3 + 5a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv 0,$$
$$a_9 \ldots a_0 \equiv -(a_9 + 2a_8 + 4a_7 + 8a_6) + 3a_5 + 6a_4 + 12a_3 + 5a_2 + 10a_1 + a_0 \equiv 0,$$
u. s. f.

Je weiter man in den Zahlen fortschreitet, desto zusammengesetzter werden die Kennzeichen der Theilbarkeit. Betrachtet man aber die im Vorhergehenden aufgestellte Tafel der Reste der Potenzen der Zahlen für den mod 19 näher, so findet sich ein solcher Zusammenhang zwischen den Resten der Potenzen von 10 und denen von 2, dass die Reste der ersteren eine Reihe bilden, welche die Reste der Potenzen von 2 in umgekehrter Reihenfolge enthalten. Diese Eigenthümlichkeit gilt aber nicht allein von den beiden Zahlen 2 und 10, sondern es lassen sämmtliche Zahlen 1, 2, 3 ....$p-1$, sobald der Modulus $p$ eine Primzahl ist, sich so mit einander verbinden, dass deren Reste der Potenzen die eben speciell für 2 und 10 angegebene Eigenschaft besitzen. Da die Theilbarkeit der Zahlen sich aus dem Bisherigen beurtheilen lässt, so bedarf es einer weiteren Entwickelung für bestimmte Primzahlen nicht mehr, und ich komme daher noch einmal auf die Reste der Potenzen zurück, indem ich sie jetzt von dem hier schon angedeuteten Gesichtspunkte aus betrachte.

## IV. Weitere Betrachtung der Reste der Potenzen.

Nehmen wir zur Erleichterung die Reste der Potenzen nach dem mod 19, so findet sich bei der Betrachtung der 17ten Potenzen der Zahlen 2, 3, 4 .... 17, dass die Reste derselben auf diejenigen Zahlen hinweisen, welche ebenfalls zu den Potenzen von 1 bis 17 erhoben solche Reste geben, deren Reihe die umgekehrte der Reihe der ersteren Reste ist. So ist $2^{17} \equiv 10$, mod 19, und die Potenzen von 10 geben dieselben Reste, welche die Potenzen $2^{17}$ bis $2^1$ lassen. Ebenso ist $3^{17} \equiv 13$ und es folgen für $13^1$ bis $13^{17}$ die Reste der Potenzen $3^{17}$ bis $3^1$. Stellen wir diese Zahlen für den mod 19 zusammen, so sind es die folgenden:

2—10, 3—13, 4—5, 6—16, 7—11, 8—12, 9—17, 14—15.

Die Multiplication je zweier solcher v e r b u n d e n e n Zahlen ergiebt die Zahlen:

20, 39, 77, 96, 153, 210

oder

1.19+1, 2.19+1, 4.19+1, 5.19+1, 8.19+1, 11.19+1,

d. h. das Product beider hat immer die Form $19m+1$. Hierdurch ist man im Stande, die Relation zwischen je zwei verbundenen Zahlen allgemein nachzuweisen. Es sei $p$ irgend eine ungerade Primzahl und $a$ und $b$ zwei Zahlen kleiner als $p$ von der Beschaffenheit, dass ihr Product die Form $mp+1$ hat, so ist immer:

$$a^r \equiv b^{p-1-r}, \text{ mod } p.$$

Hierin bedeutet $r$ eine Zahl ebenfalls kleiner als $p$. Durch Multiplication dieser Congruenz mit $b^r$ folgt:

$$(ab)^r \equiv b^{p-1} \equiv 1, \text{ mod } p.$$

Setzt man für $ab$ den Werth $mp+1$, so hat man:

$$(mp+1)^r \equiv 1, \text{ mod } p,$$

und durch die Entwickelung des Binoms:

$$m^r p^r + r_1 m^{r-1} p^{r-1} + \ldots + r_1 mp + 1 \equiv 1, \text{ mod } p$$

oder

$$m^r p^r + r_1 m^{r-1} p^{r-1} + \ldots + r_1 mp \equiv 0, \text{ mod } p.$$

Dieser Congruenz wird, da in jedem Gliede wenigstens $p$ vorkommt, Genüge geleistet; und da dieselbe eine nothwendige Folge aus der obigen $a^r \equiv b^{p-1-r}$, mod $p$ ist, so muss diese letztere unter der Voraussetzung, dass $ab = mp+1$, stattfinden. Da man für $r$ die Zahlen $0, 1, 2, \ldots p-1$ einsetzen darf, so erhält man darnach:

$$\begin{array}{ll} a^0 \equiv b^{p-1}, \text{ mod } p, & \\ a^1 \equiv b^{p-2}, & \\ a^2 \equiv b^{p-3}, & \\ a^3 \equiv b^{p-4}, & a^{p-2} \equiv b^1, \\ \ldots\ldots & a^{p-1} \equiv b^0, \end{array}$$

d. h. die Bestätigung der angegebenen Eigenthümlichkeit der Reste. Nennen wir zwei solche Zahlen $a$ und $b$ **verbundene Zahlen**, so haben dieselben, wenn man die Congruenz $(ab)^r \equiv 1$, mod $p$ benutzt, auch noch die Eigenthümlichkeit, dass, wenn man das Product derselben zu irgend einer Potenz erhebt, diese immer congruent 1 ist oder die Form $np+1$ haben muss.

Stellt man die verbundenen Zahlen für verschiedene Moduli nach der obigen Tafel zusammen, so ergiebt sich:

| mod 5: | mod 7: | mod 11: | mod 13: |
|---|---|---|---|
| 2—3 | 2—4 | 2—6 | 2—7 |
| | 3—5 | 3—4 | 3—9 |
| | | 5—9 | 4—10 |
| | | 7—8 | 5—8 |
| | | | 6—11 |

| mod 17: | mod 19: | mod 23: | mod 29: |
|---|---|---|---|
| 2—9 | 2—10 | 2—12 | 2—15 |
| 3—6 | 3—13 | 3—8 | 3—10 |
| 4—13 | 4—5 | 4—6 | 4—22 |
| 5—7 | 6—16 | 5—14 | 5—6 |
| 8—15 | 7—11 | 7—10 | 7—25 |
| 10—12 | 8—12 | 9—18 | 8—11 |
| 11—14 | 9—17 | 11—21 | 9—13 |
| | 14—15 | 13—16 | 12—17 |
| | | 15—20 | 14—27 |
| | | 17—19 | 16—20 |
| | | | 18—21 |
| | | | 19—26 |
| | | | 23—24 |

| mod 31: | | mod 37: | |
|---|---|---|---|
| 2—16 | 11—17 | 2—19 | 11—27 |
| 3—21 | 12—13 | 3—25 | 12—34 |
| 4—8 | 14—20 | 4—28 | 13—20 |
| 5—25 | 15—29 | 5—15 | 17—24 |
| 6—26 | 18—19 | 6—31 | 18—35 |
| 7—9 | 22—24 | 7—16 | 21—30 |
| 10—28 | 23—27 | 8—14 | 22—32 |
| | | 9—33 | 23—29 |
| | | 10—26 | |

Die verbundenen Zahlen umfassen für den mod $p$ die sämmtlichen Zahlen $2, 3, 4, \ldots\ldots p-2$. Dahingegen können die Zahlen 1 und $p-1$ **isolirte** genannt werden, da sie weder beide zusammen verbundene sind, noch auch mit einer der Zahlen $2, 3 \ldots\ldots p-2$ verbunden vorkommen. In Bezug auf 1 ist es ohne Weiteres einleuchtend; aber auch $p-1$ kann mit keiner anderen Zahl verbunden vorkommen. Da nämlich diese Zahlen die Form $p-k$ haben, worin $k$ die Werthe $2, 3 \ldots\ldots p-2$ annehmen kann, so müsste nach dem Obigen

$$(p-k)^r \equiv (p-1)^{p-1-r}, \bmod p$$

und $(p-k)(p-1)$ von der Form $mp+1$ sein; es hat aber die Form $(p-2k)p+k$, worin $k$ nie den Werth 1 erhalten kann.

Indessen lassen sich 1 und $p-1$ insofern dazu rechnen, dass sie mit sich selbst multiplicirt congruent 1 werden oder die Form $mp+1$ haben. Denn

$$(p-1) \equiv -1, \bmod p,$$

also

$$(p-1)^2 \equiv +1, \bmod p.$$

Hingegen ist keine der Zahlen $2, 3 \ldots . p-2$ eine isolirte, denn es ist

$$(p-k)^2 = (p-2k)p + k \equiv k, \bmod p.$$

Da aber $k$ nie 1 sein kann, so hat auch $(p-k)^2$ nie die Form $mp+1$.

Unmittelbar leuchtet auch ein, dass zwei verbundene Zahlen immer zu denselben Exponenten gehören müssen, da im entgegengesetzten Falle nie dieselben Reste in umgekehrter Reihenfolge wiederkehren könnten; ferner dass, wenn zu einem Exponenten nur zwei secundäre Wurzeln gehören, dieselben immer verbundene Zahlen sein müssen. — Es findet eine andere Eigenschaft speciell in Bezug auf die Zahl 10 statt, wenn die Primzahl von der Form $10n-1$ ist, wodurch ich zunächst auf die eben entwickelten Gesetze aufmerksam gemacht wurde. Wenn $p$ die Form $10n-1$ hat, wie die Zahlen 19, 29, 59...., so hat die mit 10 verbundene Zahl den Werth $n$ selbst.

Da $ab = mp+1$ sein soll und $b = 10$, so ist

$$10a = mp+1 = m(10n-1)+1.$$

Da die letzte Ziffer in der Zahl $(10n-1)$ 9 ist, so kann dieser Gleichung nur genügt werden, wenn $m$ den Werth 1, 11, 21 u. s. f. hat. Von diesen ist jedoch nur $m=1$ brauchbar, da die übrigen für $a$ solche Werthe geben, welche grösser wie $p$ sind; diese sind aber bei allen diesen Untersuchungen ausgeschlossen. Dann hat man unmittelbar $a=n$, und es findet nach der obigen Bezeichnung die Relation statt, da $a=n$ und $b=10$:

$$n^r \equiv 10^{p-1-r}, \bmod (10n-1)$$

oder

$$(10n)^r \equiv 10^{p-1} \equiv 1, \bmod (10n-1),$$

d. h. $\frac{(10n)^r - 1}{10n - 1} = E$, wie es der Fall ist, da man durch Division die bekannte endliche Reihe erhält.

Bisher galt die Beschränkung, dass der mod $p$ eine Primzahl bedeute; lässt man diese Bedingung fallen, so gilt auch dann noch die angegebene Relation; allein man darf wie bei ähnlichen Sätzen in der Zahlentheorie, sobald der Modulus keine Primzahl ist, nur diejenigen Zahlen nehmen, welche relative Primzahlen zu dem Modulus sind.

Wenn $r$ irgend eine zusammengesetzte Zahl bedeutet und $\varrho$ die Anzahl der zu $r$ relativ primen Zahlen, also $\varrho = S^m r$, so hat man nach dem verallgemeinerten Fermat'schen Lehrsatze die Beziehung:

$$a^\varrho \equiv 1, \text{ mod } r, \text{ wenn } a \smile r.$$

Wenn aber $a$ und $b$ wiederum zwei solche Zahlen sind, deren Product von der Form $mr + 1$ ist, und welche beide relative Primzahlen zu $r$ sind, so muss die Relation stattfinden:

$$a^s \equiv b^{\varrho - s}, \text{ mod } r, \quad s < \varrho.$$

Hieraus folgt:

$$(ab)^s \equiv b^\varrho \equiv 1, \text{ mod } r,$$

und da $ab = mr + 1$:

$$(mr + 1)^s \equiv 1, \text{ mod } r.$$

Die Entwickelung ergiebt wie früher die Richtigkeit der Congruenz. Also werden die Reste der Potenzen der einen verbundenen Zahl die umgekehrte Reihe der Reste der Potenzen der andern ergeben. In diesem Falle kommt es aber auch vor, dass nicht allein die Zahlen 1 und $r-1$, wie früher 1 und $p-1$, mit sich selbst multiplicirt die Form $mr+1$ haben, sondern es finden sich mehrere aus der Reihe der zu $r$ relativ primen Zahlen, wie man aus den folgenden Beispielen ersehen kann:

mod 9: 2—5 und 1—1
4—7 8—8

mod 15: 2— 8 und 4— 4; 1— 1
7—13 11—11; 14—14

mod 16: 3—11 und 7—7; 1— 1
5—13 9—9; 15—15

mod 28: 3—19 und 1— 1
5—17 13—13
9—25 15—15
11—23 27—27

Ob die Zahlen, deren Reste der Potenzen nur einmal vorkommen, sich von den eigentlichen verbundenen Zahlen unter-

scheiden, habe ich nicht weiter untersucht, da die Entwickelungen schon eine weitere Ausdehnung, als ich beabsichtigte, erhalten haben.

Es lässt sich nach dem Bisherigen folgendes Resultat aufstellen: Wenn der Modulus $p$ eine Primzahl ist, so sind alle Zahlen von 2 bis $p-2$ verbundene Zahlen und nur 1 und $p-1$ isolirte Zahlen.

Wenn der Modulus $r$ eine zusammengesetzte Zahl ist, so können ausser 1 und $r-1$ unter den zu $r$ relativ primen Zahlen, kleiner als $r$, noch andere isolirte Zahlen vorkommen.

Da ich es nicht streng nachweisen kann, dass sie sich immer finden müssen, darf ich den Satz nur so aussprechen und behalte mir eine weitere Untersuchung vor.

Schliesslich möchte ich noch auf diejenigen mehrziffrigen Zahlen aufmerksam machen, deren Ziffern sämmtlich einander gleich sind. Dieselben werden durch gewisse Primzahlen theilbar sein müssen, wie z. B. alle zweiziffrigen Zahlen mit gleichen Ziffern durch 11, alle dreiziffrigen durch 37 u. s. f.

Es lassen sich diese Zahlen leicht bestimmen, da sie mit den secundären und primären Wurzeln der Congruenzen in Zusammenhang stehen. Ist irgend eine Zahl, $a_n a_{n-1} \dots a_0$, gegeben, so wird diese durch eine Primzahl $p$ theilbar sein müssen, wenn

$$a(10^n + 10^{n-1} + \dots + 10^1 + 1) \equiv 0, \text{ mod } p$$

ist. Man hat aber nur nöthig, aus der Tafel der Wurzel der Congruenzen diejenigen Exponenten zu suchen, zu denen 10 für die verschiedenen Moduli gehört, um zu wissen, wie viel gleiche Ziffern da sein müssen, damit die durch sie dargestellte Zahl durch $p$ theilbar ist. Es folgt ohne Weiteres, dass dann auch diejenigen Zahlen mit gleichen Ziffern, deren Anzahl ein Vielfaches des zu 10 gehörigen Exponenten ist, durch den Modulus $p$ theilbar sein müssen. Darnach

| | | | |
|---|---|---|---|
| gehört 10 zu dem Expon. | 2, mod 11 | gehört 10 zu dem Expon. | 58, mod 59 |
| „ „ „ „ „ | 6, mod 13 | „ „ „ „ „ | 60, mod 61 |
| „ „ „ „ „ | 16, mod 17 | „ „ „ „ „ | 33, mod 67 |
| „ „ „ „ „ | 18, mod 19 | „ „ „ „ „ | 35, mod 71 |
| „ „ „ „ „ | 22, mod 23 | „ „ „ „ „ | 8, mod 73 |
| „ „ „ „ „ | 28, mod 29 | „ „ „ „ „ | 13, mod 79 |
| „ „ „ „ „ | 15, mod 31 | „ „ „ „ „ | 41, mod 83 |
| „ „ „ „ „ | 3, mod 37 | „ „ „ „ „ | 44, mod 89 |
| „ „ „ „ „ | 5, mod 41 | „ „ „ „ „ | 96, mod 97 |
| „ „ „ „ „ | 21, mod 43 | „ „ „ „ „ | 4, mod 101 |
| „ „ „ „ „ | 46, mod 47 | . . . . . . | . . . |
| „ „ „ „ „ | 13, mod 53 | | |

Hieraus lässt sich ersehen, dass bei gleichen Ziffern

| | | | |
|---|---|---|---|
| zweiziffrige | Zahlen | durch | 11, |
| dreiziffrige | „ | „ | 37, |
| vierziffrige | „ | „ | 101, |
| fünfziffrige | „ | „ | 41, |
| sechsziffrige | „ | „ | 13, |
| | u. s. f. | | |

theilbar sein müssen.

---

# XVIII.

# Ueber die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt.

Von

Herrn *Ferdinand Kerz*,

Rittmeister in der Grossherzoglich Hessischen Gendarmerie zu Giessen.

---

## Zweite Abtheilung *).

### §. 31.

Ist $a$ (Fig. 1.) der äussere und $i$ der innere Aehnlichkeitspunkt zweier Kreise $\mathfrak{M}$ und $M$ und bezeichnen $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}$ die Durchschnittspunkte der Centrale $\mathfrak{M}M$ mit der Peripherie des Kreises $\mathfrak{M}$, ebenso $N$, $N'$ die Durchschnittspunkte der Centrale mit der des Kreises $M$; so werden, wenn der Punkt $N$ in Bezug auf den Kreis $\mathfrak{M}$ seine Lage beibehält, der Halbmesser $NM$ des

*) Fortsetzung von Thl. XXIV. Hft. 2. S. 211—228. Alle zu dieser zweiten Abtheilung gehörenden Figurentafeln sind mit „Kerz“ bezeichnet und die Figuren auf denselben ohne Unterbrechung von Fig. 1. bis Fig. 28. gezählt.

Kreises *M* aber sich vergrössert, sich auch der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt *a* und *i* der Peripherie des Kreises 𝔐, nämlich den Punkten 𝔑′ und 𝔑 nähern und mit diesen Punkten zusammenfallen, sobald der Halbmesser *NM* unendlich gross angenommen wird, nämlich die Peripherie des Kreises *M* in die Tangente *M′M″* des Punktes *N* übergeht.

Daher kann man sagen:

Für einen Kreis 𝔐 und eine gerade Linie *M′M″* sind der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt die bezüglichen Durchschnittspunkte der durch den Mittelpunkt des Kreises auf die Gerade gefällten Senkrechten mit der Peripherie des Kreises.

## §. 32.

Verkleinert sich aber der Halbmesser des Kreises 𝔐 (Fig. 1.) bei ungeändertem Halbmesser des Kreises *M*, so rücken auch der äussere und innere Aehnlichkeitspunkt *a* und *i* dem Mittelpunkte des Kreises 𝔐 näher und fallen mit demselben zusammen, sobald der Halbmesser unendlich klein wird, der Kreis 𝔐 also in einen Punkt übergeht.

Daher kann man sagen:

Für einen Punkt 𝔐 und einen Kreis *M* ist ersterer selbst äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt.

## §. 33.

Diese Eigenschaft des Punktes 𝔐 ändert sich nicht, wenn sich nunmehr der Halbmesser des Kreises *M* vergrössert. Wird derselbe unendlich gross gedacht, so kann man sagen:

Für einen Punkt 𝔐 und eine gerade Linie *M′M″* ist ersterer selbst äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt.

## §. 34.

Sind 𝔐 und *M* (Fig. 2.) zwei aus einander liegende Kreise von gleichen Halbmessern, so fällt der äussere Aehnlichkeitspunkt *a* beiderseits unendlich weit weg und der innere Aehnlichkeitspunkt *i* ist der Halbirungspunkt der Centrale 𝔐*M*.

Behalten nun die Durchschnittspunkte 𝔑 und *N* der Kreise mit der Centrale ihre Lage bei gleichmässiger Vergrösserung der Halbmesser, so ändert sich die Lage ihrer Aehnlichkeitspunkte

nicht und sie wird dieselbe bleiben, wenn auch die Halbmesser unendlich gross werden, d. h. wenn sie mit ihren bezüglichen Tangenten in $\mathfrak{N}$ und $N$ zusammenfallen.

Daher kann man sagen:

Für zwei Parallelen $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $M'M''$ fällt der äussere Aehnlichkeitspunkt in senkrechter Richtung auf sie beiderseits unendlich weit weg und der innere Aehnlichkeitspunkt ist der Halbirungspunkt ihrer Entfernung.

## §. 35.

Werden die Halbmesser der Kreise $\mathfrak{M}$ und $M$ (Fig. 2.) gleichmässig kleiner, so ändert sich die Lage ihrer Aehnlichkeitspunkte nicht und sie wird dieselbe bleiben, wann die Halbmesser unendlich klein werden, d. h. wenn die Kreise in Punkte übergehen.

Daher kann man sagen:

Für zwei Punkte fällt der äussere Aehnlichkeitspunkt beiderseits unendlich weit weg und der innere Aehnlichkeitspunkt ist der Halbirungspunkt ihrer Entfernung.

## §. 36.

Schneiden sich zwei Kreise $\mathfrak{M}$ und $M$ von gleichen Halbmessern (Fig. 3.), so fällt der äussere Aehnlichkeitspunkt $a$ in der Richtung ihrer Centrale $\mathfrak{M}M$ beiderseits unendlich weit weg und der innere Aehnlichkeitspunkt $i$ ist der Halbirungspunkt der Centrale $\mathfrak{M}M$.

Behält nun der Durchschnittspunkt $N$ beider Kreise seine Lage, vergrössern sich aber die Halbmesser $N\mathfrak{M}$ und $NM$ derselben gleichmässig, so wird der innere Aehnlichkeitspunkt zwar immer der Halbirungspunkt der Centrale bleiben, sich aber von dem Durchschnittspunkt $N$ entfernen, und er wird unendlich weit wegfallen, wenn die Halbmesser beider Kreise unendlich gross werden, nämlich mit ihren bezüglichen Tangenten, $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $M'M''$, in $N$ zusammenfallen. Daher kann man sagen:

Für zwei gerade Linien, welche sich schneiden, fallen äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt unendlich weit weg, und zwar in Richtungen, welche senkrecht auf einander stehen und mit den Halbirungslinien der von den gegebenen Linien, $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $M'M''$, gebildeten Winkeln zusammenfallen.

§. 37.

Die Betrachtung der beiden Kreise $\mathfrak{M}$ und $M$, welche in §. 36. in Bezug auf den, von den beiden Linien gebildeten Winkel $M'N\mathfrak{M}''$ angestellt wurde, hätte auch in Bezug auf seinen Nebenwinkel $\mathfrak{M}'NM'$ stattfinden können, und sie würde ganz zu demselben Resultat geführt haben. Für zwei gerade sich schneidende Linien sind daher die äusseren Aehnlichkeitspunkte auch die inneren und die inneren auch die äusseren.

§. 38.

Aus dem aufgestellten Begriffe des äusseren Aehnlichkeitskreises (§. 18. 1)) geht hervor, dass sein Halbmesser nicht kleiner ist wie $a\mathfrak{T}$ und nicht grösser wie $aT$, dass also seine Peripherie eine Lage hat, die den Berührungspunkt $\mathfrak{T}$ ein- und den Berührungspunkt $T$ ausschliesst.

§. 39.

Geht, nach §. 31. (Fig. 1.), der Kreis $M$ in eine gerade Linie, nämlich in seine Tangente in $N$ über, so fallen der äussere Aehnlichkeitspunkt $a$ und der Berührungspunkt $\mathfrak{T}$ der Tangente nach $\mathfrak{N}'$ und $a\mathfrak{T}$ und $a\mathfrak{B}'$ (Taf. IV. Fig. 2. in Thl. XXIV.) werden unendlich klein; dagegen fällt der Berührungspunkt $T$ unendlich weit weg und $aT$ läuft mit $M'M''$ parallel. Es handelt sich also darum, zwischen $a\mathfrak{T}=0$ und $aT=\infty$ die mittlere Proportionale zu suchen.

Nach §. 1. ist für jede Lage einer äusseren Aehnlichkeitslinie $a\mathfrak{B}B$:

$$a\mathfrak{B}.aB = a\mathfrak{T}.aT,$$

also im vorliegenden Falle:

$$a\mathfrak{B}.aB = 0.\infty. \quad \text{(Fig. 4.)}$$

d. h. es ist im vorliegenden Falle die mittlere Proportionale zwischen 0 und $\infty$ gleich der mittleren Proportionale zwischen $aB$ und $a\mathfrak{B}$. Zu einem Kreise $\mathfrak{M}$ und einer geraden Linie $M'M''$ findet man daher den Halbmesser des zugehörigen äusseren Aehlichkeitskreises, wenn man von dem äusseren Aehnlichkeitspunkt $a$ nach irgend einem Punkte $B$ der gegebenen Linie eine Gerade $aB$ zieht und zu dieser und der von ihr abgeschnittenen Sehne $a\mathfrak{B}$ die mittlere Proportionale $a\mathfrak{T}'$ bestimmt.

Da man zur Bestimmung des äusseren Aehnlichkeitspunktes bereits durch den Mittelpunkt des Kreises auf die Gerade eine Senkrechte gefällt hat, so bedient man sich zweckmässig dieser zur Bestimmung des Halbmessers des äusseren Aehnlichkeitskreises, indem man zu $aN$ und $ai$ die mittlere Proportionale sucht.

### §. 40.

Geht, nach §. 31. Fig. 1., der Kreis $M$ in eine gerade Linie, nämlich in seine Tangente in $N$ über, so fallen der innere Aehnlichkeitspunkt $i$ und der Berührungspunkt $\mathfrak{G}$ der Tangente nach $\mathfrak{N}$ und $i\mathfrak{G}$ und $i\mathfrak{B}$ (Taf. IV. Fig. 3. in Thl. XXIV.) werden unendlich klein; dagegen fällt der Berührungspunkt $G$ unendlich weit weg und $iG$ läuft mit $M'M''$ parallel. Es handelt sich also darum, zwischen $i\mathfrak{G}=0$ und $iG=\infty$ die mittlere Proportionale zu suchen.

Nach §. 3. ist für jede Lage einer inneren Aehnlichkeitslinie $\mathfrak{B}'iB'$:

$$i\mathfrak{B}'.iB'=i\mathfrak{G}.iG,$$

also in vorliegendem Falle:

$$i\mathfrak{B}'.iB'=0.\infty, \quad \text{(Fig. 5.)}$$

d. h. es ist die mittlere Proportionale zwischen 0 und $\infty$ gleich der mittleren Proportionale zwischen $i\mathfrak{B}'$ und $iB'$.

Zu einem Kreise $\mathfrak{M}$ und einer geraden Linie $M'M''$ findet man daher den Halbmesser des zugehörigen inneren Aehnlichkeitskreises, wenn man durch den inneren Aehnlichkeitspunkt $i$ irgend eine Gerade $\mathfrak{B}'B'$ legt, welche den Kreis in $\mathfrak{B}'$ und die gegebene Linie in $B'$ schneidet, und zu dieser Geraden $\mathfrak{B}'B'$ und der von ihr abgeschnittenen Sehne $i\mathfrak{B}'$ die mittlere Proportionale $i\mathfrak{B}'$ bestimmt.

Da man zur Bestimmung des inneren Aehnlichkeitspunktes bereits durch den Mittelpunkt des Kreises auf die gegebene Gerade eine Senkrechte gefällt hat, so bedient man sich zweckmässig dieser zur Bestimmung des Halbmessers des inneren Aehnlichkeitskreises, indem man zu $ai$ und $iN$ die mittlere Proportionale sucht.

### §. 41.

Aus dem Schlusssatze der §§. 39. und 40. folgt, dass für einen gegebenen Kreis und eine gegebene Gerade der Halbmesser des äusseren Aehnlichkeitskreises und der Halbmesser des inneren sich zugleich ergeben. Sie bilden mit dem Durchmesser des ge-

gebenen Kreises ein rechtwinkeliges Dreieck, zu welchem letzterer die eine Cathete, der Halbmesser des inneren Aehnlichkeitskreises die andere Cathete und der Halbmesser des äusseren Aehnlichkeitskreises die Hypotenuse ist.

§. 42.

Verkleinert sich, wie in §. 32., der Halbmesser des Kreises 𝔐 bei ungeändertem Halbmesser des Kreises $M$, so rücken nicht allein äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt mehr nach 𝔐, sondern auch die Punkte 𝔅′, 𝔅 und 𝔗 (Taf. IV. Fig. 2. u. 3. in Thl. XXIV.) und die mittleren Proportionalen zwischen $a$𝔗 und $aT$, $i$𝔊 und $iG$ werden kleiner.

Sie werden aber Null werden, wenn der Halbmesser des Kreises 𝔐 selbst unendlich klein wird.

Daher kann man sagen:

Für einen gegebenen Kreis $M$ und einen Punkt 𝔐 ist letzterer selbst der äussere und innere Aehnlichkeitskreis.

§. 43.

Diese Eigenschaft des Punktes 𝔐 ändert sich nicht, wenn sich nunmehr der Halbmesser des Kreises $M$ vergrössert.

Wird derselbe unendlich gross gedacht, so kann man sagen:

Für einen Punkt und eine gerade Linie ist ersterer selbst äusserer und innerer Aehnlichkeitskreis.

§. 44.

Da bei zwei Kreisen von gleichen Halbmessern (Fig. 6.) der äussere Aehnlichkeitspunkt in der Richtung der Centrale unendlich weit wegfällt, so muss nothwendigerweise der Halbmesser des zu ihnen gehörigen äusseren Aehnlichkeitskreises unendlich gross sein und daher der äussere Aehnlichkeitskreis selbst in eine gerade, auf der Centrale senkrechte Linie übergehen, und da der äussere Aehnlichkeitskreis (nach §. 38.) immer den einen Berührungspunkt ein- und den andern ausschliesst, auch in vorliegendem Falle nach beiden Richtungen der Centrale ein äusserer Aehnlichkeitspunkt, wenn auch in unendlicher, doch aber immer in gleicher Entfernung von den bezüglichen Mittelpunkten 𝔐 und $M$ der gegebenen Kreise, gedacht werden muss, so muss auch der äussere Aehnlichkeitskreis zu den beiden ge-

gebenen Kreisen eine und dieselbe Lage haben und man kann sagen:

Für zwei Kreise von gleichen Halbmessern ist der äussere Aehnlichkeitskreis die in dem Halbirungspunkt der Centrale auf dieselbe senkrecht errichtete gerade Linie.

§. 45.

Behalten die Punkte 𝔑 und $N$ der Kreise 𝔐 und $M$ (Fig. 6.) ihre Lage, werden aber die Halbmesser 𝔑𝔐 und $NM$ gleichmässig grösser, so ändert sich hierdurch die Lage des äusseren Aehnlichkeitskreises (§. 44.) nicht, und sie wird dieselbe bleiben, wann diese Halbmesser unendlich gross werden, also die Kreise 𝔐 und $M$ in ihre Tangenten, 𝔐'𝔐'' und $M'M''$, in 𝔑 und $N$ übergehen. Daher kann man sagen:

Für zwei Parallel-Linien ist der äussere Aehnlichkeitskreis selbst eine, in gleicher Entfernung von beiden Parallelen mit diesen parallel laufende gerade Linie.

§. 46.

Werden die Halbmesser der Kreise 𝔐 und $M$ (Fig. 6.) gleichmässig kleiner, so ändert sich die Lage ihres äusseren Aehnlichkeitskreises nicht, und sie wird dieselbe bleiben, wenn die Halbmesser unendlich klein werden, d. h. die Kreise in Punkte übergehen.

Daher kann man sagen:

Für zwei Punkte ist der äussere Aehnlichkeitskreis die in dem Halbirungspunkt ihrer Entfernung auf diese senkrecht errichtete gerade Linie.

§. 47.

Da bei zwei Kreisen von gleichen Halbmessern der innere Aehnlichkeitspunkt $i$ der Halbirungspunkt der Centrale 𝔐$M$ ist (Fig. 7.), so ist der Halbmesser des inneren Aehnlichkeitskreises gleich der aus diesem Punkte an einen der Kreise gelegten Tangente.

§. 48.

Behalten die Punkte 𝔑 und $N$ der Kreise 𝔐 und $M$ (Fig. 7.) ihre Lage, werden aber die Halbmesser 𝔑𝔐 und $NM$ gleichmässig grösser, so wird auch der Halbmesser des inneren

Aehnlichkeitskreises grösser, und derselbe wird, wenn die Halbmesser unendlich gross werden, d. h. die Kreise 𝔐 und $M$ in gerade Linien übergehen und mit ihren Tangenten in 𝔑 und $N$ zusammenfallen, selbst unendlich gross werden; daher kann man sagen:

Für zwei parallele Linien fällt der innere Aehnlichkeitskreis unendlich weit weg.

## §. 49.

Behalten die Punkte 𝔑 und $N$ der Kreise 𝔐 und $M$ (Fig. 7.) ihre Lage, werden aber die Halbmesser 𝔑𝔐 und $NM$ gleichmässig kleiner, so wird auch der Halbmesser des inneren Aehnlichkeitskreises kleiner.

Werden die Halbmesser der beiden Kreise unendlich klein, d. h. gehen die Kreise in Punkte über, so wird der Halbmesser des inneren Aehnlichkeitskreises gleich der Entfernung des inneren Aehnlichkeitspunktes von jedem der gegebenen Punkte; daher kann man sagen:

Für zwei Punkte geht der innere Aehnlichkeitskreis durch dieselben und sie selbst sind Endpunkte seines Durchmessers.

## §. 50.

Aus §. 44. folgt, dass für Kreise von gleichen Halbmessern, welche sich schneiden, der äussere Aehnlichkeitskreis mit der Richtung ihrer gemeinschaftlichen Sehne zusammenfällt.

Behält daher der Schneidungspunkt $N$ der Kreise 𝔐 und $M$ (Fig. 3.) seine Lage, vergrösseren sich aber die Halbmesser $N$𝔐 und $NM$ gleichmässig, so erleidet hierdurch der äussere Aehnlichkeitskreis keine Veränderung, und er wird noch seine unveränderte Lage behalten, wenn die Halbmesser $N$𝔐 und $NM$ unendlich gross werden, die Kreise 𝔐 und $M$ also in gerade Linien übergehen und mit ihren bezüglichen Tangenten in $N$ zusammenfallen; daher kann man sagen:

Für zwei gerade sich schneidende Linien 𝔐'𝔐'' und $M'M''$ ist der äussere Aehnlichkeitskreis die Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels.

## §. 51.

Aus den §§. 37. und 50. folgt noch, dass der äussere Aehnlich-

keitskreis zweier sich schneidenden geraden Linien auch der innere und der innere auch der äussere ist, und dass beide Aehnlichkeitskreise in dem Schneidungspunkt der beiden Geraden sich selbst schneiden und auf einander senkrecht stehen.

§. 52.

Stellt man ähnliche Betrachtungen mit der Linie gleicher Potenzen zweier Kreise an, indem man die Halbmesser derselben bald unendlich gross, bald unendlich klein werden lässt, so ergiebt sich:

1) Für einen Kreis und eine gerade Linie ist letztere selbst die Linie gleicher Potenzen.

2) Für einen Kreis und einen Punkt ist die Linie gleicher Potenzen die auf die Centrale gefällte Senkrechte, welche durch den Halbirungspunkt der von dem Punkt an den Kreis gelegten Tangente geht.

3) Für einen Punkt und eine Gerade ist letztere selbst die Linie gleicher Potenzen.

4) Für zwei parallele gerade Linien ist die Linie gleicher Potenzen die, in gleicher Entfernung von beiden Parallelen mit diesen parallellaufende gerade Linie. Sie fällt also (nach §. 45.) mit dem äusseren Aehnlichkeitskreise der beiden Parallelen zusammen.

5) Für zwei Punkte ist die Linie gleicher Potenzen die in dem Halbirungspunkt ihrer Entfernung auf diese errichtete Senkrechte. Sie fällt also, nach §. 46., mit dem äusseren Aehnlichkeitskreise der beiden Punkte zusammen.

6) Für zwei gerade sich schneidende Linien ist die Linie gleicher Potenzen die Halbirungslinie des von ihnen gebildeten Winkels; es bestehen zwei Linien gleicher Potenzen, welche sich in dem Schneidungspunkt der gegebenen Geraden rechtwinkelig schneiden und (nach §. 50.) mit dem äusseren und inneren Aehnlichkeitskreise der gegebenen Geraden zusammenfallen.

§. 53.

Aehnliche Betrachtungen mit der Linie äquidifferenter Potenzen angestellt ergeben:

1) Für eine Gerade und einen Kreis oder eine Gerade und einen Punkt fällt die Linie äquidifferenter Potenzen unendlich weit weg.

2) Für zwei Gerade, sie mögen sich schneiden oder nicht, sowie für zwei Punkte, fällt die Linie äquidifferenter Potenzen mit der Linie gleicher Potenzen jedesmal zusammen.

### §. 54.

Für die Berührungspole ist folgender Satz von Wichtigkeit: Jede Aehnlichkeitsaxe ist die Linie gleicher Potenzen der zugehörigen conjugirten Berührungskreise.

Die Wahrheit desselben erhellet aus den §§. 13. und 14.

### §. 55.

Nunmehr können wir zur Auflösung sämmtlicher Berührungsaufgaben übergehen und uns fast bei jeder derselben Worte bedienen, welche für die Aufgaben bei der Berührung dreier Kriese in den §§. 19., 20., 25. und 26. gebraucht sind.

### §. 56.

Aufgabe. Es sind gegeben zwei Kreise 𝔐 und $M$ und eine gerade Linie $m'm''$ (Fig. 8.); man soll einen Kreis beschreiben, welcher die gegebenen Stücke gleichartig berührt, d. h. die gegebenen drei Stücke ausschliesst.

Auflösung. Man bestimme

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $aA$𝔄. Die äusseren Aehnlichkeitspunkte $A$ und 𝔄 ergeben sich nach §. 31.

2) Für zwei der gefundenen äusseren Aehnlichkeitspunkte, etwa für $a$ und 𝔄, suche man (nach §. 25. 2) und beziehungsweise §. 39.) die Halbmesser $a$𝔈$'$ und 𝔄𝔈$''$ der zugehörigen Aehnlichkeitskreise und beschreibe dieselben.

3) Schneiden sie sich, wie in Fig. 8., so ergiebt sich die äussere Axe $O'O''$ alsbald, und man suche zu einem der Schneidungspunkte $O$, und einem der gegebenen drei Stücke, etwa dem Kreise 𝔐, die Linie gleicher Potenzen, welche die äussere Aehnlichkeitsaxe in dem, zu dem Kreise 𝔐 gehörigen Berührungspole 𝔓 schneidet. Von diesem Berührungspole 𝔓 lege man an

den gegebenen Kreis 𝔐 die Tangenten 𝔓𝔅′ und 𝔓𝔅², so erhält man die zwei conjugirten Berührungspunkte des Kreises 𝔐.

4) Schneiden sich aber die äusseren Aehnlichkeitskreise nicht, so verfahre man nach §. 25. 3) und 4).

5) Schliesslich verfahre man ganz wie in §. 25. 5) und 6) und fälle zur Bestimmung der, der Linie $m'm''$ angehörigen, Berührungspunkte $b'$ und $b^2$ von den gefundenen Mittelpunkten $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ der conjugirten Kreise auf die Linie $m'm''$ die Senkrechten $\mathfrak{M}'b'$ und $\mathfrak{M}^2b^2$, weil der zu der Linie $m'm''$ gehörige Mittelpunkt unendlich weit entfernt liegt.

## §. 57.

Da nach §. 54. die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ (Fig. 8.) die Linie gleicher Potenzen der Berührungskreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ ist, so muss auch der Durchschnittspunkt $p$ der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ mit der gegebenen Linie $m'm''$ der zu dieser Linie gehörige Berührungspol sein.

Verbindet man daher $p$ mit $O_{,}$ (oder $O_{,,}$) und beschreibt mit $pO_{,}$ als Halbmesser aus $p$ einen Kreis, so schneidet derselbe die gegebene Linie $m'm''$ in den Punkten $b'$ und $b^2$, in welchen sie von den conjugirten Kreisen $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ berührt wird.

Hierdurch erhält man ein Paar conjugirte Berührungspunkte auf kürzerem Wege als dem in §. 56. unter 3) angegebenen, und wir wollen in der Folge von ihm Gebrauch machen.

Die Mittelpunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ der conjugirten Berührungskreise ergeben sich dann als Durchschnittspunkte der in den Berührungspunkten $b'$ und $b^2$ errichteten Senkrechten mit der äusseren Axe $O'O''$.

## §. 58.

Aufgabe. Es sind gegeben zwei Kreise 𝔐 und $M$ und eine gerade Linie $m'm''$ (Fig. 9.); man soll einen Kreis beschreiben, der die zwei Kreise gleichartig und die gegebene Linie ungleichartig berührt, d. h. der die gegebenen Kreise einschliesst und die gegebene Gerade ausschliesst.

Auflösung. Man bestimme:

1) die der gegebenen Linie zugehörige innere Aehnlichkeitsaxe und es genügt die Bestimmung der inneren

Aehnlichkeitspunkte $\mathfrak{J}$ und $J$, welche sich nach §. 31. ergeben.

2) Zu denselben suche man, nach §. 40., die Halbmesser $J\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{B}'''$ der zugehörigen inneren Aehnlichkeitskreise $J$ und $\mathfrak{J}$, bestimme

3) für letztere die Linie äquidifferenter Potenzen, d. i. die innere Axe $Q'Q''$ und beschreibe aus ihrem Hauptpunkte $Q$ mit $Q\mathfrak{B}''$ $(=Q\mathfrak{B}''')$ den Hauptkreis $Q$ der inneren Axe.

4) An diesen Hauptkreis $Q$ lege man von dem Durchschnittspunkt $p'$ der inneren Aehnlichkeitsaxe $J\mathfrak{J}$ mit der gegebenen Linie, d. i. von dem Berührungspol der gegebenen Linie (§. 57.), eine Tangente und beschreibe mit ihr als Halbmesser aus $p$ als Mittelpunkt einen Kreis, so schneidet derselbe die gegebene Linie in den beiden Punkten $b^3$ und $b^4$, welches die Berührungspunkte für zwei Kreise sind, die beide der Aufgabe Genüge leisten.

5) Die Mittelpunkte $\mathfrak{M}^3$ und $\mathfrak{M}^4$ derselben, sowie die übrigen Berührungspunkte, ergeben sich dann ganz auf bereits erörterte Weise.

### §. 59.

Wären zwei Kreise $\mathfrak{M}$ und $M$ und eine gerade Linie $m'm''$ gegeben und die Aufgabe gestellt: einen Kreis zu beschreiben, der den Kreis $M$ und die gerade Linie $m'm''$ gleichartig und den Kreis $\mathfrak{M}$ ungleichartig — oder den Kreis $\mathfrak{M}$ und die gerade Linie $m'm''$ gleichartig und den Kreis $M$ ungleichartig berühre; so hätte man ganz in derselben Weise wie in §. 58. zu verfahren, nur im ersteren Falle die zu dem Kreise $\mathfrak{M}$ gehörige innere Aehnlichkeitsaxe $Ji$ und im letzteren die zu dem Kreise $M$ gehörige innere Aehnlichkeitsaxe $i\mathfrak{J}$ zu bestimmen etc.

### §. 60.

**Aufgabe.** Es sind gegeben: zwei Parallellinien $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $M'M''$ und ein Kreis $m$ (Fig. 10.); man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Stücke gleichartig berührt, d. h. sie sämmtlich ausschliesst.

**Auflösung.** Man bestimme

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$. Die Richtung des Aehnlichkeitspunktes $a$ ergiebt sich (nach §. 34.) durch

die, von dem Mittelpunkt $m$ des gegebenen Kreises auf die Parallelen gefällte Senkrechte, in welcher sich auch (nach §. 31.) die beiden anderen Punkte $A$ und 𝔄 ergeben. Es genügt jedoch die Bestimmung von nur zwei äusseren Aehnlichkeitspunkten, etwa der Punkte $a$ und 𝔄.

2) Zu denselben bestimme man die äusseren Aehnlichkeitskreise. Ersterer ergiebt sich nach den §§. 45. und 52. 4) als Linie $a'a''$ alsbald; der Halbmesser 𝔄𝔄″ des letzteren findet sich nach §. 39.

3) Bei vorliegender Figur schneiden sich beide in den Punkten $O_{,}$ und $O_{,,}$ und der äussere Aehnlichkeitskreis $a'a''$ erscheint zugleich als äussere Axe $O'O''$.

4) Der Durchschnittspunkt der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a$𝔄 mit der Linie 𝔐′𝔐″ bestimmt den Berührungspol 𝔓 für diese Linie. (§. 57.) Man verbinde denselben mit einem der Schneidungspunkte $O_{,}$ (oder $O_{,,}$) und beschreibe mit 𝔓$O_{,}$ als Halbmesser aus 𝔓 einen Kreis, welcher die Gerade 𝔐′𝔐″ in den Punkten 𝔅′ und 𝔅² schneidet, so sind diese zwei conjugirte Berührungspunkte zweier Kreise, welche beide der Aufgabe genügen.

5) Die von den Berührungspunkten 𝔅′ und 𝔅² auf die Axe $O'O''$ gefällten Senkrechten ergeben als Durchschnittspunkte mit derselben die Mittelpunkte der conjugirten Kreise 𝔐′ und 𝔐²; u. s. w.

§. 61.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Parallellinien 𝔐′𝔐″ und $M'M''$ und ein Kreis $m$ (Fig. 11.); man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Geraden gleichartig und den Kreis ungleichartig berührt, d. h. die ersteren ausschliesst und den letzteren einschliesst.

Auflösung. Man bestimme

1) die dem gegebenen Kreise $m$ zugehörige innere Aehnlichkeitsaxe $a$𝔍$J$. Der Punkt $a$ findet sich nach §. 34. und die Punkte 𝔍 und $J$ nach §. 31.

2) Zu letzteren suche man, nach §. 40., die Halbmesser $J$𝔅″ und 𝔍𝔅‴ der zugehörigen inneren Aehnlichkeitskreise $J$ und 𝔍, beschreibe diese Kreise und bestimme

3) deren Linie äquidifferenter Potenzen, d. i. die innere Axe

$Q'Q''$. Aus dem Hauptpunkte $Q$ derselben beschreibe man den Hauptkreis der inneren Axe mit dem Halbmesser $Q\mathfrak{B}''$ ($=Q\mathfrak{B}'''$).

4) Der Durchschnittspunkt $\mathfrak{P}^I$ der inneren Aehnlichkeitsaxe $\mathfrak{J}J$ mit der Linie $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ ist der Berührungspol dieser Linie (§. 58. 4)) und man verfahre nunmehr ganz auf bereits erörterte Weise, indem man von dem Berührungspol an den Hauptkreis eine Tangente legt, u. s. w.

## §. 62.

Es ist augenblicklich auffallend, dass in §. 61. (Fig. 11.) die innere Axe $Q'Q''$ mit der zu den gegebenen Parallelen $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $M'M''$ gehörigen äusseren Axe $O'O''$, §. 60. (Fig. 10.), oder mit dem äusseren Aehnlichkeitskreise $a'a''$ identisch ist. Der Grund hierfür ist folgender:

In §. 14. sind zur Bestimmung der Linie gleicher Potenzen der Kreise $p'$, $\mathfrak{P}'$, $P'$ nur zwei Kreise, nämlich die inneren Aehnlichkeitskreise $J$ und $\mathfrak{J}$, in Betracht gezogen worden, und es wurde nachgewiesen, dass die Linie gleicher Potenzen jener drei Kreise zugleich die Linie äquidifferenter Potenzen dieser zwei Kreise sei. Die innere Aehnlichkeitsaxe $aJ\mathfrak{J}$ wird aber, wie die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$ durch drei Punkte markirt, und so wie man zur Bestimmung der äusseren Axe willkührlich zwei von den drei äusseren Aehnlichkeitskreisen wählen kann, so können auch zur Bestimmung der inneren Axe von den drei Aehnlichkeitskreisen $a$, $J$ und $\mathfrak{J}$ willkührlich zwei gewählt werden [der Einfachheit wegen wurden bisher immer die inneren Aehnlichkeitskreise $J$ und $\mathfrak{J}$ und aus ihnen die innere Axe bestimmt]; denn es lässt sich nachweisen, dass die Linie äquidifferenter Potenzen der Kreise $J$ und $\mathfrak{J}$ zugleich eine Linie ist, welche, wenn man aus irgend einem ihrer Punkte eine Tangente an den äusseren Aehnlichkeitskreis $a$ legt und damit als Halbmesser einen Kreis beschreibt, also den äusseren Aehnlichkeitskreis $a$ rechtwinkelig schneidet, durch diesen Kreis zugleich die Peripherien beider inneren Aehnlichkeitskreise $J$ und $\mathfrak{J}$ halbirt werden.

In vorliegendem Falle (Fig. 11.) muss daher auch der äussere Aehnlichkeitskreis $a'a''$, welcher eine gerade Linie ist, von dem Kreise zum Halbmesser $Q\mathfrak{B}''$ ($=Q\mathfrak{B}'''$), welcher die Peripherien der Kreise $J$ und $\mathfrak{J}$ halbirt, rechtwinkelig geschnitten werden. Dies geschieht aber nur, wenn $Q$ selbst ein Punkt dieser Geraden $a'a''$ ist.

### §. 63.

Da die innere Axe $Q'Q''$ (Fig. 11.) mit dem äusseren Aehnlichkeitskreise $a'a''$ zusammenfällt, sich daher der Hauptpunkt $Q$ der inneren Axe alsbald als Durchschnittspunkt des äusseren Aehnlichkeitskreises $a'a''$ mit der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}\mathfrak{I}$ ergiebt, so erleidet hierdurch die in §. 61. gegebene Auflösung eine Abkürzung. Es genügt nämlich nur für einen inneren Aehnlichkeitskreis $J(\mathfrak{I})$ den Halbmesser zu bestimmen. Derselbe ist dann in dem inneren Aehnlichkeitspunkt $J(\mathfrak{I})$ auf die innere Aehnlichkeitsaxe senkrecht zu errichten und der Endpunkt $\mathfrak{B}''$ ($\mathfrak{B}'''$) desselben mit dem Hauptpunkte $Q$ der inneren Axe durch eine Gerade zu verbinden. Letztere ist dann der Halbmesser des Hauptkreises der inneren Axe.

### §. 64.

Für die gegebenen Stücke der §§. 60. und 61. (Fig. 10. u. 11.) fällt der innere Aehnlichkeitspunkt $i$ der beiden Geraden $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $M'M''$ mit den Hauptpunkten $O$ und $Q$ der äusseren und inneren Axe zusammen (§. 34.) und es fallen die vier Aehnlichkeitsaxen $a\mathfrak{A}A$, $aJ\mathfrak{I}$, $\mathfrak{A}Ji$, $A\mathfrak{I}i$ in eine und dieselbe Richtung. Offenbar sind daher die Aufgaben der §§. 60. und 61. mit der Aufgabe: einen Kreis zu beschreiben, welcher drei Kreise berührt, deren Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen (§. 19. und 20.), von derselben Gattung.

Da nun nach §. 48. der innere Aehnlichkeitskreis $i$ unendlich gross ist, so fallen auch für die inneren Aehnlichkeitsaxen $\mathfrak{A}Ji$ und $A\mathfrak{I}i$ die zugehörigen inneren Axen unendlich weit weg und mit ihnen zwei Paar conjugirte Berührungskreise, so dass für zwei Parallelen und einen Kreis nur zwei Paar conjugirte Berührungskreise existiren.

Es geht hieraus hervor, dass die Existenz der Berührungskreise nicht von der der Aehnlichkeitsaxen allein abhängig ist.

### §. 65.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei sich schneidende gerade Linien $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $M'M''$ und ein Kreis $m$ (Fig. 12.); man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Stücke gleichartig berührt, d. h. sie sämmtlich ausschliesst.

Auflösung. Man bestimme

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$. Die Punkte $\mathfrak{A}$ und $A$ ergeben sich nach §. 31. Es genügt jedoch die Bestimmung nur eines dieser Punkte, etwa des Punktes $\mathfrak{A}$. Ist derselbe gefunden, so ziehe man durch ihn eine Gerade, welche mit derjenigen Linie parallel läuft, welche den Nebenwinkel des von den gegebenen geraden Linien gebildeten Winkels halbirt, so ist die so gezogene Gerade die äussere Aehnlichkeitsaxe, in welcher der äussere Aehnlichkeitspunkt $a$ beiderseits unendlich weit entfernt liegt. (§. 36.)

2) Zu den äusseren Aehnlichkeitspunkten $a$ und $\mathfrak{A}$ bestimme man die Aehnlichkeitskreise. Ersterer findet sich (nach §. 50.) als die den Winkel, welchen die gegebenen Geraden bilden, halbirende Linie $a'a''$, letzterer ergiebt sich nach §. 39.

3) Beide Aehnlichkeitskreise schneiden sich [bei vorliegender Figur] in den Punkten $O_{,}$ und $O_{,,}$ und der äussere Aehnlichkeitskreis ergiebt sich zugleich als äussere Axe $O'O''$.

4) Man verfahre im Uebrigen ganz wie in §. 60.

## §. 66.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei sich schneidende gerade Linien $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $M'M''$ und ein Kreis $m$ (Fig. 13.); man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Geraden gleichartig und den Kreis ungleichartig berührt, d. h. die ersteren ausschliesst und den letzteren einschliesst.

Auflösung. Man bestimme

1) die dem gegebenen Kreise $m$ zugehörige innere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}J$. Die inneren Aehnlichkeitspunkte $\mathfrak{J}$ und $J$ ergeben sich nach §. 31. Zur Bestimmung der Linie $a\mathfrak{J}J$ würde indessen nur ein innerer Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{J}$ oder $J$ genügen, denn, hat man einen solchen gefunden und man legt durch ihn eine Gerade, die mit derjenigen geraden Linie parallel läuft, welche den Nebenwinkel des von den gegebenen geraden Linien gebildeten Winkels halbirt, so ist die so gezogene Linie die verlangte innere Aehnlichkeitsaxe, in welcher der äussere Aehnlichkeitspunkt $a$ beiderseits unendlich weit entfernt liegt. (§. 36.)

2) Zu den Punkten $J$ und $\mathfrak{J}$ bestimme man die Halbmesser $J\mathfrak{B}''$ und $\mathfrak{J}\mathfrak{B}'''$ der inneren Aehnlichkeitskreise, beschreibe dieselben und suche

3) zu beiden die Linie äquidifferenter Potenzen, d. i. die innere Axe $Q'Q''$. Aus dem Hauptpunkte $Q$ derselben beschreibe man den Hauptkreis der inneren Axe und verfahre im Uebrigen ganz wie in §. 61.

§. 67.

Auch für die innere Axe $Q'Q''$ (Fig. 13.) ist das von der inneren Axe $Q'Q''$ (Fig. 11.) in §. 62. Gesagte gültig, und die Aufgabe §. 66. erleidet hiernach ebenfalls eine Abkürzung, indem man nur den Halbmesser e i n e s inneren Aehnlichkeitskreises zu bestimmen und überhaupt ganz nach §. 63. zu verfahren braucht.

§. 68.

Für die gegebenen Stücke der §§. 65. und 66. (Fig. 12. und Fig. 13.) fällt der innere Aehnlichkeitspunkt $i$ in der Richtung der Linie $a'a''$ beiderseits unendlich weit weg (§. 36.) und der innere Aehnlichkeitskreis $i$ mit der Halbirungslinie des Nebenwinkels des von den gegebenen geraden Linien gebildeten Winkels zusammen (§. 51.). Da nun (nach §. 53. 1)) für eine Gerade und einen Kreis die Linie äquidifferenter Potenzen unendlich weit wegfällt, so ist auch die Bestimmung der zu den inneren Aehnlichkeitsaxen $\mathfrak{A}Ji$ und $A\mathfrak{J}i$ gehörigen inneren Axen in vorliegendem Falle unmöglich, d. h. es existiren hierfür nur zwei Paar conjugirte Berührungskreise

§. 69.

Für die nachfolgenden Aufgaben, §. 70. und 71., ist von besonderer Wichtigkeit, dass für zwei gerade Linien die zugehörige äussere und innere Axe ohne die respektiven Aehnlichkeitsaxen bestimmt werden können, da sie, nach den §§. 65. 3) und 66. 3), mit den äusseren und inneren Aehnlichkeitskreisen zusammenfallen und diese, nach §. 52. 6), mit der, zu den gegebenen Geraden gehörigen Linie gleicher Potenzen identisch sind. Ferner ist noch von Wichtigkeit, dass, weil für zwei gerade Linien äusserer und innerer Aehnlichkeitspunkt sich durch kein Merkmal unterscheiden, auch eine eigentliche Verschiedenheit zwischen der äusseren und den inneren Aehnlichkeitsaxen für den Fall, dass die drei gegebenen Stücke gerade Linien seien, wegfallen müsse

und daher ein besonderer Constructionsunterschied für gleichartige und ungleichartige Berührung nicht stattfinden könne.

## §. 70.

Aufgabe. Es sind gegeben drei gerade Linien, $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$, $M'M''$, $m'm''$ (Fig. 14.); man soll die zwei conjugirten Kreise beschreiben, welche sich auf die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$ beziehen.

Auflösung. Da die äusseren Aehnlichkeitspunkte sämmtlich unendlich weit wegfallen, so ist dies auch mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe der Fall. Die drei Aehnlichkeitskreise ergeben sich als die Halbirungslinien der von den gegebenen Geraden gebildeten Winkel. Es genügt indessen die Bestimmung von nur zwei Aehnlichkeitskreisen, etwa $a'a''$ und $A'A''$.

Da nach §. 65. 3) der zu zwei gegebenen Geraden gehörige äussere Aehnlichkeitskreis $a'a''$ zugleich die äussere Axe für die drei gegebenen Stücke ist, so muss dies auch mit dem Aehnlichkeitskreise $A'A''$ der Fall sein, etc.; und es ist daher klar, dass sich für drei gegebene Geraden auch drei äussere Axen ergeben, die sich in dem gemeinschaftlichen Punkte $O_,$ schneiden.

Nach §. 57. ist, wenn sich eine Gerade unter den drei gegebenen Stücken befindet, ihr Durchschnittspunkt mit der betreffenden Aehnlichkeitsaxe ihr Berührungspol, die Berührungspolare fällt mit der Geraden zusammen und der aus dem Berührungspol beschriebene Kreis, welcher durch den Durchschnittspunkt der Aehnlichkeitskreise geht, schneidet die gegebene Gerade rechtwinkelig. Da aber in vorliegendem Falle die Aehnlichkeitsaxe unendlich weit entfernt liegt, so liegen auch die bezüglichen Berührungspole $\mathfrak{P}$, $P$, $p$ in unendlicher Entfernung, d. h. die Halbmesser $\mathfrak{P}O_,$, $PO_,$, $pO_,$ sind unendlich gross und daher sind die mit ihnen beschriebene Bogen gerade, durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt $O_,$ gehende und auf den bezüglichen Geraden senkrecht stehende Linien.

Fällt man daher von $O_,$ auf jede gegebene Gerade eine Senkrechte, so ergeben sich als Durchschnittspunkte die Berührungspunkte $\mathfrak{B}'$, $B'$, $b'$ und $O_,$ selbst als Mittelpunkt eines Kreises, welcher die gegebenen Geraden sämmtlich berührt.

Gleichzeitig ergiebt sich, dass die bezüglichen Berührungspunkte $\mathfrak{B}^2$, $B^2$, $b^2$ unendlich weit wegfallen. Es existirt daher für die äussere Aehnlichkeitsaxe dreier gegebener gerader Linien kein Paar conjugirter Kreise, sondern nur ein Kreis, der sie von innen berührt.

§. 71.

Aufgabe. Es sind gegeben drei gerade Linien, 𝔐'𝔐'', *M'M''*, *m'm''* (Fig. 15.); man soll die zwei conjugirten Kreise beschreiben, welche sich auf die (etwa der Linie *m'm''* zugehörige) innere Aehnlichkeitsaxe *a*𝔍ℑ beziehen.

Auflösung. Man bestimme die zwei inneren Aehnlichkeitsaxen *J'J''*, ℑ'ℑ'', so ist ihr Durchschnittspunkt *Q* der Mittelpunkt eines Kreises, welcher die drei Geraden berührt. Die Berührungspunkte 𝔅³, *B*³, *b*³ ergeben sich ganz wie im vorigen Paragraphen die Punkte 𝔅', *B'*, *b'*, und ebenso ergiebt sich, dass für die Aehnlichkeitsaxe *aJ*ℑ kein Paar conjugirter Kreise, sondern nur ein Kreis existirt, der die gegebenen Geraden von aussen berührt.

§. 72.

Letzteres ergiebt sich auch für die den Linien 𝔐'𝔐'' und *M'M''* zugehörigen inneren Axen 𝔄*Ji* und *A*ℑ*i*, und es folgt (aus den §§. 70. und 71.), dass der Unterschied zwischen gleichartiger und ungleichartiger Berührung dreier Geraden sich auf eine Berührung von innen und von aussen erstrecke, sowie dass im Ganzen vier Berührungskreise möglich seien, nämlich für jede Aehnlichkeitsaxe ein Berührungskreis.

§. 73.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Kreise 𝔐 und *M* und ausserhalb derselben ein Punkt *m* (Fig. 16.); man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Kreise gleichartig berührt und durch den gegebenen Punkt geht.

Auflösung. Man bestimme

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe *a*𝔄*A*. Da nach §. 32. die äusseren Aehnlichkeitspunkte 𝔄 und *A* mit dem gegebenen Punkte *m* zusammenfallen, so verbinde man, wenn der äussere Aehnlichkeitspunkt *a* bestimmt ist, denselben mit dem gegebenen Punkte *m*. Die gerade Verbindungslinie beider ist die verlangte äussere Aehnlichkeitsaxe.
2) Der äussere Aehnlichkeitskreis *a* ergiebt sich auf bereits erörterte Weise (§. 25. 2)). Jeder der äusseren Aehnlichkeitskreise 𝔄 und *A* fällt, nach §. 42., mit dem gegebenen Punkte *m* zusammen. Man suche daher

3) zu dem äusseren Aehnlichkeitskreise $a$ und dem gegebenen Punkte $m$ die Linie gleicher Potenzen $O'O''$, d. i. die äussere Axe, lege von ihrem Hauptpunkte $O$ an einen der Aehnlichkeitskreise eine Tangente und beschreibe mit derselben als Halbmesser, also in vorliegender Aufgabe am einfachsten mit der Entfernung $Om$, den Hauptkreis $O$ der äusseren Axe.

4) Zu diesem Hauptkreise und einem der gegebenen Kreise, etwa dem Kreise $\mathfrak{M}$, suche man die Linie gleicher Potenzen, beziehungsweise deren Durchschnitt $\mathfrak{P}$ mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe; so erhält man den Berührungspol $\mathfrak{P}$ für diesen Kreis $\mathfrak{M}$, und die von diesem Pol an den Kreis $\mathfrak{M}$ gelegten Tangenten bestimmen dann zwei conjugirte Berührungspunkte $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{B}^2$.

5) Im Uebrigen verfahre man weiter wie in §. 25. 5) etc. Die Berührungspunkte $b'$ und $b^2$ daselbst fallen hier mit dem gegebenen Punkte $m$ zusammen.

## §. 74.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Kreise $\mathfrak{M}$ und $M$ und ausserhalb derselben ein Punkt $m$ (Fig. 17.); man soll einen Kreis beschreiben, der die gegebenen Kreise ungleichartig berührt und durch den gegebenen Punkt geht.

Auflösung. Man bestimme

1) die zu einem der ungleichartig zu berührenden Kreise, etwa dem Kreise $\mathfrak{M}$, gehörige innere Aehnlichkeitsaxe $\mathfrak{A}Ji$. Nach §. 32. fallen hier der äussere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{A}$ und der innere Aehnlichkeitspunkt $J$ mit dem gegebenen Punkte $m$ zusammen. Man verbinde daher, wenn der innere Aehnlichkeitspunkt $i$ bestimmt ist, denselben mit dem gegebenen Punkte $m$, so ist die gerade Verbindungslinie beider die verlangte innere Axe.

2) Der Halbmesser $i\mathfrak{B}'$ des inneren Aehnlichkeitskreises $i$ ergiebt sich auf bereits erörterte Weise, §. 26. 2), und der Aehnlichkeitskreis $J$ fällt, nach §. 42., mit dem gegebenen Punkte $m$ zusammen. Man suche daher

3) zu dem inneren Aehnlichkeitskreise $i$ und dem gegebenen Punkte $m$ die Linie äquidifferenter Potenzen $Q'Q''$, d. i. die innere Axe, und beschreibe aus ihrem Hauptpunkte $Q$ mit $Q\mathfrak{B}'$ $(=Qm)$ [siehe §. 26. 3)] den Hauptkreis $Q$ der inneren Axe.

4) Zu diesem Hauptkreise und einem der gegebenen Kreise, etwa dem Kreise 𝔐, bestimme man die Linie gleicher Potenzen, beziehungsweise deren Durchschnittspunkt 𝔓′ mit der inneren Aehnlichkeitsaxe *Ji*, so ist derselbe der Berührungspol 𝔓′ für diesen Kreis 𝔐. Die von diesem Pol an den Kreis 𝔐 gelegten Tangenten bestimmen dann zwei conjugirte Berührungspunkte $\mathfrak{B}^3$ und $\mathfrak{B}^4$.

5) Man verfahre weiter nach §. 26. 5) etc. und es ist noch zu bemerken, dass die Berührungspunkte $b^3$ und $b^4$ mit dem gegebenen Punkte *m* zusammen fallen.

§. 75.

Bei den gegebenen Stücken der §§. 73. und 74. fällt ausser den Punkten 𝔄, *A* und *J* auch noch der innere Aehnlichkeitspunkt 𝔍 mit dem gegebenen Punkte *m* zusammen, d. h. es ist die äussere Aehnlichkeitsaxe *a*𝔄*A* mit der inneren *aJ*𝔍, und ebenso die innere 𝔄*Ji* mit der inneren *A*𝔍*i* identisch; es existiren also für die gegebenen Stücke nur zwei Aehnlichkeitsaxen, der Gleichheit der Aehnlichkeitskreise 𝔄, *A*, *J* und 𝔍 wegen nur zwei Axen und zwei Paar conjugirte Berührungskreise.

§. 76.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Punkte 𝔐 und *m* und ein Kreis *M* (Fig. 18.); man soll einen Kreis beschreiben, der durch die beiden gegebenen Punkte geht und den gegebenen Kreis berührt.

Auflösung. Man bestimme

1) die zu den gegebenen drei Stücken gehörige äussere Aehnlichkeitsaxe *a*𝔄*A*. Nach §. 32. fällt der äussere Aehnlichkeitspunkt *a* mit dem Punkte 𝔐 und der äussere Aehnlichkeitspunkt 𝔄 mit dem Punkte *m* zusammen, dagegen fällt, nach §. 35., der zu den gegebenen Punkten gehörige äussere Aehnlichkeitspunkt *A* in der Richtung 𝔐*m* der beiden Punkte beiderseits unendlich weit weg. Die gerade Verbindungslinie 𝔐*m* der beiden gegebenen Punkte ist daher die äussere Aehnlichkeitsaxe.

2) Die äusseren Aehnlichkeitskreise *a* und 𝔄 fallen, nach §. 43., mit den gegebenen Punkten 𝔐 und *m* zusammen. Daher ergiebt sich

3) nach §. 52. 5) die Linie gleicher Potenzen der äusseren

Aehnlichkeitskreise $a$ und $\mathfrak{A}$ (oder der Punkte $\mathfrak{M}$ und $m$) als die, die Entfernung $\mathfrak{M}m$ halbirende und auf ihr senkrecht stehende Linie $O'O''$, d. i. die äussere Axe. Aus dem Hauptpunkte $O$ derselben beschreibe man mit einem Halbmesser $O\mathfrak{M}$ ($= Om$) den Hauptkreis der äusseren Axe und bestimme

4) zu ihm und dem gegebenen Kreise $M$ die Linie gleicher Potenzen, welche die Aehnlichkeitsaxe $\mathfrak{M}m$ in dem Berührungspole $P$ schneidet. Die aus demselben an den Kreis $M$ gelegten Tangenten bestimmen die conjugirten Berührungspunkte $B'$ und $B^2$ und die geraden Verbindungslinien jedes derselben mit dem Mittelpunkte $M$ des gegebenen Kreises ergeben als Durchschnittspunkte mit der äusseren Axe die Mittelpunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ zweier Kreise, welche beide der Aufgabe genügen.

Bemerkenswerth ist noch, dass die Berührungspole $\mathfrak{P}$ und $p$, sowie die Berührungspolaren $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}^2$ und $b'b^2$ mit den bezüglichen Punkten $\mathfrak{M}$ und $m$ zusammenfallen.

## §. 77.

Für die in §. 76. gegebenen Stücke fällt nach §. 32. auch der innere Aehnlichkeitspunkt $i$ mit dem gegebenen Punkt $\mathfrak{M}$ und der innere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{I}$ mit dem gegebenen Punkte $m$ zusammen, daher ist auch die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$ mit der inneren $A\mathfrak{I}i$ identisch. Aber auch die inneren Aehnlichkeitskreise $i$ und $\mathfrak{I}$ fallen (wie die äusseren $a$ und $\mathfrak{A}$), nach §. 43., mit den gegebenen Punkten $\mathfrak{M}$ und $m$ zusammen; da nun, nach §. 53. 2), auch die Linie äquidifferenter Potenzen zweier Punkte mit ihrer Linie gleicher Potenzen zusammenfällt, so ist auch die zur inneren Aehnlichkeitsaxe $A\mathfrak{I}i$ gehörige innere Axe mit der äusseren identisch.

Für die inneren Aehnlichkeitsaxen $aJ\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{A}Ji$, beziehungsweise ihre zugehörigen inneren Axen, ergiebt sich folgende Betrachtung:

Nach §. 35. fällt der innere Aehnlichkeitspunkt $J$ mit dem, die gerade Verbindungslinie der gegebenen Punkte halbirenden Punkte $O$ zusammen; dagegen ist der innere Aehnlichkeitskreis $J$, nach §. 49., der durch $\mathfrak{M}$ und $m$ (resp. $i$ und $\mathfrak{I}$) gehende Kreis, für welchen diese beiden Punkte Endpunkte des Durchmessers sind. Es ergiebt sich daher, weil der Aehnlichkeitskreis $i$ (und $\mathfrak{I}$) ein Endpunkt des Durchmessers des Aehnlichkeitskreises $J$ ist,

für beide Aehnlichkeitskreise $i$ und $J$ ($i$ und $\mathfrak{J}$) die Linie äquidifferenter Potenzen als die durch den Mittelpunkt des Kreises $J$ gehende und auf dem Durchmesser $i\mathfrak{J}$ senkrecht stehende, also ebenfalls als eine mit der äusseren Axe identische Linie.

Hieraus folgt, dass für die gegebenen Stücke die äussere Axe mit den drei inneren Axen zusammenfalle und nur ein Paar conjugirte Berührungskreise bestehen.

§. 78.

Aus den §§. 76. und 77. folgt noch, dass, wenn sich unter den drei gegebenen Stücken zwei Punkte befinden, sich die äussere (und innere Axe) alsbald als äusserer Aehnlichkeitskreis der beiden Punkte, nämlich als die in dem Halbirungspunkt ihrer geraden Verbindungslinie auf sie senkrecht errichtete gerade Linie ergiebt.

§. 79.

Aufgabe. Es sind gegeben: drei Punkte $\mathfrak{M}$, $M$, $m$ (Fig. 19.); man soll einen Kreis beschreiben, der durch die drei Punkte geht.

Auflösung. Man bestimme

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$. Dieselbe fällt, weil nach §. 35. der äussere Aehnlichkeitspunkt zweier gegebenen Punkte unendlich weit wegfällt, selbst unendlich weit weg.

2) Die äusseren Aehnlichkeitskreise $a'a''$, $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}''$, $A'A''$ ergeben sich, nach §. 46., als auf den bezüglichen Verbindungslinien $M\mathfrak{M}$, $Mm$, $\mathfrak{M}m$ der gegebenen Punkte in ihren Halbirungspunkten senkrecht errichtete gerade Linien und schneiden sich, nach §. 11. 2), in einem gemeinschaftlichen Punkte $O_{,}$.

3) Zu diesem Schneidungspunkte $O_{,}$ und einem der gegebenen Punkte, etwa $M$, suche man die Linie gleicher Potenzen, so ist deren Durchschnitt mit der äusseren Aehnlichkeitsaxe der Berührungspol $P$ für den gegebenen Punkt $M$. Da aber die äussere Aehnlichkeitsaxe unendlich weit wegfällt, so ist dies auch mit dem Berührungspole $P$ der Fall, und die von ihm an den Punkt $M$ gelegte Tangente $PM$ ergiebt sich als mit der für $M$ und $O_{,}$ gezogenen Linie gleicher Potenzen parallele Linie. Errichtet man nun auf diesen unendlich grossen Halbmesser

*PM* in *M* eine Senkrechte, so findet sich der Durchschnitt $O_1$ selbst als Mittelpunkt des zu suchenden Kreises und, weil die Berührungspolare $B'B^2$ hier mit dem gegebenen Punkte *M* zusammenfällt, so vereinigen sich die conjugirten Kreise $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ in einen Kreis $O_1$.

## §. 80.

Aehnlich hätte die Aufgabe §. 79. durch Bestimmung einer inneren Aehnlichkeitsaxe und unter Anwendung des für ungleichartige Berührung beobachteten Verfahrens aufgelöst werden können, und man hätte ganz dasselbe Resultat gefunden, so dass für drei gegebene Punkte die vier Paar conjugirten Berührungskreise in einen einzigen Berührungskreis zusammenfallen.

## §. 81.

Es ergiebt sich daher für die Aufgabe §. 79. die kurze Auflösung: man halbire zwei gerade Verbindungslinien der drei gegebenen Punkte, errichte in den Halbirungspunkten auf die bezüglichen Linien Senkrechte, so ist der Durchschnittspunkt dieser der Mittelpunkt und die gerade Verbindung desselben mit jedem der gegebenen Punkte ein Halbmesser des verlangten Kreises.

## §. 82.

**Aufgabe.** Es sind gegeben: ein Kreis *M*, ein Punkt $\mathfrak{M}$ und eine gerade Linie *m'm''* (Fig. 20.); man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis und die gerade Linie gleichartig berührt, d. h. beide ausschliesst, und durch den gegebenen Punkt geht.

**Auflösung.** Man bestimme

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$. Die Punkte *a* und *A* fallen, nach den §§. 32. und 33., mit dem gegebenen Punkte $\mathfrak{M}$ zusammen, der Punkt $\mathfrak{A}$ ergiebt sich nach §. 31.

2) Der Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{A}$ ergiebt sich nach §. 25. 2) und die Aehnlichkeitskreise *a* und *A* fallen, nach den §§. 42. und 43., mit dem gegebenen Punkte $\mathfrak{M}$ zusammen.

3) Zu dem Aehnlichkeitskreise $\mathfrak{A}$ und dem Punkte $\mathfrak{M}$ bestimme man die Linie gleicher Potenzen, d. i. die äussere Axe *O'O''*, lege von ihrem Hauptpunkte *O* eine Tangente an einen der Aehnlichkeitskreise und beschreibe mit derselben als Halbmesser, also in vorliegender Auf-

gabe am einfachsten mit der Entfernung $O\mathfrak{M}$ den Hauptkreis $O$ der äusseren Axe.

4) Nach §. 57. ist der Durchschnittspunkt $p$ der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}$ mit der gegebenen geraden Linie $m'm''$ der Berührungspol für diese Linie; daher lege man von diesem Pol $p$ an den gezogenen Hauptkreis $O$ eine Tangente und beschreibe mit derselben einen Halbkreis, welcher die Gerade $m'm''$ in den Punkten $b'$ und $b^2$ schneidet.

Diese Punkte sind die conjugirten Berührungspunkte der gegebenen geraden Linie und die Durchschnittspunkte $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}^2$ der in ihnen auf die Gerade errichteten Senkrechten mit der äusseren Axe $O'O''$ bestimmen die Mittelpunkte zweier Kreise, welche beide der Aufgabe genügen; u. s. w.

§. 83.

Aufgabe. Es sind gegeben: ein Kreis $M$, ein Punkt $\mathfrak{M}$ und eine gerade Linie $m'm''$ (Fig. 21.); man soll einen Kreis beschreiben, der den gegebenen Kreis und die gerade Linie ungleichartig berührt, d. h. den gegebenen Kreis einschliesst und die gerade Linie ausschliesst, und durch den gegebenen Punkt geht.

Auflösung. Man bestimme

1) die der gegebenen Linie $m'm''$ zugehörige innere Aehnlichkeitsaxe $aJ\mathfrak{J}$. Die Punkte $a$ und $J$ fallen, nach §. 32. und §. 33., mit dem gegebenen Punkte $\mathfrak{M}$ zusammen und der Punkt $\mathfrak{J}$ ergiebt sich nach §. 31.

2) Der Aehnlichkeitskreis $\mathfrak{J}$ ergiebt sich nach §. 40. und der Aehnlichkeitskreis $J$ fällt nach §. 43. mit dem gegebenen Punkte $\mathfrak{M}$ zusammen.

3) Zu beiden bestimme man die Linie äquidifferenter Potenzen, d. i. die innere Axe $Q'Q''$, und beschreibe aus ihrem Hauptpunkte $Q$ mit $Q\mathfrak{M}$ $(= Q\mathfrak{B}'')$ [§. 26. 2)] den Hauptkreis $Q$ der inneren Axe.

4) Nach §. 57. ist der Durchschnittspunkt $p'$ der inneren Aehnlichkeitsaxe $J\mathfrak{J}$ mit der gegebenen geraden Linie $m'm''$ der Berührungspol für diese Linie; daher lege man von diesem Pol $p'$ an den gezogenen Hauptkreis $Q$ eine Tangente, beschreibe mit derselben zur Bestimmung der conjugirten Berührungspunkte $b^3$ und $b^4$ einen Halbkreis und verfahre zur Bestimmung der Mittelpunkte $\mathfrak{M}^3$ und

$\mathfrak{M}^4$ der beiden conjugirten Berührungspunkte u. s. w. ganz auf bereits erörterte Weise.

§. 84.

Bei den gegebenen Stücken der §§. 82. und 83. fällt ausser den Punkten $A$, $a$ und $J$ auch noch der zu dem gegebenen Kreise $M$ und dem gegebenen Punkte $\mathfrak{M}$ gehörige innere Aehnlichkeitspunkt $i$ mit dem gegebenen Punkte $\mathfrak{M}$ zusammen, d. h. es ist die äussere Aehnlichkeitsaxe $aA\mathfrak{A}$ mit der inneren $\mathfrak{A}Ji$, und ebenso die innere $aJ\mathfrak{J}$ mit der inneren $A\mathfrak{J}i$ identisch; es existiren also für die gegebenen Stücke nur zwei Aehnlichkeitsaxen, und der Gleichheit der Aehnlichkeitskreise $a$, $A$, $J$ und $i$ wegen nur zwei Axen und zwei Paar conjugirte Berührungskreise.

§. 85.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei Punkte $M$ und $\mathfrak{M}$ und eine gerade Linie $m'm''$ (Fig. 22.); man soll einen Kreis beschreiben, der durch die beiden Punkte geht und die gerade Linie berührt.

Auflösung. Man bestimme

1) die äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$. Dieselbe geht, weil $A$ in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{A}$ in $M$ fällt, §. 33., durch die beiden gegebenen Punkte.
2) Ihre Linie gleicher Potenzen $O'O''$ [siehe §. 78.] ergiebt sich als äussere Axe, weil die Aehnlichkeitskreise $\mathfrak{A}$ und $A$ ebenfalls mit $M$ und $\mathfrak{M}$ zusammenfallen.
3) Der aus dem Hauptpunkte $O$ mit $OM$ ($= O\mathfrak{M}$) beschriebene Kreis ist der Hauptkreis der äusseren Axe und
4) nach §. 57., der Durchschnittspunkt $p$ der Linie $M\mathfrak{M}$ mit $m'm''$ der Berührungspol für letztere. Man lege daher von $p$ an den Hauptkreis eine Tangente, beschreibe damit den Halbkreis, welcher die gegebene Linie $m'm''$ in den Punkten $b'$, $b^2$ schneidet, so sind solche die Berührungspunkte der gegebenen Linie mit zwei Kreisen, welche beide der Aufgabe genügen; u. s. w.

§. 86.

Löst man die Aufgabe §. 85. nach der für ungleichartige Berührung stattfindenden Weise und bestimmt eine innere Aehnlichkeitsaxe, etwa $aJ\mathfrak{J}$, so erhält man — da ebenfalls der innere Aehnlichkeitspunkt $\mathfrak{J}$ mit $M$, $J$ mit $\mathfrak{M}$, daher auch $aA\mathfrak{A}$ mit $aJ\mathfrak{J}$ zusammenfällt und ebenso die inneren Aehnlichkeitskreise $\mathfrak{J}$ und $J$

mit den gegebenen Punkten $M$ und $\mathfrak{M}$ zusammenfallen und ausserdem die Linie äquidifferenter Potenzen zweier Punkte gleich ihrer Linie gleicher Potenzen ist, — ganz dasselbe Resultat. Bestimmt man eine andere innere Aehnlichkeitsaxe, also $\mathfrak{A}iJ$ oder $Ai\mathfrak{J}$, so erhält man, nach §. 49., den inneren Aehnlichkeitskreis $i$ als den Kreis, für welchen $\mathfrak{M}M$ Durchmesser ist, und da der Aehnlichkeitskreis $J$ (und $\mathfrak{J}$) ein Endpunkt dieses Durchmessers ist, so findet sich die Linie äquidifferenter Potenzen der inneren Aehnlichkeitskreise $i$ und $J$ ($\mathfrak{J}$) als die durch den Mittelpunkt $i$ gehende und auf $\mathfrak{M}M$ senkrecht stehende Gerade etc. — also ebenfalls wieder ganz dasselbe Resultat. Es existirt daher für zwei Punkte und eine Gerade nur ein Paar conjugirter Berührungskreise.

§. 87.

Aufgabe. Es sind gegeben: zwei gerade Linien $\mathfrak{M}'\mathfrak{M}''$ und $m'm''$ und ausserhalb derselben ein Punkt $M$ (Fig. 23.); man soll einen Kreis beschreiben, der die zwei geraden Linien berührt und durch den gegebenen Punkt geht.

Auflösung. Man bestimme die äussere Aehnlichkeitsaxe und die äussere Axe, indem man den, von den gegebenen Geraden gebildeten Winkel halbirt und auf die Halbirungslinie die verlangte äussere Axe $O'O''$ [siehe §. 69.], durch den gegebenen Punkt $M$ eine Senkrechte, die verlangte äussere Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$, fällt. Die Punkte $a$ und $\mathfrak{A}$ fallen aus erörterten Gründen mit $M$ zusammen und der Punkt $A$ unendlich weit weg. Aus dem Hauptpunkte $O$ der äusseren Axe beschreibe man, mit einem Halbmesser $= OM$, den Hauptkreis $O$ und lege an ihn von dem Durchschnittspunkte der äusseren Aehnlichkeitsaxe mit einer der gegebenen Linien, etwa der Linie $m'm''$, also von dem Berührungspole $p$ dieser Linie, eine Tangente. Der mit dieser aus $p$ beschriebene Halbkreis schneidet die Linie $m'm''$ in den conjugirten Berührungspunkten $b'$ und $b^2$; u. s. w.

§. 88.

Es lässt sich auf bereits erörterte Weise von den in der Aufgabe §. 87. gegebenen Stücken nachweisen, dass für sie nur ein Paar conjugirter Kreise besteht.

§. 89.

Es möchte aus dem Bisherigen hinlänglich erhellen, wie man zu verfahren habe, wenn, im Falle unter den drei gegebenen Stücken ein Punkt ist, derselbe sich in einer gegebenen Linie

oder in der Peripherie eines gegebenen Kreises befindet, d. h. wenn eine gerade Linie oder ein Kreis in einem gegebenen Punkte berührt werden soll.

§. 90.

Sind zwei auseinanderliegende Kreise, $\mathfrak{M}$ und $m$, ganz innerhalb der Peripherie eines dritten Kreises $M$ gegeben, und ist das Verlangen gestellt, einen Kreis zu beschreiben, der die drei gegebenen Kreise berührt, so weicht offenbar dasselbe von den in den §§. 19., 20., 25., 26. gestellten Aufgaben darin ab, dass in vorliegendem Falle einer der gegebenen Kreise von innen und die beiden andern von aussen, dort aber sämmtliche drei Kreise von aussen berührt werden. Es ergiebt sich nun leicht, dass für beide Berührungsweisen in Bezug auf gleichartige und ungleichartige Berührung ein gewisses Stellewechseln in Bestimmung der betreffenden Aehnlichkeitsaxen stattfindet. Wir haben gesehen, dass, wenn die drei Kreise $M$, $\mathfrak{M}$, $m$ ganz auseinander liegen, Folgendes stattfindet:

1) Für gleichartige Berührung der drei Kreise, Bestimmung der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$.
2) Für ungleichartige Berührung des Kreises $m$, Bestimmung der inneren Aehnlichkeitsaxe $AJ\mathfrak{J}$.
3) Für ungleichartige Berührung des Kreises $\mathfrak{M}$, Bestimmung der inneren Aehnlichkeitsaxe $\mathfrak{A}Ji$.
4) Für ungleichartige Berührung des Kreises $M$, Bestimmung der inneren Aehnlichkeitsaxe $A\mathfrak{J}i$.

Sind aber ganz innerhalb eines Kreises $M$ zwei auseinanderliegende Kreise $\mathfrak{M}$ und $m$ gegeben, so findet Folgendes statt:

1) Für gleichartige Berührung der drei Kreise, Bestimmung der inneren Aehnlichkeitsaxe $A\mathfrak{J}i$.
2) Für ungleichartige Berührung des Kreises $m$, Bestimmung der inneren Aehnlichkeitsaxe $\mathfrak{A}Ji$.
3) Für ungleichartige Berührung des Kreises $\mathfrak{M}$, Bestimmung der inneren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{J}J$.
4) Für ungleichartige Berührung des Kreises $M$, Bestimmung der äusseren Aehnlichkeitsaxe $a\mathfrak{A}A$.

Die dritte Abtheilung dieser Abhandlung folgt in einem der nächsten Hefte. Man wird aber leicht sehen, dass sowohl die Abhandlung Thl. XXIV. No. XV., als auch deren vorliegende Fortsetzung, jede für sich, ein gewisses Ganzes bildet. G.

# XIX.

## Notice sur le parc astronomique de la Société Technomatique ou se trouve en ce moment la plus grande lunette du monde *).

Die folgende „Notice" ist mir von Paris aus unter Kreuzband zur Bekanntmachung im „Archiv" zugesandt worden. Ich thue dies gern, aber im Archiv selbst, und nicht im Literarischen Berichte, wo freilich solche Mittheilungen eigentlich immer ihre geeignetste Stelle finden, weil durch die Mittheilung der „Notice" in demselben der Raum für literarische Anzeigen, von denen noch eine nur zu grosse Anzahl zurück ist, zu sehr beschränkt worden wäre. Das, wie es scheint, sehr grossartige

**Institut technomatique**

befindet sich

**Paris Boulevart d'Enfer 10,**

und scheint vorzüglich mit durch Herrn Porro begründet worden zu sein, was nur ein sehr günstiges Vorurtheil von diesem Institute zu erregen geeignet ist, da Herr Porro sich schon durch viele sinnreiche Erfindungen bekannt gemacht hat. Mehrere derselben kennt man schon aus dem trefflichen „Cours de Topographie et de Géodésie fait à l'école d'application du corps d'état-major par J. F. Salneuve, Chef d'escadron d'état-major. Seconde édition. Paris. 1850. **), wo Herr Salneuve in der Vorrede p. 1. es als einen besonderen Vorzug der neuen Ausgabe seines ausgezeichneten Werkes ansieht, indem er sagt: „J'y ai fait de nombreuses additions. Ainsi, je décris plusieurs instruments inventés par **M. Porro,**

*) Il est curieux que cet immense instrument est l'oeuvre de l'inventeur de la Longue-Vue Napoléon III, qui est bien le plus petit et le plus commode, le plus portatif de tous les instruments d'optique pour voir de loin.

**) Angezeigt im Literar. Ber. Nr. LXIII. S. 825.

officier supérieur piémontais, qui, à une profonde instruction, joint une sagacité merveilleuse dans l'application des principes d'optique qu'il possède si bien. On lira surtout avec intérêt, je pense, la description de sa **lunette anallatique,** de sa **longue-vue cornet,** et, surtout, de **l'appareil propre à mesurer les bases.**"
Der Herausgeber.

---

A l'instar d'un parc d'artillerie prête à entrer en campagne, le *parc astronomique* de la société technomatique se compose d'instruments achevés ou en construction très-avancée, installés sous des abris plus ou moins provisoires, mais sur des supports solides, de manière que les astronomes puissent les essayer par des observations réelles et suivies sur le ciel. Sa composition, continuellement variable, présente toujours beaucoup d'intérêt au point de vue du progrès: rarement il arrive qu'un second exemplaire d'un instrument ressemble exactement à celui qui l'a précédé; toujours on y remarque quelque perfectionnement nouveau. Telle est la mission que s'est donnée la Société Technomatique, le progrès de la science par celui des moyens d'observation: l'astronomie, la géodésie, la marine, l'art militaire, lui doivent une foule de perfectionnements et d'instruments nouveaux.

L'Exposition universelle, qui a donné une si vive impulsion à l'industrie et aux sciences, avait déterminé la Société Technomatique à faire construire plusieurs grands instruments d'astronomie, que d'autres affaires urgentes ont empêché d'achever en temps utile: trois de ces instruments, qui figurent aujourd'hui dans son parc astronomique, attirent puissament l'attention des astronomes. On remarque, tout d'abord en entrant, un immense réfracteur, qui ne touche à son support, pour ainsi dire, que par son oculaire, et qui s'élance d'un seul jet vers les espaces célestes.

Au sud de ce réfracteur, à quelques mètres de distance, est un pavillon de cinq mètres de diamètre et autant de hauteur, couvert d'un dôme tournant sous lequel est monté un équatorial de quarante-quatre décimètres de longueur et de vingt-quatre centimètres d'ouverture nette et utile.

Cet instrument, qui égale à peu près en dimensions et en puissance celui qu'on appelait, il y a vingt ans, le *colosse de Dorpat*, paraît aujourd'hui bien petit, à côté de la grande lunette qui se lève au-dessus lui; et, pourtant, dans le cours d'un demi-siècle, le colosse de Dorpat n'avait été dépassé en dimensions,

le travail à la main est d'ailleurs insuffisant: ce serait en vain qu'on aurait construit un grand instrument, s'il ne pénétrait pas plus efficacement que les plus petits dans les profondeurs célestes; c'est pourtant là ce qui arrivait avant M. Porro, qui a inventé et fait construire une machine bien simple au moyen de laquelle on peut tailler sans *bassins* une surface sphérique d'un rayon donné, puis faire varier ce rayon par degrés insensibles avec la plus rare perfection; ce moyen, joint à l'emploi du polyoptomètre *), pour les explorations qui doivent précéder le taillage, et à une application nouvelle de la méthode de Frisiani en ce qui concerne la vérification du travail, à tous les degrés d'avancement, a permis d'arriver de premier jet, sans consulter le ciel, si près de la perfection que bien peu de chose est resté à faire pour atteindre toute la netteté désirable: de premier jet cette lunette a montré les plus petites étoiles parfaitement rondes et a dédoublé nettement et largement dans l'expérience, par la méthode de Frisiani, deux étoiles *artificielles* de deux dixièmes de seconde en diamètres, séparées par un intervalle de moins d'une seconde. Le temps constamment contraire n'a point encore permis de faire sur le ciel des comparaisons efficaces, mais il ne paraît pas douteux que, dans un meilleur climat, en Algérie, par exemple, cet instrument supporterait *utilement* des grossissements de 1500 à 2000 fois, et on ne peut pas prévoir quelles merveilles on doit espérer de découvrir dans le ciel avec de tels grossissements que les immenses télescopes à miroir de Herschel et de lord Rosse n'ont jamais *utilement* supportés.

Le montage d'une si grande lunette eût présenté des difficultés très-graves, si on avait suivi les systèmes en usage, et il eût été impossible, d'après les idées reçues, d'en faire un instrument *mesurant*. M. Porro a vaincu toutes ces difficultés en faisant pivoter autour de l'oculaire immobile toute la lunette équilibrée par deux contre-poids: cette construction, à la fois simple et hardie, permet de placer confortablement l'astronome sur un fauteuil pareillement immobile, d'où il peut observer commodément vers tous les points du ciel.

Les mouvements naturels de l'instrument, ainsi que les moyens de mesurer sont *alt-azimutaux*; mais, par un artifice bien simple, l'axe optique de la lunette peut, à volonté, suivre aussi le mouvement diurne comme un équatorial et donner, avec une précision suffisante, sur deux cercles supplémentaires, les coordonnées

---

*) Instrument inventé aussi par M. Porro. Voy Comptes-rendus de l'Académie des Sciences vol. XXV., p. 433.

stellaires; l'astronome n'a pas besoin de quitter son fauteuil pour lire tous ses cercles, ses niveaux, etc. Cet instrument peut aussi, à tout instant, être amené rigoureusement dans le plan du méridien et fonctionner à la manière d'un instrument méridien immense et complet de la plus haute précision.

Malgré ses lourdes masses et la grande longueur du tube de cet instrument, les mesures azimutales, naturellement indépendantes de la réfraction, sont ici *absolues*, c'est-à-dire qu'elles sont indépendantes de l'excentricité, de la flection, etc., grâce aux moyens aussi nouveaux que précis par lesquels la ligne de visée de la lunette est mise *optiquement* en rapport immédiat avec les lignes fixes, la méridienne et la verticale. Il en en est de même des apozéniths, à la réfraction près; les astronomes savent, d'ailleurs, et Sawitch a démontré que les mesures azimutales, seules indépendantes de la réfraction, peuvent entrer avantageusement et pour une très-grande part dans l'étude du ciel.

En un mot, ce n'est pas seulement par les dimensions et la puissance optique que cet instrument laisse de beaucoup derrière lui tout ce qui a été fait jusqu'à ce jour, c'est encore par les moyens entièrement nouveaux de mesure, dont la précision est incomparablement supérieure à celle de tous les instruments connus. Il est à désirer que cet instrument soit bien vite achevé et passe bien vite dans les mains de quelque habile astronome qui en tire pour la science, et pour la gloire du siècle, tout le parti dont il est susceptible; la modération du prix (160,000 fr.), comparativement à celui de la désormais fort petite lunette de Poulkova (90,000 fr.), le met à la portée non-seulement des gouvernements, mais d'un bon nombre aussi de riches amateurs.

L'équatorial établi dans le pavillon au sud égale, avons-nous dit, en dimensions et en puissance, le ci-devant *colosse de Dorpat*, mais il présente quelques particularités remarquables et tout d'abord son élégante simplicité.

Les rotations de cet instrument sont sphériques, et la transmission du mouvement-diurne se fait par l'adhérence de deux surfaces sphériques. — Il n'y a pas de contre-poids d'allége, mais l'huile lubrificatrice qui est introduite avec pression en tient lieu avec avantage: le mouvement d'horlogerie y est remplacé par un petit moteur hydraulique d'une construction particulière; les dispositions en sont commodes et convenables.

Toutes ces combinaisons sont telles qu'elles éludent les défauts de l'usure, que même ces mécanismes se perfectionneraient d'eux-même par l'usure s'ils n'étaient déjà parfaits.

La lunette zénithale vient d'être achetée par un astronome des plus distingués, mais elle sera bientôt remplacée par une autre pareille: elle a 18 décimètres de longueur et un décimètre d'ouverture; elle est construite d'après le principe cathyalique de M. Porro.

Cet instrument donne à tout instant, sans inversion et sans niveau, le *lieu absolu du zénith*; il permet, en conséquence, de déterminer avec la plus grande précision et dans un temps très-court la latitude et le temps.

Quoique non encore entièrement achevés tous ces instruments témoignent déjà assez hautement de leur extrême bonté et précision pour que nul doute ne puisse rester sur leurs effets.

Le parc astronomique de la Société Technomatique prendra bientôt la proportion et les qualités d'un observatoire très-important dans lequel les instruments seront remplacés au fur et à mesure de la vente: un astronome y sera, dit-on, attaché qui, étudiant avec intelligence et continuité les effets et les défauts des instruments de toute espèce, permettra à la France, sous ce rapport, d'atteindre, par les ateliers de construction de cette société, une supériorité qui lui était depuis longtemps contestée.

On nous laisse espérer aussi que ce parc astronomique sera ouvert, moyennant une rétribution modique, aux astronomes amàteurs qui voudraient y faire des études spéciales, ainsi qu'aux colléges et aux institutions qui voudraient donner à leurs élèves quelques leçons pratiques sur l'usage des instruments d'astronomie de géodésie et de marine.

Nous terminons en faisant des voeux pour que la France, qui s'est laissé enlever par l'Angleterre les deux seuls grands objectifs qu'elle ait produit *) durant la première moitié de ce siècle, ne laisse pas aussi passer à l'étranger cet admirable instrument.

E. B.

---

Das mir zugesandte Preisverzeichniss theile ich im Folgenden gleichfalls mit. Der Herausgeber.

Grand réfracteur astronomique de cinquante-deux centrimètres d'ouverture nette et utile,

---

*) Cauchoix, artiste du premier mérite, dont nous regrettons la perte, a fait deux objectifs, un de vingt-sept et un de trente-deux centimètres de diamètre, qui sont maintenant, l'un à Cambridge, l'autre à Markrée.

et de quinze mètres de foyer monté en alt-azimut, donnant par mesure exacte et *absolue* l'azimut, et l'apozénith; donnant aussi sur deux cercles supplémentaires, l'ascension droite et la déclinaison: la Lunette peut suivre, par un mouvement composé, le mouvement diurne: l'astronome, confortablement établi dans un fauteuil, peut diriger l'Instrument vers tous les points du ciel, et lire sans se déplacer les cercles et les niveaux; assortiment d'oculaires, de micromètres, etc. . . . . . . . . . . . . . . . 160,000 fr.

Instrument équatorial de vingt-quatre centimètres d'ouverture et de quarante-quatre décimètres de foyer, rotations sphériques perfectionnées, allège à pression d'huile: mouvement diurne spontané, assortiment d'oculaires, micromètres à double effet, cercles horaires et de déclinaison de cinquante centimètres, appareil pour diminuer la flection, et accessoires . . . . . 30,000 fr.

*Cet Instrument est à peu près pareil à celui commandé par le Gouvernement français pour l'École normale supérieure de Paris, mais non encore achevé pour des motifs de finance indépendants de l'Institut Technomatique.*

**Sont en construction:**

Un Réfracteur de quarante centimètres d'ouverture, suivant le montage qui sera demandé . . 40,000 à 60,000 fr.

Un Réflecteur de vingt-sept centimètres d'ouverture . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8,000 fr.

Un Cercle méridien cathyalique complet avec lunette de 16 centimètres d'ouverture à *mesures absolues* . 22,000 fr

Plusieurs autres Instruments de plus petites dimensions construits d'après les perfectionnements les plus récents.

## XX.

## Schreiben des Herrn Oberlehrers Dr. H. Birnbaum in Braunschweig an den Herausgeber über eine Eigenschaft des Kreises.

---

Sie haben auf S. 231. im zweiten Hefte des 25sten Theils Ihres Archivs eine neue Eigenschaft des Kreises entwickelt, welche gewiss vielfache Beachtung gefunden haben wird, aber ganz besonders mich lebhaft interessirte, da ich kurz vor dem Lesen Ihrer vortrefflichen Arbeit auf einem ganz andern Wege zu demselben Resultate gekommen war. Vielleicht macht es Ihnen Vergnügen, mein Verfahren auch kennen zu lernen, und ich erlaube es mir daher, dasselbe Ihnen hier zur Mittheilung zu bringen.

1. Ich ging von folgendem Satze der Elementargeometrie aus:

> „Wenn bei einem Dreiecke die eine Seite nach eben dem Verhältnisse getheilt worden ist, in welchem die andern beiden Seiten zu einander stehen, so halbirt die gerade Verbindungslinie zwischen dem Theilungspunkte und der gegenüberliegenden Winkelspitze den hier vorkommenden Winkel des Dreiecks;" — (oder auch umgekehrt)

und ich legte mir nun die Frage vor, was wird das für eine krumme Linie sein, welche die gegenüberliegenden Winkelspitzen von allen Dreiecken in sich schliesst, wobei jedes Mal die beiden andern Seiten in demselben Verhältnisse stehen, als die erste unveränderlich fest gewählte getheilte Seite. Die Beantwortung ergab einen Kreis. Es sei $ADC$ (Taf. IX. Fig. 1.) ein solches Dreieck, wobei $AC$ in $B$ so getheilt ist, dass $AB:BC = AD:DC$. Denkt man sich nun $AD$, $DC$ veränderlich, während die in $B$ getheilte

Seite $AC$ unveränderlich dieselbe bleibt, so lässt sich zeigen, dass der Punkt $D$ beständig in der Peripherie eines unwandelbar festen Kreises gelegen ist. Denn nennen wir $BC=a$, $AB=b$ und beziehen $D$ auf rechtwinkelige Coordinaten $x$, $y$, die in $B$ Abscissenanfang und längs $ABC$ die Abscissenrichtung haben, so ist

$$AD=\sqrt{(b+x)^2+y^2},\quad DC=\sqrt{(a-x)^2+y^2}$$

und mithin:

$$\sqrt{(b+x)^2+y^2}:\sqrt{(a-x)^2+y^2}=b:a,$$

woraus leicht zu folgern, dass

$$y^2=\frac{(b+x)^2a^2-(a-x)^2b^2}{b^2-a^2}. \quad \ldots \quad (1)$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich nun sogleich, dass $y=0$, wenn 1) $x=0$ oder 2) $x=\frac{2ab}{b-a}$. Setzt man $\frac{ab}{b-a}=r$, so ist $a=\frac{rb}{b+r}$; und substituirt man diesen Werth für $a$ in (1), so kommt

$$y^2=x(2r-x),$$

also die Gleichung für den Kreis, dessen Radius $=r$ oder $=\frac{ab}{b-a}$ ist.

2. Als ich nun so leicht zu diesem Resultate gekommen war, so machte ich mir Hoffnung, auch auf dem Wege der Analysis der Alten rein durch elementare Construction zum Ziele zu gelangen.

Im $\triangle ADC$ (Taf. IX. Fig. 2.) sei wieder $AD:DC=AB:BC$ und $D$ mit $B$ durch eine gerade Linie verbunden, wodurch $\angle CDB=BDA$ wird. Macht man dann $\angle BDE=DBE$, so ist $DE=BE$ und $\angle EDC=EAD$, also auch $\triangle EDC$ dem $\triangle EAD$ ähnlich. Aus der Aehnlichkeit der letztgenannten Dreiecke folgt $AD:DC=AE:DE$.

Jetzt denken wir uns ausser $D$ (Taf. IX. Fig. 3.) noch einen beliebigen zweiten Punkt $F$ über $ABC$ so gewählt, dass ebenfalls $FA:FC=AB:BC$, und also die Linie $FB$ den $\angle AFC$ auch halbirt. Auch denken wir wie vorhin $\angle BFG=FBG$ gemacht, wodurch dann ebenso das $\triangle GFC$ dem $\triangle GAF$ ähnlich sein müsste. Wir hätten daher

$$AD:DC=AE:DE$$

und

$$AF:FC=AG:FG,$$

woraus $AE:DE = AG:FG$ folgt, weil die ersten beiden Verhältnisse der vorstehenden beiden Proportionen $= AB:BC$ nach der Voraussetzung sind.

In $AE:DE = AG:FG$ für $DE$ das gleiche $EB$ und für $FG$ das gleiche $BG$ gesetzt, giebt $AE:EB = AG:BG$; hieraus leitet man ab:

$$(AE - EB):EB = (AG - BG):BG$$

oder

$$AB:EB = AB:BG$$

und

$$AB:AB = EB:BG.$$

Da aber diese Proportion nur wahr sein kann, wenn $BG = BE$ ist, so fällt $G$ in $E$, also müssen alle Punkte $D$, $F$.... mit $B$ in der Peripherie des Kreises liegen, der um $E$ als Mittelpunkt und mit $EB$ als Radius beschrieben wird. Man findet $EB$ nach der Proportion $(AB - BC):BC = AB:EB$, die sich von $AD:DC = AE:ED$ leicht ableiten lässt.

3. Jetzt auch die Synthesis. Wählt man eine beliebige gerade Linie $AC$ (Taf. IX. Fig. 4.) und theilt dieselbe in $B$ nach irgend einem Verhältnisse, verlängert dann $BC$ über $C$ hinaus nach $D$, so dass $(AB - BC):BC = AB:BD$ ist, und beschreibt um $D$ als Mittelpunkt mit $DB$ als Radius einen Kreis, so lässt sich zeigen, dass, wenn man irgend einen Punkt $E$ der Peripherie dieses Kreises mit $A$ und $C$ durch gerade Linien verbindet, diese Verbindungslinien $EA$, $EC$ immer in demselben Verhältnisse wie $AB$, $BC$ zu einander stehen.

Aus $(AB - BC):BC = AB:BD$ folgt $AB:BC = AD:BD$ oder auch $AB:AD = BC:BD$, so wie aus dieser $(AD - AB):AD = (BD - BC):BD$ oder $BD:AD = CD:BD$ oder $AD:BD = BD:CD$ folgt. Setzt man für $BD$ das gleiche $ED$ an den Platz, so wird aus dieser letzten Proportion $AD:DE = DE:CD$. Richtet man daher die Aufmerksamkeit auf die beiden Dreiecke $ADE$, $EDC$, so haben sie den Winkel an $D$ gleich und die umschliessenden Seiten proportionirt und sind daher einander ähnlich. Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke folgt die Gleichheit der gleichliegenden Winkel $EAD$ und $CED$. Es ist aber $\angle EBD = BEA + EAB$, und da $EBD = DEB$, so ist auch $DEB = BEA + EAB$, oder $DEC + CEB = BEA + EAB$; nimmt man hiervon die vorhin gleich gefundenen Winkel $DEC$, $EAB$ hinweg, so bleibt noch $CEB = BEA$. Mithin ist im Dreieck $CEA$ die Linie $EB$ die Halbirungslinie des Winkels $CEA$, von dieser weiss man aber, dass sie

die gegenüberliegende Seite des zugehörigen Dreiecks jedesmal nach demselben Verhältnisse theilt, in welchem die beiden andern Seiten zu einander stehen, dass sich also $AE:EC=AB:BC$ verhält.

---

Die hier besprochene Eigenschaft gilt übrigens nicht blos für den Kreis, sondern auch für die ganze Kugel, welche mit dem betreffenden Radius $r=\frac{ab}{b-a}$ beschrieben wird. Auch will es mir scheinen, als wenn sich dieser Satz zu katoptrischen Zwecken praktisch fruchtbar machen lasse. Doch davon vielleicht später.

---

# XXI.

# Ueber den Potenzialausdruck $((1))^x$.

Von

Herrn *H. Kinkelin*,

Bezirkslehrer zu Aarburg im Canton Aargau.

---

## §. 1.

Bei Gelegenheit der Ausarbeitung eines Aufsatzes über Funktionsbestimmungen gerieth ich auf den Ausdruck $((1))^x$. Da mir keine direkte Ableitung desselben aus der Natur der Einheit bekannt war, so hielt ich es für nicht ganz nutzlos, die nähere Bestimmung desselben und Zurückführung auf den bekannten Ausdruck $\cos 2k\pi x + i\sin 2k\pi x$ auf direktem Wege zu versuchen. Was ich gefunden, mag hier folgen.

Unter $((1))^x$ verstehe ich mit Cauchy irgend einen imaginären oder reellen Werth der $\frac{1}{x}$ten Wurzel aus der Einheit. Wie

bekannt, lässt sich jede Vieldeutigkeit einer Funktion durch eindeutige Ausdrücke wiedergeben, welche veränderliche ganze Zahlen enthalten, welche wir Indices heissen wollen.

§. 2.

Dem Ebengesagten zufolge ist also die Form von $((1))^x$:

$$((1))^x = \varphi_k(x) + i\psi_k(x), \quad \text{wo } i = \sqrt{-1}, \tag{1}$$

und wo $k$ den Index bedeutet. $\varphi_k(x)$ und $\psi_k(x)$ sind dabei reelle Funktionen, um deren nähere Bestimmung es sich nunmehr handelt, so zwar, dass

$$\varphi_0(x) + i\psi_0(x) = 1 \tag{2}$$

ist. Diesem zufolge ist also

$$\varphi_0(x) = 1, \quad \psi_0(x) = 0,$$

welche Ausdrücke von $x$ unabhängig sind.

Stellt $x$ eine ganze Zahl $\mu$ vor, die auch Null sein kann, so wird ferner

$$((1))^\mu = 1 = \varphi_k(\mu) + i\psi_k(\mu),$$

woraus

$$\varphi_k(\mu) = 1, \quad \psi_k(\mu) = 0 \tag{3}$$

folgt.

Es sind also $\varphi_k(x)$ und $\psi_k(x)$ periodische Funktionen, d. h. jedesmal, wenn $x$ einen positiven oder negativen ganzen Zahlwerth erhält, geht $\varphi_k(x)$ durch 1 und $\psi_k(x)$ durch 0. Es hat also, wenn wir zuerst die Funktion $\psi_k(x)$ in's Auge fassen, die Gleichung $\psi_k(x) = 0$ die Wurzeln

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, \ldots, \tag{4}$$

und es ist daher

$$\psi_k(x) = f(x).x^{\lambda_0}(x-1)^{\lambda_1}.(x-2)^{\lambda_2}.(x-3)^{\lambda_3}\ldots$$
$$.(x+1)^{\lambda_1'}(x+2)^{\lambda_2'}.(x+3)^{\lambda_3'}\ldots, \tag{5}$$

wo $f(x)$ eine Funktion von $x$ ist, die für keinen der in (4) angegebenen Werthe von $x$ verschwindet. Was die Exponenten $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_1', \lambda_2', \lambda_3', \ldots$ betrifft, so wird die spätere Untersuchung Näheres ergeben.

§. 3.

Multiplizirt man die Gleichung (1) mit

$$((1))^y = \varphi_k(y) + i\psi_k(y),$$

wobei der nemliche Index angenommen wird, so erhält man:

(6)

$$((1))^{x+y} = \{\varphi_k(x) + i\psi_k(x)\}\{\varphi_k(y) + i\psi_k(y)\} = \varphi_k(x+y) + i\psi_k(x+y),$$

und hieraus ergibt sich, wenn das Imaginäre vom Reellen getrennt wird:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(x)\,\varphi_k(y) - \psi_k(x)\,\psi_k(y) &= \varphi_k(x+y), \\ \psi_k(x).\varphi_k(y) + \varphi_k(x).\psi_k(y) &= \psi_k(x+y). \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Wird hier $y$ als ganze Zahl $\mu$ angesehen, so erhält man mit Zuziehung von (3):

$$\varphi_k(x+\mu) = \varphi_k(x), \quad \psi_k(x+\mu) = \psi_k(x);$$

und umgekehrt: (8)

$$\varphi_k(x-\mu) = \varphi_k(x), \quad \psi_k(x-\mu) = \psi_k(x);$$

wodurch sich $\varphi_k(x)$ und $\psi_k(x)$ als vollkommen periodische Funktionen in $x$ herausstellen, die bei einer Vermehrung oder Verminderung von $x$ um eine ganze Zahl denselben Werth annehmen, wie vorher. Man hat somit bloss nöthig, die Werthe von $\varphi_k(x)$ und $\psi_k(x)$ von $x=0$ bis $x=1$ zu kennen, um sofort auch die für alle anderen Argumente zu erhalten.

§. 4.

Aus der Theorie der Gleichungen weiss man, dass auch

$$((1))^x = \varphi_k(x) - i\psi_k(x).$$

Bedenkt man nun, dass die Wurzeln der Gleichung $y^{\frac{1}{x}} = 1$ in $y$ auch zugleich Wurzeln der Gleichung $\left(\frac{1}{y}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$ oder $y^{-\frac{1}{x}} = 1$ sind, so folgt, dass auch $\varphi_k(-x) + i\psi_k(-x)$ Wurzel eben der erstern Gleichung ist. Es kann aber letztere Wurzel mit $\varphi_k(x) + i\psi_k(x)$ nicht identisch sein, weil

$$\varphi_k(-x)+i\psi_k(-x)=((1))^{-x}=\frac{1}{((1))^x}=\frac{1}{\varphi_k(x)+i\psi_k(x)},$$

welches nie gleich $\varphi_k(x)+i\psi_k(x)$ sein kann; es muss also

$$\varphi_k(-x)+i\psi_k(-x)=\varphi_k(x)-i\psi_k(x)$$

sein, d. h. es ist

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_k(-x)=+\varphi_k(x),\\ \psi_k(-x)=-\psi_k(x).\end{array}\right\} \tag{9}$$

Setzt man aber in der ersten Gleichung in (7) $y=-x$, so kommt wegen der Gleichung (3):

$$\varphi_k(x)\varphi_k(-x)-\psi_k(x)\psi_k(-x)=1,$$

oder also wegen (9):

$$\{\varphi_k(x)\}^2+\{\psi_k(x)\}^2=1. \tag{10}$$

Und substituirt man endlich in (7) $-y$ für $y$, so kommt mit Hülfe von (9):

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_k(x-y)=\varphi_k(x)\varphi_k(y)+\psi_k(x)\psi_k(y),\\ \psi_k(x-y)=\psi_k(x)\varphi_k(y)-\varphi_k(x)\psi_k(y).\end{array}\right\} \tag{11}$$

## §. 5.

Ehe nun zur Entwickelung von $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$ in ihrer Abhängigkeit von $x$ geschritten wird, muss zuerst ihre Abhängigkeit von $k$ ermittelt werden. Zu dem Ende ist

$$((1))^{\mu x}=((1^x))^{\mu},$$

also

$$\varphi_k(\mu x)+i\psi_k(\mu x)=\{\varphi_k(x)+i\psi_k(x)\}^{\mu}, \tag{12}$$

wo $\mu$ eine ganze positive Zahl vorstellt. Setzt man hierin $-x$ anstatt $x$ und bedenkt die Gleichung (9), so wird

$$\varphi_k(-\mu x)+i\psi_k(-\mu x)=\{\varphi_k(x)-i\psi_k(x)\}^{\mu},$$

oder da, wenn (10) in zwei Faktoren aufgelöst wird:

$$\varphi_k(x)-i\psi_k(x)=\frac{1}{\varphi_k(x)+i\psi_k(x)}, \tag{13}$$

so ist

$$\varphi_k(-\mu x)+i\psi_k(-\mu x)=\{\varphi_k(x)+i\psi_k(x)\}^{-\mu}.$$

Diese Gleichung, mit (12) verglichen, begründet die Behauptung, dass dieselbe auch noch für negative ganze $\mu$ gilt.

Macht man nun in (12) $k=1$, so erhält man:

$$\varphi_1(\mu x) + i\psi_1(\mu x) = \{\varphi_1(x) + i\psi_1(x)\}^\mu.$$

Ueberlegt man nun, dass $((1))^{\mu x} = ((1^\mu))^x = ((1))^x$ ist, so ist also

$$((1))^x = \varphi_1(\mu x) + i\psi_1(\mu x)$$

oder kurz

$$((1))^x = \varphi(\mu x) + i\psi(\mu x), \qquad (14)$$

wo $\mu$ alle positiven und negativen Zahlenwerthe annehmen kann. Vertauscht man endlich in letzter Gleichung $\mu$ mit $k$, so stellen sich die beiden Bestimmungen heraus:

$$\varphi_k(x) = \varphi(kx), \quad \psi_k(x) = \psi(kx). \qquad (15)$$

Die Gleichung (12) gilt mit gewissen Modificationen auch für gebrochene Werthe von $\mu$, denn aus der identischen Gleichung

$$((1))^{\frac{xv}{\mu}} = (((( 1))^x))^{\frac{v}{\mu}}$$

folgt:

$$\varphi\left(\frac{kxv}{\mu}\right) + i\psi\left(\frac{kxv}{\mu}\right) = \{\varphi(kx) + i\psi(kx)\}^{\frac{v}{\mu}}((1))^{\frac{v}{\mu}}$$

oder

$$\left\{\varphi\left(\frac{kxv}{\mu}\right) + i\psi\left(\frac{kxv}{\mu}\right)\right\}\left\{\varphi\left(\frac{k'v}{\mu}\right) + i\psi\left(\frac{k'v}{\mu}\right)\right\} = \{\varphi(kx) + i\psi(kx)\}^{\frac{v}{\mu}},$$

oder wegen Gleichung (6):

$$\varphi\left(\frac{kxv}{\mu} + \frac{k'v}{\mu}\right) + i\psi\left(\frac{kxv}{\mu} + \frac{k'v}{\mu}\right) = \{\varphi(kx) + i\psi(kx)\}^{\frac{v}{\mu}},$$

allgemein, wenn $y$ für $\frac{v}{\mu}$ geschrieben wird:

$$\varphi(y(kx + k')) + i\psi(y(kx + k')) = (\varphi(kx) + i\psi(kx))^y.$$

Setzt man nun noch $x$ anstatt $kx$ und $k$ anstatt $k'$, so kommt endlich:

$$\varphi(y(x + k)) + i\psi(y(x + k)) = \{\varphi(x) + i\psi(x)\}^y, \qquad (16)$$

welches die angekündigte Gleichung ist. $x$ wird immer als reelle

Zahl betrachtet; man kann daher nach derselben differenziren. Thut man dies, so kommt nach der Bezeichnung Cauchy's:

$$D_{yx}\varphi(yx+yk)+i.D_{yx}\psi(yx+yk)$$
$$=\{\varphi(x)+i\psi(x)\}^{y-1}\{D_x\varphi(x)+i.D_x\psi(x)\}$$

oder

$$D_{yx}\varphi(yx+yk)+i.D_{yx}\psi(yx+yk)$$
$$=\{\varphi((y-1)(x+k'))+i\psi((y-1)(x+k'))\}\{D_x\varphi(x)+i.D_x\psi(x)\}.$$

Multiplizirt man rechterhand aus und trennt das Imaginäre vom Reellen, so erhält man hieraus:

(17)

$$D_{yx}\varphi(yx+yk)=D_x\varphi(x).\varphi((y-1)(x+k'))-D_x\psi(x).\psi((y-1)(x+k')),$$
$$D_{yx}\psi(yx+yk)=D_x\varphi(x).\psi((y-1)(x+k'))+D_x\psi(x).\varphi((y-1)(x+k')).$$

§. 6.

Die beiden letzten Gleichungen (17) können nun gebraucht werden, um sowohl $\varphi(x)$ als $\psi(x)$ in Reihen nach $x$ zu entwickeln. Vorerst muss von denselben bemerkt werden, dass sowohl $k$ als $k'$ ganz beliebige ganze Zahlwerthe, die Null mitbegriffen, annehmen können. Legt man ihnen den Werth Null bei, so erhält man als Spezialisirung:

$$D_{yx}\varphi(yx)=D_x\varphi(x).\varphi(yx-x)-D_x\psi(x).\psi(yx-x),$$
$$D_{yx}\psi(yx)=D_x\varphi(x).\psi(yx-x)+D_x\psi(x).\varphi(yx-x).$$

Setzt man hierin $x=1$ und abkürzend

$$(D_x\varphi(x))_{x=1}=a,\quad (D_x\psi(x))_{x=1}=b;$$

so wird erhalten:

$$D_y\varphi(y)=a\varphi(y-1)-b\psi(y-1),$$
$$D_y\psi(y)=a\psi(y-1)+b\varphi(y-1);$$

oder mit Zuziehung von (8):

$$D_y\varphi(y)=a\varphi(y)-b\psi(y),$$
$$D_y\psi(y)=a\psi(y)+b\varphi(y).$$

Hierin sind nun $a$ und $b$ näher zu bestimmen. Differenzirt man zu diesem Zwecke die Gleichung (10) nach $x$ und ersetzt $x$ durch $y$, so wird:

$$\varphi(y).D_y\varphi(y)+\psi(y).D_y\psi(y)=0.$$

Werden in diese Gleichungen die eben gefundenen Werthe von $D_y\varphi(y)$ und $D_y\psi(y)$ eingesetzt, so ergibt sich:

$$a\{(\varphi(y))^2+(\psi(y))^2\}=0,$$

woraus $a=0$ folgt, da $\{\varphi(y)\}^2+\{\psi(y)\}^2=1$. Somit ist endlich

$$D_y\varphi(y)=-b.\psi(y),$$

$$D_y\psi(y)=+b.\varphi(y);$$

oder, wenn $y$ in $x$ umgetauscht wird,

$$\left.\begin{aligned} D_x\varphi(x)&=-b.\psi(x),\\ D_x\psi(x)&=+b.\varphi(x). \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Man erhält demnach nach dem Maclaurin'schen Lehrsatze mit Hülfe der Gleichungen (8) und (4):

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x)&=1-\frac{b^2x^2}{2!}+\frac{b^4x^4}{4!}-\frac{b^6x^6}{6!}+\ldots,\\ \psi(x)&=bx-\frac{b^3x^3}{3!}+\frac{b^5x^5}{5!}-\frac{b^6x^6}{6!}+\ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

in welchen Formeln nur noch $b$ unbestimmt ist.

## §. 7.

Wir gehen nun über zur Bestimmung von $b$. Zu dem Ende bemerkt man aus der zweiten Gleichung in (19), dass in $\psi(x)$, $b$ als Faktor von $x$ auftritt. Gelingt es daher, $\psi(x)$ in Faktoren zu zerlegen und $b$ auszuscheiden, so hat man dann nur nöthig, dem $x$ einen bestimmten Werth beizulegen, um sofort $b$ zu erhalten. Wir wollen daher untersuchen, für welche Werthe von $x$ $\psi(x)=0$ werden kann.

Es sei also $\alpha$ ein solcher Werth, dass

$$\psi(\alpha)=0, \text{ so muss wegen (10) } \varphi(\alpha)=\pm 1$$

sein. Die Gleichungen (7) ergeben nun für $y=x$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi(2x)&=\{\varphi(x)\}^2-\{\psi(x)\}^2,\\ \psi(2x)&=2\varphi(x).\psi(x); \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

und also

$$\varphi(2\alpha)=1,\quad \psi(2\alpha)=0.$$

Letzteres trifft aber nur dann ein, wenn $2\alpha$ eine ganze Zahl ist, d. h. wenn $2\alpha=k$ oder

$$\alpha=\frac{k}{2}, \tag{21}$$

so lange wir $x$ als reelle Grösse betrachten. Unter der Voraussetzung also, dass $x$ reell sei, hat die Gleichung $\psi(x)=0$ bloss die Wurzeln

$$\ldots,\ -\frac{3}{2},\ -\frac{2}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0,\ +\frac{1}{2},\ +\frac{2}{2},\ +\frac{3}{2},\ldots,$$

und folglich hat $\psi(x)$ bloss die Faktoren:

$$\ldots,\ x+\frac{3}{2},\ x+\frac{2}{2},\ x+\frac{1}{2},\ x,\ x-\frac{1}{2},\ x-\frac{2}{2},\ x-\frac{3}{2},\ldots,$$

und somit ist

$$\psi(x)=f(x).x^{\lambda_0}(x-\tfrac{1}{2})^{\lambda_1}(x-1)^{\lambda_2}(x-\tfrac{3}{2})^{\lambda_3}(x-2)^{\lambda_4}\ldots$$
$$.(x+\tfrac{1}{2})^{\nu_1}(x+1)^{\nu_2}(x+\tfrac{3}{2})^{\nu_3}(x+2)^{\nu_4}\ldots$$

Aus der Bestimmung, dass $\psi(x)=-\psi(-x)$ ist, entnimmt man, dass die resp. $\lambda_k=\nu_k$ sein müssen; ferner folgt aus der zweiten Gleichung (19), dass $\lambda_0=1$, und somit ist nun

$$\psi(x)=f(x).x.\left(\frac{1^2}{2^2}-x^2\right)^{\lambda_1}\left(\frac{2^2}{2^2}-x^2\right)^{\lambda_2}\left(\frac{3^2}{2^2}-x^2\right)^{\lambda_3}\left(\frac{4^2}{2^2}-x^2\right)^{\lambda_4}\ldots \tag{22}$$

$f(x)$ ist eine noch unbekannte Funktion von $x$, welche nur für imaginäre Werthe von $x$ Null werden kann. Um sie näher zu bestimmen, stellen wir folgende Betrachtungen an. Es sei $y+zi$ ein imaginärer Werth von $x$, so ist

$$((1))^{y+zi}=((1))^y.((1))^{zi}$$

oder

$$((1))^{y+zi}=\{\varphi(ky)+i\psi(ky)\}\{\varphi(kzi)+i\psi(kzi)\}.$$

Aus den Gleichungen (19) ersieht man aber, dass $\varphi(kzi)$ und $i\psi(kzi)$ reell sind. Man setze daher

$$\varphi(kzi)+i\psi(kzi)=\Theta(kz),$$

so wird

$$((1))^{y+zi} = \varphi(ky).\vartheta(kz) + i\psi(ky).\vartheta(kz),$$

und folglich für $x = y + zi$:

$$\varphi(kx) = \varphi(ky).\vartheta(kz),$$

$$\psi(kx) = \psi(ky).\vartheta(kz).$$

Im Fall also $x$ imaginär wird, lassen sich $\varphi(kx)$ und $\psi(kx)$ in zwei Faktoren trennen, von denen der eine nur den reellen Theil von $x$, der andere nur den imaginären enthält. $\psi(kx)$ kann daher Null werden, entweder wenn $\psi(ky) = 0$ oder wenn $\vartheta(kz) = 0$. Findet Letzteres statt, so wird auch $\varphi(kx) = 0$, welches aber mit $\psi(kx) = 0$ wegen Gleichung (10) nicht zugleich statthaben kann. Es kann also $\psi(kx)$ nur Null werden in Folge von $\psi(ky) = 0$, d. h. nur für reelle Werthe von $x$. Folglich ist $f(x)$ keine Funktion von $x$, sondern bloss eine Konstante, und somit geht (22) über in

$$\psi(x) = B.x\left(\frac{1}{2}-x\right)^{\lambda_1}\left(\frac{2}{2}-x\right)^{\lambda_2}\left(\frac{3}{2}-x\right)^{\lambda_3}\ldots\left(\frac{1}{2}+x\right)^{\lambda_1}\left(\frac{2}{2}+x\right)^{\lambda_2}\left(\frac{3}{2}+x\right)^{\lambda_3}\ldots$$

Um $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, .... zu bestimmen, setzen wir in der zweiten Gleichung in (7) $y = \frac{1}{2}$, so kommt wegen (21):

$$\psi\left(x + \frac{1}{2}\right) = -\psi(x). \qquad (23)$$

Tauscht man daher in obiger Formel für $\psi(x)$ $x$ in $x + \frac{1}{2}$ um, so kommt:

$$\psi(x) = B\left(\frac{1}{2}+x\right).x^{\lambda_1}.\left(\frac{1}{2}-x\right)^{\lambda_2}\left(\frac{2}{2}-x\right)^{\lambda_3}\left(\frac{3}{2}-x\right)^{\lambda_4}\ldots$$
$$.\left(\frac{2}{2}+x\right)^{\lambda_1}\left(\frac{3}{2}+x\right)^{\lambda_2}\ldots$$

Daher ist durch Vergleichung dieser Umgeformten mit der Ursprünglichen:

$$1 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \ldots,$$

also endlich

$$\psi(x) = Bx\left(\frac{1}{2}-x\right)\left(\frac{2}{2}-x\right)\left(\frac{3}{2}-x\right)\ldots$$
$$.\left(\frac{1}{2}+x\right)\left(\frac{2}{2}+x\right)\left(\frac{3}{2}+x\right)\ldots$$

Dividirt man hier beiderseits durch $x$, setzt alsdann $x=0$ und bedenkt, dass aus (19)

$$\left\{\frac{\psi(x)}{x}\right\}_{x=0}=b \tag{24}$$

folgt, so erhält man

$$B=b\cdot\frac{2^2.2^2.2^2.2^2\ldots.}{1^2.2^2.3^2.4^2\ldots.},$$

so dass nun durch Substitution:

$$\psi(x)=bx.(1-\frac{(2x)^2}{1^2})(1-\frac{(2x)^2}{2^2})(1-\frac{(2x)^2}{3^2})\ldots. \tag{25}$$

§. 8.

Dem Eingangs des vorhergehenden Paragraphen Gesagten gemäss hat man nun nöthig, einen Werth von $\psi(x)$ für ein bestimmtes $x$ zu kennen, der von Null verschieden ist. Suchen wir daher den Werth $\alpha$ von $x$, für welchen $\psi(x)=1$ wird, so ist also wegen (10):

$$\psi(\alpha)=1,\quad \varphi(\alpha)=0;$$

somit nach (20):

$$\psi(2\alpha)=0,\quad \varphi(2\alpha)=-1.$$

Letzteres findet aber nach (21) statt, wenn $2\alpha=\frac{k}{2}$, also muss

$$\alpha=\frac{k}{4} \tag{26}$$

sein. Setzt man also in (25) $x=\frac{1}{4}$, so erhält man:

$$b=\frac{4}{(1-\frac{1}{4.1})(1-\frac{1}{4.4})(1-\frac{1}{4.9})(1-\frac{1}{4.16})\ldots}=6.283185307. \tag{27}$$

Eleganter wird der Ausdruck für $b$ erhalten, wenn man $\psi(x)$ umwandelt in

$$\begin{aligned}\psi(x)=b.x(1-\frac{2x}{1})(1-\frac{2x}{2})(1-\frac{2x}{3})(1-\frac{2x}{4})\ldots\\ .(1+\frac{2x}{1})(1+\frac{2x}{2})(1+\frac{2x}{3})(1+\frac{2x}{4})\ldots.\end{aligned} \tag{28}$$

Jetzt $x=\frac{1}{4}$ gesetzt gibt

$$1=\frac{b}{4}(1-\tfrac{1}{2}).(1-\tfrac{1}{4}).(1-\tfrac{1}{6}).(1-\tfrac{1}{8})\ldots$$
$$.(1+\tfrac{1}{2}).(1+\tfrac{1}{4}).(1+\tfrac{1}{6}).(1+\tfrac{1}{8})\ldots$$

oder

$$1=\frac{b}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\ldots\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{9}{8}\ldots,$$

oder endlich

$$b=4.\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots}, \tag{29}$$

dessen Gesetz leicht zu übersehen ist.

§. 9.

Mit Hülfe der im vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultate lässt sich nun leicht auch $\varphi(x)$ in eine Faktorielle entwickeln. Die Gleichungen (7) ergeben nemlich, wenn man darin $y=\frac{1}{4}$ setzt, der Bestimmung (26) zufolge:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x+\tfrac{1}{4})&=-\psi(x),\\ \psi(x+\tfrac{1}{4})&=+\varphi(x).\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Setzt man also in (28) $x+\frac{1}{4}$ für $x$, so erhält man:

$$\varphi(x)=b.(x+\tfrac{1}{4})\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{2x}{1}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{2x}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{2x}{3}\right)\cdot\left(\frac{7}{8}-\frac{2x}{4}\right)\ldots$$
$$\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{2x}{1}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}+\frac{2x}{2}\right)\cdot\left(\frac{7}{6}+\frac{2x}{3}\right)\cdot\left(\frac{9}{8}+\frac{2x}{4}\right)\ldots,$$

oder, wenn man den Werth von $b$ aus (29) substituirt,

$$\varphi(x)=4\left(\frac{1}{4}+x\right)\cdot\frac{2}{1}\left(\frac{1}{2}-2x\right)\cdot\frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}-\frac{2x}{2}\right)\cdot\frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}-\frac{2x}{3}\right)\cdot\frac{8}{7}\left(\frac{7}{8}-\frac{2x}{4}\right)\ldots$$
$$\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}+2x\right)\cdot\frac{4}{5}\left(\frac{5}{4}+\frac{2x}{2}\right)\cdot\frac{6}{7}\left(\frac{7}{6}+\frac{2x}{3}\right)\cdot\frac{8}{9}\left(\frac{9}{8}-\frac{2x}{4}\right)\ldots,$$

oder

$$\varphi(x) = (1+4x)(1-4x).(1-\frac{4x}{3}).(1-\frac{4x}{5}).(1-\frac{4x}{7})....$$

$$.(1+\frac{4x}{3}).(1+\frac{4x}{5}).(1+\frac{4x}{7})....,$$

oder endlich

$$\varphi(x) = (1-\frac{(4x)^2}{1^2})(1-\frac{(4x)^2}{3^2})(1-\frac{(4x)^2}{5^2})(1-\frac{(4x)^2}{7^2}).... \quad (31)$$

## §. 10.

Der in §. 1. angegebene Zweck gegenwärtiger Abhandlung ist nun erfüllt. Es bleibt nur noch übrig, darauf hinzuweisen, dass $\psi(x)$ und $\varphi(x)$ die bekannten Funktionen $\operatorname{Sin} 2\pi x$ und $\operatorname{Cos} 2\pi x$ sind, dass also $b = 2\pi$ ist, und dass somit

$$((1))^x = \varphi(2k\pi x) + i\psi(2k\pi x). \quad (32)$$

Aus Vorstehendem kann nun auch leicht $((-1))^x$ entwickelt werden, was aber hier, um nicht weitläufig zu werden, übergangen werden soll. Es genügt, darauf hingewiesen zu haben. Uebrigens möge noch die Bemerkung hier Platz finden, dass man Obiges auch benutzen kann, um die Funktionen $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$ in die Analysis einzuführen, wenn man von ihrer trigonometrischen Bedeutung Umgang nehmen will. Jedenfalls aber ist die hier gegebene Definition bestimmter, als die gewöhnliche $e^{ix} = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$, indem $e^{ix}$ vieldeutig ist, und darum derselben vorzuziehen.

# XXII.

# Zur Geschichte und Literatur der Logarithmen.

Von

Herrn Oberlehrer Doctor *Gieswald*

an der St. Johannis-Schule zu Danzig.

---

## Vorwort des Herausgebers.

Allen Logarithmentafeln Jobst Burgi's oder Justus Byrg's fehlt bekanntlich die zum Verständniss der Tafeln nothwendige Einleitung, der „Gründliche Unterricht", wie Byrg selbst diese Einleitung genannt hat. Es ist daher sehr merkwürdig und als ein für die Geschichte der Mathematik sehr wichtiger Fund zu betrachten, dass Herr Doctor Gieswald diese Einleitung im Manuscript auf der an literarischen Schätzen so reichen Stadtbibliothek zu Danzig aufgefunden hat. In dem Programm der St. Johannis-Schule zu Danzig von Ostern d. J. hat er dieses Manuscript bekannt gemacht, und Byrg als Geometer und Algebraiker in interessanter Weise geschildert, wodurch er sich jedenfalls ein sehr anerkennungswerthes Verdienst um die Geschichte der Mathematik erworben hat. Gewiss werden die Leser des Archivs es mir Dank wissen, wenn ich im Folgenden Byrg's gründlichen Unterricht nach der von Herrn Doctor Gieswald gemachten Mittheilung abdrucken lasse, und auf diese Weise dieses für die Geschichte der Mathematik wichtige Aktenstück im Archive aufbewahre. Was Herr Dr. Gieswald über seinen Fund bemerkt, nehme ich auch vollständig auf, verweise aber wegen der Schilderung Byrg's als Geometer und Algebraiker auf das lesenswerthe Programm (Danzig. Wedel'sche Hofbuchdruckerei. 1856. 4.) selbst, da der Raum mir nicht erlaubt, auch diese Schilderung mitzutheilen und dieselbe natürlich manches den Lesern schon Bekannte enthält. Unbemerkt darf ich aber nicht

lassen, dass rücksichtlich des von Herrn Doctor Grebe im Archiv Thl. XVI. S. 364. namhaft gemachten Druckfehlers Herr Doctor Gieswald S. 22. seines Programms Folgendes anführt:

„Dr. Grebe (Grunert's Archiv Thl. XVI. pag. 364.) bemerkt, dass er an citirter Stelle einen Druckfehler im drittletzten Gliede der von Bramer angeführten Progress-Reihen verbessert habe, der sich im gedruckten Werke vorfindet. Merkwürdiger Weise ist auch in dem mir vorliegenden Manuscripte ein Schreibefehler in diesem Gliede, der später verbessert ist, so dass statt 2048, so viel ich erkennen kann, 1408 gestanden hat; — die Ziffer 1 ist deutlich zu erkennen. Hat Bramer dieses Manuscript benutzt und ohne nachzurechnen die Zahl abgeschrieben? Es müsste ein eigenthümlicher Zufall sein, wenn ein Abschreiber sich auch hier gerade verschrieben hätte."

Ich lasse nun Herrn Dr. Gieswald selbst sprechen. G.

---

Obwohl die Geschichte der Mathematik vielfach von Gelehrten bearbeitet worden ist, einige die ältesten, andere die spätern und die neuesten Perioden der Wissenschaft mit besonderer Vorliebe studirt und uns ihre schätzenswerthen Arbeiten überliefert haben, so sind doch zu verschiedenen Zeiten durch Entdeckungen neuer Quellen Ergänzungen hinzugekommen, die für die Geschichte der Wissenschaft einen grossen Werth hatten. — Wenn nun auch das Geschichtliche und Literarische der Logarithmen mannigfach bearbeitet worden ist, so dürften einige Zusätze, die im Folgenden enthalten sind, vielleicht nicht ganz uninteressant erscheinen.

In der neuesten Zeit hat Prof. Dr. Matzka in Prag einen interessanten und gelehrten Aufsatz über: die höhere Lehre der Logarithmen in Grunert's „Archiv für Mathematik und Physik" veröffentlicht (Bd. XV. pag. 121. u. f.). Er stellt dort neben der Betrachtung der bisher gegebenen Begriffe der Logarithmen einen neuen auf, so dass ein Theil seiner Arbeit in fünf Abschnitte zerfällt:

1) der von dem eigentlichen Entdecker der Logarithmen John Nepper ursprünglich gegebene Begriff,

2) der von Jobst Byrg, dem gleichzeitigen Entdecker der Logarithmen, gebrauchte,

3) der von Johann Keppler verwendete,

4) der gegenwärtig seit Euler in den Lehrgebäuden der Algebra übliche,

5) der neue von Matzka aufgestellte Begriff;

hier soll nur die zweite Deutung: der Begriff der Logarithmen, wie er durch Jobst Byrg festgestellt wurde, näher untersucht werden. — Aus den bekannten Schriften Byrg's würde sich Neues sehr schwer geben lassen, da geistreiche Männer, wie Montucla in seiner „Histoire des mathématiques", Matzka in seiner vorhin erwähnten Arbeit und mehrere andere Mathematiker richtig und tief in die Idee Byrg's eingedrungen und seine Theorie verdeutlicht haben. Indess soll hier — und das ist der Zweck dieser Abhandlung — der bisher nicht gedruckte „Unterricht", jene Erklärung, die Byrg selbst über seine Logarithmentafeln gab, veröffentlicht werden.

Byrg gab im Jahre 1620 eine Logarithmentafel heraus unter dem Titel:

> Arithmetische vnd Geometrische Progress-Tabulen, sambt gründlichen vnterricht, wie solche nützlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen vnd verstanden werden sol. Gedruckt, In der alten Stadt Prag, bei Paul Seissen, der Löblichen Universitet Buchdrucker, Im Jahre 1620.

Wie Matzka angiebt, sind diese auf $7\frac{1}{2}$ Bogen in Klein-Quart gedruckten Tafeln schon äusserst selten, allen aber fehlt der gründliche Unterricht; so nennt Byrg selbst die von ihm gegebene, zum leichtern Verständniss seiner Tafeln nothwendige Erläuterung. Diese Ansicht Matzka's spricht schon Montucla Tom. II. p. 10. aus, er sagt: Ces tables sont sur sept feuilles et demi in f. d'impression; mais l'instruction annoncée par le titre y manque, ce qui donne lieu de conjecturer que quelques circonstances particulières empêchèrent la continuation de cet ouvrage etc.

Es dürfte wohl feststehen, dass Byrg selbst nie diesen gründlichen Unterricht drucken liess, und auch seine Freunde — die sich so oft Arbeiten Byrg's, wie es scheint mit seinem Vorwissen, zueigneten — ihn nicht veröffentlichten.

Sein Schwager Bramer, der, wie im Folgenden gezeigt werden soll, genau diesen Unterricht gekannt, hat ihn nicht dem Drucke übergeben, und somit steht die Annahme Montucla's wohl gerechtfertigt da: Byrg, der so viele seiner Entdeckungen seinen Freunden zur Veröffentlichung übergeben, wollte auch

einmal selbstständig auftreten und ein vollständiges Werk, das alle seine Arbeiten und somit auch die von ihm erfundenen Logarithmen enthalten sollte, herausgeben. Diese Vermuthung Montucla's stützt sich wohl ohne Zweifel auf eine Stelle der Vorrede Bramer's zu einer Abhandlung: Problema WJe auß Bekanntgegebenem Sinu eines Grades Minuten oder Sekunden alle folgenden Sinus auff's leichteste zu finden vnd der Canon Sinuum zu absolviren sehe. Beschrieben von Benjamin Bramero, der Mathematischen vnd Mechanischen Künste liebhaber vnd jetzigem Bawmeister zu Marpurg. Gedruckt zu Marpurg durch Paul Egenolff im Jahr 1624. Bramer sagt in der Vorrede pag. 8. und 9., dass zu seiner Zeit: deß Burgi Cossa an den Tag gegeben werden wirdt.

Ob indess körperliche Leiden oder der Alles verheerende Krieg ihn an der Veröffentlichung seiner Arbeiten verhinderten, muss dahin gestellt bleiben. Die Erklärung der Byrg'schen Tafeln, die der Verfasser selbst gab, blieb somit ungekannt, und es war mir daher interessant, als ich vor längerer Zeit von meinem geehrten Freunde und Collegen Oberlehrer Gronau auf ein Manuscript aufmerksam gemacht wurde, das den Logarithmentafeln Byrg's angeheftet war, in jenen geschriebenen Blättern, wie Herr Gronau es ganz richtig bemerkt, den gründlichen Unterricht Byrg's vorzufinden.

Jobst Burgi oder Justus Byrg war im Jahre 1552 zu Lichtensteig, einer kleinen Stadt in der Schweiz, Kanton St. Gallen, an der Thur geboren. Ob er die mathematischen Kenntnisse, die ihn in spätern Jahren so rühmlich auszeichnen, in seiner Vaterstadt erworben, wissen wir nicht; wir sehen ihn in spätern Jahren in Cassel am Hofe des den Wissenschaften sehr ergebenen und namentlich um die Astronomie hochverdienten Landgrafen von Hessen-Cassel Wilhelm IV. als Hofuhrmacher, Mechanikus und Gehilfen; 1604 verlässt er diese Stellung, geachtet und geehrt von dem Fürsten, der ihn in einem Briefe an Tycho de Brahe (Epist. astron. Vraniburgi L. I. p. 21.) homo, qui quasi indagine alter Archimedes nennt, und lebt als Kammer-Uhrmacher unter den Kaisern Matthias und Ferdinand II. längere Zeit, kehrt dann wieder nach Cassel zurück und stirbt daselbst im Jahre 1633. Ausführlicheres über das Leben Byrg's ist in Doppelmayr's „Von den Nürnbergern Mathematikern" zu finden.

Die in der hiesigen Stadtbibliothek vorhandenen Logarithmentafeln Byrg's, die auf dem Titelblatte nur die Buchstaben J. B. zeigen, und auch das angeheftete Manuskript gehörten früher der Bibliothek des Danziger Rathsherrn Adrian Engelke an. Wie

es scheint, hat dieser die Logarithmentafeln mit der Erklärung nebst einigen Schriften Bramer's in Nürnberg, das er auch auf seinen Reisen berührte, an sich gebracht. Seine Bibliothek ebenso wie die eines Eichstadt, Kulmus, Bartholomäus Keckermann, Fabricius, Neander und Lossius wurden später der Stadtbibliothek einverleibt und somit wuchs die Zahl der mathematischen Werke theils durch Ankauf der Bücher Crügers, Hevelius u. m. a., theils durch Schenkungen, wie es u. a. die „Theoria Mathematica etc." des Michael Angelo Fardella beweiset.

Byrg giebt folgende Erklärung seiner Tafeln:

## Vorrede an den Treuherzigen Leser.

Freundlicher lieber Leser, Ob wol von Vortrefflichen Mathematicis, und Arithmeticis, mancherley Tabulen seindt erdichtet und calculiert worden, umb die Schwierigkeiten des Multiplicirens dividirens und Radices extrahirens auf zu heben, so findt doch dieselbige allezeit nur particular gewesen, also daß das Multipliciren und Diuidiren ihre eigene Tabulen, als abacum pythagoricum erfordert hat das Extrahiren der radicum quadratarum seine quadrattabulen die cubische Extraction ihre Cubic Tabulen und also fort in jedere quantitet ihre besondere tabulen vonnöten hat, vielheit der Tabulen nicht allein verdrießlich, sondern auch müheselig und beschwerlich sein.... Derowegen ich zu aller Zeit gesucht und gearbeitet habe, general Tabulen zu erfinden, mit welchen mann die vorgenannten Sachen alle verrichten möchte. — Betrachtent derowegen die eigenschafft und Correspondenz der 2 progressen alß der Arithmetischen mit der Geometrischen, das was in der ist Multipliciren, ist in jener nur Addiern und was in der ist Diuidiren in jener subtrahiern und was in der ist radicem quadratam extrahirn in iener nur ist halbiren, radicem cubicam extrahirn nur in 3 diuidiern, radicem Zensi in 4. Diuidiern, Sursolidam in 5 und also fort in andern quantiteten, so habe ich nichts nutzlichres erachtet, alß diese Tabulen also zu continuiern daß alle Zahlen so vorfallen in derselben mögen gefunden werden, auch welcher continuation dieße Tabulen erwachßen, durch welche man nicht allein die schwerlichkeiten des Multipliciern Diuidierns und allerley Radices extrahierens, welches in der Algebra oder Cos ein trefflichen Vortheil und nutzen hat, verhütet werden, sonder auch das mehr ist Zwischen 2 gegebene Zahlen so viel media proportionalis alß mann begert mögen gefunden werden, welches wie schwer es ohne dieße Tabulen zugehet, ist denen bewust, so sich ein wenig in dießem puluere exerciert haben. Und ob wol ich mit dießen Tabulen vor ettlichen Jahren bin umbgang so hat doch mein Beruff von der Edition derselben enthalten, wolle derowegen der Guttherzige Leser dieße

ihm also gefallen laßen und die Tabulen mit volgenden Vnterweisung, des Verstandes mit etlichen Exempel erklärt wie folgt;

## Kurtzer Bericht der Progress Tabulen, Wie dieselbigen nutzlich in allerley Rechnungen zu gebrauchen.

Zu diesen Tabulen findet man Zweierley Zahlen, Eine mitt rothen Caractren, welche wie einem ieden leichtlich zu sehen nichts andres dann ein Arithmetischer progress, die andere aber mit schwarzen nichts anders dann ein Geometrischer progress ist, und auf daß wir in dießem desto kurzer durchgehen, Woll wir dorthin den Arithmetischen progress die rothe und den Geometrischen progress die schwarze Zahl nennen, damit auch ein ieder die fundamenta dießer Tabulen grundtlicher faße und dieselbigen desto beßer gebrauchen mag, so wollen wir in folgenden Begriff die Eigenschafft dießer 2 progressen für Augen stellen und dieselben mit etlichen Exempeln erklären.

| Arithmetisch | *0.* | *1.* | *2.* | *3.* | *4.* | *5.* | *6.* | *7.* | *8.* | *9.* | *10.* | *11.* | *12.* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1. | 2. | 4. | 8. | 16. | 32. | 64. | 128. | 256. | 512. | 1024. | 2048. | 4096. *) |

Wir haben in der Voredt angeregt, wie auch von etlichen Arithmeticis Simon Jacob Moritius Zons und andere ist berürt worden, das was in der Geometrischen Progress oder in der Schwarzen Zahl Multipliciert daßelbige ist in der Arithmetischen Progress oder in der rothen Zahl addiern, Alß zum Exempel mann soll multipliciren 8 mit 64. Die rothe Zahl von 64 ist *6* und von 8 ist *3*. Der Summa ist *9*, denn *6* und *3* ist *9*. Dieße schwarze Zahl ist 512 und soviel kombt auch, so man 8 mit 64 multipliciert.

Item man soll multiplicirn 32 mit 256 ihre rothe Zahl sind *5* und *8* thuet zusammen dieße schwarze Zahl ist 8193 und so viel kombt so man 32 mit 256 multipliciert.

Item man sol Dividirn 16384 durch 512 ihre rothen Zahlen sind *14* und *9* Subtrahire derowegen *9* von *14* bleibt *5* sein schwarze Zahl ist 32 und soviel kombt 16384 durch 512 Dividiert. Weil dann die Regula Detri nichts anders als Multipliciren und Dividirens bedarff, so folget daß die Regul Detri auch fürderlich durch dieße Tabula erreicht mag werden, alß zum Exempel 8 geben 128 was geben 32. gib der Zahl ihre gebürende

*) Alle hier und im Folgenden cursiv und mit Schwabacher Schrift gedruckten Ziffern und Worte sind im Manuscripte roth geschrieben. G.

| | | |
|---|---|---|
| 8 | 128 | 32 |
| *3* | *7* | *5* Addier und zusammen. |

*7*
*5*
ist *12* davon Subtrahire die rothe Zahl *3*
*3*
*9* ihre schwarze Zahl ist 512. welches ist der begehrten Zahl facit genannt.

Item man wil Radicem quadratam auß 256 Extrahirn sein rothe Zahl ist *8* dis halbire kombt *4* dieße Schwarze Zahl ist 16 welches ist Radix quadrata auß 256.

Item man wil Radicem Cubicam auß 512 Extrahiern sein rothe Zahl ist *9* das in 3 dividiert kombt *3* sein Schwarze Zahl ist 8 und ist Radix Cubica auß 512.

Item man wil Radicem Zensi Zensicum extrahiern auß 4096 sein rothe Zahl ist *12* diß Dividiert in 4 kombt *3* dessen Schwarze Zahl ist 8 welches Radix Zensi Zensico ist aus 4096.

Item man wil zwischen 4 und 64 die mittler Proportional finden, ihre rothen Zahlen seindt *2* und *6* dieße addirt geben *8* dessen helfft ist *4*, sein schwarze Zahl ist 16 und dießes ist die Media proportionalis zwischen 4 und 64.

Item man wil 2 media proportionalia zwischen 64 und 512 finden, ihre rothen Zahlen seindt *6* und *9* so man die eine von der andern subtrahiert bleibt *3* dieße in 3 dividirt kombt *1* dieß *1* addiere ich zu der *6* kombt *7* sein schwarze Zahl ist 128, welches ist die erste der Zweien mittlern proportionalen und so man die *1* wiederum zu *7* addiert, kombt *8* deßen schwarze Zahl ist 256 die ander mittler proportional und also fort wie nachher sol angezeiget werden, und dieße Eigenschafft haben nicht allein die 2 abgesetzten Progressen mit einander, sonder alle, sie sein, wie sie wollen, wenn der Arithmetische von *0* und der Geometrische von 1 anfanget, wie denn auch die folgenden Tabulen nichts anderß als 2 solcher Progressen sindt. — Und dießes sey geredt. allein von der obgesetzten Progressen, Jetzo wollen wir zu dem gebrauch unsrer Progress Tabulen schreiten und Erstlich Lehren.

I. Wie einer ieden schwarzen Zahl, so in den Tabulen unter Schwarzen gefunden wirdt, ihre correspondirende rothe zu finden sey; als zum Exempel.

Man sol dießer Zahl 133373810 rothe Zahl suchen, dieße Zahl findt man in der Tabulen am 8 blat in der columna *28500* und an der lin-

ken seiten unter *300.* Die addier darzu *300* macht *28800* welches ist also die rothe Zahl von 133373810 und auf dieße weis kann eines jedern Zahl, so in der Tabul zu finden, sein rothe Zahl erfunden werden *).

| | *28000* | *28500* | *29000* | *29500* | *30000* | *30500* | *31000* | *31500* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *0* | 132311129 | 132974308 | 133640811 | 134210655 | 134983856 | 135660432 | 136340898 | 137023773 |
| *10* | ......24362 | ........87605 | ......54175 | ........24086 | ........97355 | ........75998 | .......54032 | ........37476 |
| *20* | ......37593 | 133000904 | ......67541 | ........37518 | 135010854 | ......87565 | .......67668 | .......51179 |
| *30* | ......50826 | ........14204 | ......80907 | ........50952 | ........24355 | 185701134 | .......81305 | ........64884 |
| *40* | ......64061 | ........27506 | ......94267 | ........64387 | .......37858 | ......14704 | .......94943 | ........78591 |
| *50* | ......27295 | ........40809 | 133707645 | ........77824 | ........51362 | ........28275 | 136408582 | ........92299 |
| ... | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . | . . . . |
| *270* | 132668834 | 133333806 | 134002111 | 13467765 | 135348787 | 136027191 | 136708996 | 137394219 |
| *280* | ......82101 | ........47139 | ......15511 | 87233 | ........62322 | ........40794 | .......22667 | 137407958 |
| *290* | ......95369 | ........60474 | ......28913 | 134700702 | ........75858 | ........54938 | ........36340 | ........21699 |
| *300* | 132708639 | ........73810 | ......42316 | ........14172 | ........89395 | ........68004 | ........50013 | ........35441 |
| *310* | ......21909 | ........87147 | ......55720 | ........27643 | 153402934 | ........81610 | ........63688 | ........49184 |
| *320* | ......35812 | 133400486 | ......69125 | ........41116 | ........16475 | ........95214 | ........77365 | ........62929 |

*) In den Tafeln an erwähnter Stelle ist zu finden: (siehe Tabelle oben)

Wie einer iedern rothen Zahl, so in der Tabulen zu finden ist, ihr gepürende schwarze Zahl soll gefunden werden.

Es wolle begehret werden zum Exempel zu wissen, welcher schwarzen Zahl dießer rothen von *28800*° gebüren, dießes zu erforschen, so such unter den rothen Zahlen, die oben vorzeichnet sei eine dergleich oder so nahe kleiner, alß die fürgegebene ist. Dieße finde ich am 8 blat in der columna 28500 an welchem noch *300* mangelt; such derowegen die *300* auf denselbigen blat in der ersten columna und gegen derselbigen über in der columna unter der *28500*° werden gefunden 133373810 welche ist die begehrte schwarze von *28800*" und so handelet man auch mit den andern, denn man findt der rothen Zahl alle von *0* biß auf *230270*° ihm gebührendt schwarze Zahl auf obgemelten weg.

Wie dann eine Zahl für fiele, so in der Tabul nicht just zu finden weer kann mann in vielen Rechnungen davor nemen die rothe Zahl welche der fürgegebenen Zahl am nechsten ist, vor ihm, aber damit nicht vorgnügen ließ kann auf folgende weise seine wahre rothe Zahl erforschen.

II. Mann soll zum Exempel die wahre rothe Zahl von 36 suchen, so setzet man noch Sieben 0 für, damit ich 9 Ziffern bekomme, denn alle schwarze Zahlen haben in unser Tabula nicht weniger alßo 360000000 Darnach sucht man in der Tabul unter den schwarzen Zahl Die 2 nechst kleiner und nechst größer ist dann 360000000 biß finde ich am 33 blat in der columna *12800* und auf der linken seite, nun felt mir die schwarze alß 360000000 zwischen

| | | |
|---|---|---|
| *90*° dieße hat schwarz | 359964763 | diese ist zu klein |
| *10* die Differenz | 35996 | die Differenz |
| dieße hat schwarz | 360000759 | diß ist zu groß |
| dieße kleinere Zahl von | 359964763 | Subtrahire |
| von meiner gegebenen Zahl | 360000000 | |
| | 000035237 | |

| Wie sich helt die | Differenz | zu der | rothen | also helt sich die 3 zur 4 |
|---|---|---|---|---|
| | 35996 | | *10000* | 35237 als *9789* |

Diße Viert Vierte addier zu der kleinen rothen Zahl

Die kleine rothe Zahl ist *90*°

Die Zahl der *columna 128000*

Dieß ist der Schwarzen Zahl von 360000000 ihr rote *128090789*

Es sol gleichwol so verdstand worden 36 haben ihre rothe $12899^{\circ}\frac{78}{100}$ und werden alle Zeit biß unter die ° ganze verstanden und die folgen der Bruch *).

*) Anmerkung.

| | 128000 | 128500 | 129000 | 129500 | 130000 | 130500 | 131000 | 131500 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 359640956 | 361343574 | 363255226 | 365075959 | 366905819 | 368744850 | 370593098 | 372450611 |
| 10 | ........76920 | ........79718 | ........91552 | 365112467 | ........42509 | ........81724 | 370730158 | ........87856 |
| 20 | 359712888 | 361515866 | 363327881 | ........48975 | ........79204 | 368818602 | ........67221 | 372525105 |
| 30 | ........48859 | ........52018 | ........64214 | ........85493 | 367015901 | ........55484 | 370704287 | ........62357 |
| 40 | ........84834 | ........88137 | 363400550 | 365222012 | ........52603 | ........92370 | ........41358 | ........99613 |
| 50 | 358920813 | 361624332 | ........36890 | ........58534 | ........89305 | 368929289 | ........78431 | 372636873 |
| 60 | ........56795 | ... ....60494 | .. .....73234 | ........95060 | 367126017 | ........66152 | 370815510 | ........74137 |
| 70 | ........92781 | ........96660 | 363509581 | 365331589 | ... ....62730 | 369003048 | ........52591 | 372711404 |
| 80 | 359928770 | 361732830 | ........45932 | ........68122 | ........99446 | . ......39949 | ........89676 | ........48676 |
| 90 | ........64763 | ........69003 | ........82287 | 365404659 | 367236166 | ........76853 | 370926765 | ........85950 |
| 100 | 360000759 | 361305180 | 363618645 | ........41200 | ........72890 | 369113760 | ........63858 | 372823229 |
| 110 | ........36759 | ........41361 | ........55007 | ........77744 | 367309617 | ........50672 | 371000955 | ........66511 |
| 120 | ........72763 | . ......77545 | ........91373 | 365514242 | ........46348 | ........87587 | ........38055 | ........97797 |
| 130 | 360108770 | 361913733 | 363727742 | ........50843 | ........83083 | 369224506 | ........75158 | 372935087 |
| 140 | ........44781 | ........49924 | ........64115 | ........87398 | 367419821 | ........61428 | 371112266 | .. .....72389 |

Wie zwo Zahlen mit einander zu multiplicirn seindt alß mann sol multipliciern die Zahl 154030185 mit 205518112. such ihre correspondierende rothe Zahl ist *43200* und *72040*.

| | |
|---|---|
| Die zwo rothe Zahlen addir zusammen | *43200* |
| | *72040* |
| Kombt diße rothe Zahl | *115240* |

von der schwarzen in 9 Ziffern 316559928 und diese findt die 9 ersten Ziffern des products an welchen wir unser Tabulen nur 9 Ziffern haben und die letzte oder Neundte nun vor ein Bruch geben wolle, dieweil viel ihr rational Zahl vorfalle.

Item man sol multiplicirn 551192902 mit 709153668 ihre rothe Zahl sein *170700* und *195900*

| | |
|---|---|
| Die zwei rothe Zahlen addier zusammen | *170700* |
| | *195900* |
| so kombt diße rothe Zahl | *366600* |
| dieße rothe Zahl ist in der Tabula nicht so groß, so subtrahr | *230270022* |
| bleibt die rothe dießer rothen Zahl | *136329978* |
| such ihre schwarze Zahl ist | 3906804680 |

welches seindt die 9 ersten Ziffern des begehrten products.

Alhier ist zu merkhen, daß in dießem Exempel zu endt ein Ziffer mehr denn im vorigen manglet, denn die Tahlen haben nit mehr denn 9 Ziffern und solte wol 10 sein, das ist die Ursach, daß wir die ganze rothe Zahl haben subtraieren müssen, welches nach'n obgendt weiter erklärt sol werden.

Wie man ein Zahl durch die ander diuidiern soll.

Man sol diuidiern 154030185 durch 205518112.

ihre rothe Zahl sein *43200* und *72040*. subtrahiert man des diuisoris rothe Zahl von der rothen, des diuidendi alß *72040* von *43200*. Dieweil aber weniger ist, so addiert man die ganze rothe Zahl

| | |
|---|---|
| | *230270022* |
| davon subtrire des diuisoris | *278470022* |
| rothe Zahl | *72040000* |
| such dießer rothen Zahl ihr gebürendt | *201430022* |

schwarze Zahl ist 749472554 und soviel kombt so man 154030185 durch 205518112 diuidirt, welches doch keine ganze, sondern lauter Bruch vom ganzen alß 0749472554 oder $0\frac{749472554}{1000000000}$

Wie man auß 3 bekandten Zahlen die Vierdte proportional finden sol, welches man gemeinlig die Regul detri zu nennen pflegt.

alß zum Exempel

| | die Erst | die ander | die dritte | die Vierte |
|---|---|---|---|---|
| Wie sich | 184030185 helt zu | 206518112 also | 309854565 zur 4 Zahl ihre rothe Zahl. | |
| | *48200* | *72040* | *138600* | |

Addier die ander und dritte rothe Zahl zusammen alß *138600*
*72040*
*210640*
subtrier darvon die erst rothe Zahl *48200*
Diß ist die rothe Zahl der Vierten Schwarzen *167440*
alß . . . . . . . . . . . . . . . . 533514619.

---

| | I. | II. | III. | IIII. |
|---|---|---|---|---|
| Wie sich | 945919848 helt zu | 100160120 also | 880122800 | zu der Vierten |
| dieß seindt | *224710* | ihre rothe *160* Zahl | *217500* | |

Addir die rothe zweite und dritte Zahl *160*
*217660*
und solst die erste darvon subtriren dieweils aber weniger ist, so addier darzu die ganze rothe *230270022* Zahl
*447930022*
darnach subtrier die erste rothe Zahl darvon *224710*
so bleibt diß rothe Zahl und ist derselben *228220022*
schwarze Zahl ist 931931024 welches ist so man die letzt Ziffer abschneidt, so darumb geschieht, daß die ganze rothe Zahl einmal zum aggregat addiert ist, die Vierte gesuchte proportional.

---

**Aus einer gegebenen Zahlen Radicem quadratam extrahiern.**

Man sol zum Exempel Radicem quadratam auß 4015374 extrahiern, wirdt also erstlich punctiert wie bei der extraction breuchlich ist und steht also 4015374 und weil alhier fünf punkten seindt, so wirdt sein Radix auch 5 Ziffern haben, die rothe Zahl dieser obgeführten ist *139020* dieße halbirt kombt *69510* dessen Schwarze Zahl ist 200383982 oder soll so verstanden werden $20038\frac{3982}{10000}$

Man sol zum andern Exempel Radicem quadratam auß 22033094 extrahiern, wirt also erstlich punetirt, wie bey der Extraction bräuchlich ist und steht also 22033094 und weil allhier 5 puncten kommen, so wer-

den im Radix auch 5 Ziffern kommen, die nach den 5 sindt Brüche, sein rothe Zahl ist *79000̈*. Dieweil aber der letzte puncten nit auf die erste Ziffer felt in der schwarzen Zahl alß im vorgenannten Exempel, sondern er felt auf die zweyte Ziffer, darumb muß die ganze rothe Zahl darzu addiert

| | |
|---|---|
| werden und halbiret alß solche | *79000* |
| darzu addier die ganze rothe Zahl | *230270022* |
| dieße rothe Zahl halbier | *309270022* |
| such derselben schwarze Zahl von dießer rothe | *154635011.* |

## Auß einer geben Zahlen Radicem Cubicam extrahieren.

Man begehrt zu einem Exempel Radicem Cubicam auß 5632037. Diese Zahl steht also in ihren verzeichneten puncten 5632037 darauß folgert, daß die Radix ganzer Zahl bekombt 3 Ziffern, die andern sindt Bruch einer ganzen Zahl, also suche ich die rothe Zahl derselbigen, welche ist *172500* so der puncten auf die erste Ziffer felt, so bleibt mein Radix auch in der ersten ganzen Zahl, und theil mein rothe Zahl in 3 theil, also folglich mein

| | |
|---|---|
| rothe Zahl ist | *172500* |
| Ein Dritttheil ist | *57500* |
| die gebürendt schwarze Zahl ist | 177707944 |

dieweil mir oben bekannt, daß 3 Ziffern ganz gegeben seint, so habe ich in diesem Radix cubicam 177707944, welches mein Tablen in 9 Ziffer rreichen mag, doch vorbehalten zu Endt der 9 Ziffern vor ein stuck eines Bruches angenommen werden, dieweil soviel ihrrational Zahlen mit einlauffen, der in 9 Ziffern kein genüge kann gegeben werden.

Auß einer geben Zahl Radicem cubicam extrahiern Alß man begehrt zu einem Exempel Radicem cubicam auß 56120370. darauß folget, daß die Radix ganzer Zahlen bekomme 3 Ziffern, die andern seindt Bruch einer ganzen Zahl, also suche ich die rothe Zahl derselbigen, welche ist *172500* dieweil aber der puncte nit auf die erste Ziffer felt, sonder auf die ander, so wirdt zu der rothen Zahl, welche ist vorgegeben, noch eine ganze Zahl addiert,

| | |
|---|---|
| thut also zusammen | *172500* |
| und die ganze Zahl . . . . . . . . . . . . . . . . | *172500* |
| | *230270022* |
| diß theil in 3 theil, dieweil der Cubus die 3 quantitet ist | *402770022* |
| Ein Dritttheil ist im rothen | *134256674.* |

such derselben schwarze Zahl ist 382860159 das Radix cubicam.

Auß einer gegebenen Zahl **Radicem Cubicam extrahiern.**

Man begehrt zu einem Exempel **Radicem Cubicam** auß 561203700. dieße Zahl stehet also in ihr verzeichneten puncten $56\dot{1}20\dot{3}70\dot{0}$, allhier fallen auch 3 puncte, aber der letzte punct felt auf die dritte Ziffer, obwol dieselbe Zahl des vorigen Exempels rothe Zahl gebürt, alß . . . $17250\mathring{0}$

so werden doch noch zwo ganze Zahlen darzu **addiert** . . .

$$\begin{array}{r} 230270022 \\ 230270022 \\ \hline 633040044 \end{array}$$

Und ist das die Ursach, die ersten 5 sambt den andern Ziffern gebürt die rothe Zahl, dieweil aber der punct nit auf den ersten alß 5, auch nit auf die andere alß 6, sondern felt auf die dritte, so hat die Erste 5 mit den andern Ziffern . 172500
und die 6 darnach eine ganze rothe Zahl . . . . . . .

$$\begin{array}{r} 230270022 \\ 230270022 \\ \hline \end{array}$$

nachher die dritte steht 1 darauf der punkten felt auch . . 633040044.
Also hab ich der drei ersten Ziffern ihre rothe Zahl zusammen Dieweil der Cubus die dritte quantitet ist, so nimb von derselben rothen Zahl die drittheil ist . . . . . . . $211013\mathring{}346$

diß drittheil ist die rothe Zahl der schwarzen Zahl ist **Radix** $82\ddot{4}8471$ 2.

Auß einer gegebenen Zahl der Vierten quantitet alß ʒʒ **R***) **Extrahiern.** — Man begehrt zu einem Exempel **Radicem** ʒʒ auß 56120370. Dißе Zahl steht also mit ihr verzeichneten puncten $561\dot{2}037\dot{0}$, alhier fallen 2 puncten, so wirt darauß bekannt, daß das **Radix** nur 2 Ziffer der ganzen Zahl bekomme, die ander folgende Ziffer seindt der Bruch, also such obgemelter schwarze Zahl ihre gepürende rothe Zahl, welche ist $17250\mathring{0}$
dieweil aber der letzte punct auf die 4te Ziffer felt, so werden 3 ganzer rothe Zahlen darzu **addiert**, alß . . . .

$$\begin{array}{r} 230270022 \\ 230270022 \\ 230270022 \\ \hline \end{array}$$

dieße rothe Zahl theil in 4 gleiche theil . . . . . . . 763310066

diß ist der **Radix** rothe Zahl . . . . . . . . . . . $190827\mathring{5}16$

Ihr gebührendt schwarze Zahl ist $6\mathring{7}4080769$ od. $67\frac{4080769}{10000000}$ das **Radix** das wir begehrt haben.

Auß einer gegebenen Zahl **Radicem Ss extrahiern **).**

Es zeige meine gegebene Zahl zu einem Exempel **Radix Ss** auß

---

*) ʒʒ (Zensdezens) ist die Zahl 4 in der Coss. Vergl. **Christoph Rudolph Coss. fol. 63.** und **Wilhelm von Calchum:** Kurtzer Bericht von zehendzahlen **Bremen 1629. pag. 123** u. f.

**) **Ss** ist die **cossische** Zahl 5 (**sursolidum**) ʒc ist 6 (**Zensicubus**) Bß ist 7 (**Bsursolidum**) ʒʒʒ ist 8 (**Zenszensdezens**) cc ist 9 (**Cubus de cubo**) u. s. w.

671876768 dieße Zahl steht also mit ihr verzeichneten Puncten 671876768 darauß folgen das die Radix 2 Ziffer werde bekommen ohn die Bruch einer ganzen Zahl, such der gegebenen gebürendt rothe Zahl ist . . *1905000*
diewell der letzte puncten nach der linkhen Hand nicht auf die *2302700*
letzte Ziffer felt, sonder auf die Vierdte . . . . . . . . *2302700*
*2302700*

so gebührt der 4 Ziffern als 6718 ihr rothe Zahl . . . . . *8818100*

dieselbe theil in 5 gleiche theil findt $\frac{1}{5}$ *1702620*

das ist der rothen Zahl derselben gebürende schwarze Zahl das Radix Ss von 671876768 alß 582717328 od. $58\frac{2717328}{10000000}$

### Zwischen zweyen bekannten Zahlen ein Media Proportional Zahl zu finden.

Es zeigen die 2 Zahlen 119004521 und 893423483 ihr gebührende rothe Zahl ist *174000* und *2190000*.

Die Differenz der rothen ist *201600* die theil in das halb 2 gleiche theil oder halbirt ist *100800*

addier zu der kleinen rothen Zahl ist *174000*
diß ist die rothe Zahl der medio proportional *118200* Zahl
und ihre schwarze ist die . . . . . . . 326069676
medio proportional Zahl, die wir begehren.

### Zum Andern 2 medio Proportional Zahl zu finden.

Theil die obgemelte rothe Differenz in 3 gleiche Theyl und addier die Theil eines zu der kleinen rothen Zahl, so haben wir die erste rothe Zahl derselbigen medio proportional Zahl, oder addier derselbigen theil 2 zu der kleinen rothen Zahl, so haben wir die andere rothe Zahl derselbigen schwarzen medio Proportional Zahl. —

Zum dritten 3 Medio Proportional Zahl zu finden, theil die obgemelte Differenz in 4 gleiche theil und addier der Theil eins zu der kleinern rothen Zahl so haben wir die erste rothe Zahl derselben schwarzen medio Proportionalzahl und addier derselben theil 2 zu derselben kleinern rothen Zahl so haben wir die andere rothe Zahl derselbigen schwarzen medio Proportional Zahl oder addier derselben theil 3 zu der kleinen rothen Zahl, so haben wir die dritte rothe Zahl derselben Schwarzen medio proportionalzahl.

Auf dieße weg können alle medio proportional Zahlen gefunden werden, so die 2 gegebene Zahlen gleiche Summa Ziffern haben, alß weiter in folgendem Exempel zu ersehen.

Zwischen 2 Zahlen ein Medio Proportional Zahl zu finden.

Es zeigen aber die 2 gegebenen Zahlen nit mit gleichen Summen Ziffern, denn die erste hat 7 Ziffern die andere 8 und seindt alß 2447471 und die ander 33033604. Such ihre gebürende rothe Zahl

ist . . . . . . . . *89510* und *119500*
die addier zusammen . . . . . . *89510*
gibt dieße rothe Zahl . . . . . *209010* dieweil aber eine Zahl
ein Ziffer mehr hat denn die andere . *230270022* so wirdt ganz rothe
Zahl darzu addiert ist . . . . . *439288022* diese rothe ist halb
*219640011*
die schwarze ist dieße medio proportional Zahl 8991598411.

Zwischen 2 Zahlen ein Medio Proportional Zahl zu finden.

Es zeigen aber die 2 Zahlen nit mit gleichen Summen Ziffern, dann die erste hat 7 Ziffern die andere hat 8 und stehent also 2447471 und die ander 330336040. ihre rothe Zahl ist

*89510* die ander *119500*
die addier zusammen . . . . . *89510*
thut zusammen . . . . . . . *209010* darzu addier 2 ganze
rothe Zahl dieweil die größer die . . *230270022* kleine mit 2 Ziffer
übertrifft, so *230270022*
kombt . . . . . . . . . . . . *669550044*
diße rothe Zahl halbir ist die rothe Zahl *334775022*
der gebürenden schwarzen Zahl, dieweils
aber größer ist dann die ganze rothe Zahl,
so wird die ganze rothe Zahl subtrairt . *230270022*
so bleibt die rothe Zahl der medio proport' Zahl . . . . . . . . . . *104505000*
welche ist . . . . . . . . . . 284339213.

Zwischen zweyen Zahlen ein Medio Proportional Zahl zu finden.

Es zeigen aber die 2 Zahlen die mir vorfallen alß folget:
die erste mit 6 Ziffern, die andere mit 9 Ziffern
die erste 303419 die ander 304939818 ihr gebürende rothe

*111000* Zahl und *111500*
*111000*
Addier zusammen thut . . . *222500*
darzu addier 3 ganze rothe Zahl dieweil ein Zahl die ander mit 3 Ziffer *230270022*
*230270022*
übertrifft, so *230270022*
kombt die rothe Zahl . . . . . *913210066* halbirt.
von dißer halben Zahl sub die ganze rothe *456605033*
*230270022*
so bleibt dieße rothe Zahl . . . . *226335011*

der gebürende medio proportional Zahl welche ist 961415942 und ist umb ein Ziffer mehr denn die erst und das ist der beweiß daß ich die ganze rothe Zahl nicht mehr denn einmahl von der halben halbirten rothen Zahl hab nemen mögen.

Zwischen 2 Zahlen ein medio proportional Zahl zu finden.

Es zeigen aber die 2 Zahlen, die mir vorfallen, alß folget.
Die erste mit 5 Ziffern die andere mit 9 Ziffern und ist die erste 32891 Die andere ist 454907654

ihre gebürende 119067851 rothe Zahl 151500000
Addier zusammen . . . . . . . 119067851

thuet dieße rothe Zahl . . . . 270567851
darzu addir 4 ganze rothe Zahl dieweil eine die andere mit 4 Ziffern übertrifft.
280270022
280270022
280270022
280270022

So kombt dieße rothe Zahl die halbier 1191647439

und von der halben rothen subtrahir 5958237 19 $\frac{1}{2}$

die ganze rothe Zahl und such deren schwarze.

Zwischen 2 Zahlen ein Medio Proportional Zahl zu finden.

Es zeigen aber die 2 Zahlen die mir vorkommen, alß die Erst mit 4 Ziffern die andere mit 9 Ziffern und stehende alß 5764 die ander 387649833

ihre gebürende 175170640 rothe Zahl 135500000 die
Addier zusammen . . . . . . . . . . . . . . 175170640

macht dieße rothe Zahl . . . . . . . . . . . 310670640
Darzu fünff ganzer rothe Zahl dieweil die eine die ander mit fünff Ziffern übertrifft.
280270022
280270022
280270022
280270022
280270022

Dieße addierte rothe Zahl halbier 1462020750
ist dieße rothe Zahl . . . . . . . . . . . . 731010375
Darvon subtrire die ganze rothe Zahl so offt als ich mag, in dießem Exempel 3 mahl, darumb wirdt die Medio proportional Zahl 3 Ziffern mehr haben dann die Erste
und bleibt ihre rothe Zahl . . . . . . . . . . 402008309

Dießer gebührender schwarzer Zahl ist die
Medio proportional Zahl . . . . . . . . . . . . . 149478591.

Zwischen 2 Zahlen 2 Medio Proportional Zahlen zu finden.

Es ist auf unsre meinung eine geringe Verenderung ein 234 oder mehr Medio Proportional Zahlen zwischen 2 bekandten Zahlen zu finden, darumb wollen wir die Verenderung bekandt machen durch ein Exempel, welches zu vornen durch bekannte Zahlen gegeben ist und zeigen die 2 Zahlen

119004521 und 893423483

ihre gebürende rothe Zahl ist *17400* und *219000* .

die Differenz der rothen Zahl ist *201600* die

theil in 3 theil ist . . . . *67200*

Ein Drittheil addier zu der kleinen rothe Zahl . . . . . *17400*

So ist die rote Zahl der ersten Proportio . . . . . . . *84600* Zahl

ihre gebührende schwarze Zahl ist die 23020839.

Zwei Drittheil der Differenz der roth Zahl ist *134400*

und die kleinere rothe Zahl addier darzu *17400*

diß ist die rothe Zahl der ander Proportional *151800* Zahl.

ihre gebürende Schwarze Zahl ist die 459326198.

| A. | B. | C. | D. |
|---|---|---|---|
| 119004521 | 23020839 | 45932698 | 893423483 |
| *17400* | *84600* | *151800* | *219000* |

Wie sich helt A zu B also helt sich B zu C und C zu D.

Zwischen 2 Zahlen 3 Medio Proportional Zahlen zu finden.

Es zeigen die zwo bekannten Zahlen 119004521 und 893423483

ihre gebürende rothe Zahl ist *17400* der ander *219000*

ihre Differenz ist . . . . . . . . . . . . *201600*

die theil in 4 gleiche theil in ein theil *50400*

*17400*

der theil eins addiere zu der kleinen rothen Zahl *67800* die ist die gebürende rothe Zahl der Schwarz 196986715 diese ist die erste ungleich Medio proportional Zahl.

Zum andern addier $\frac{2}{4}$ der rothen Differenz zu der kleinen rothen Zahl alß

*50400*

*50400*

und die kleinere rothe Zahl . . . . . . *17400*

gibt die rothe Zahl der ander Proportional *118200* Zahl

Welches ist ihre gebürende Schwarze Zahl 326069676.

die ander begehrte.

Zum dritten addier $\frac{3}{4}$ der rothen Differenz 50400
50400
50400
und die kleinere rothe Zahl . . . . . . . . 17400
diß ist die rothe Zahl der dritten Proportional 168600 Zahl:
welche ist ihre gepürende Schwarze Zahl 539738109
die dritte begehrte.

Zwischen 2 Vier Medio Proportional Zahlen zu finden.

Es zeigen die bekannten Zahlen alß 119004521 und 893423483
ihre gebührende rothe Zahl ist . . . 17400 die ander 219000
ihre Differenz ist . . . . . . . . . . . . . 201600
die theil in 5 gleiche theil, der ist . . . . . . . 40320
die kleine rothe Zahl addier zu der $\frac{1}{5}$ . . . . . 17400
diß ist die rothe Zahl der . . . . . . . . . . 57720
gebürender Schwarzen Ersten Medio Proportional Zahl 178099312.

Zum andern addier $\frac{2}{5}$ zu der kleinen roth Zahl 40320
40320
die kleinere rothe Zahl . . . . . . . . . . . . 17400
thut zusammen die gebürendt rothe Zahl der 98040
ander Medio Proportional Zahl welche ist 266565813.

Zum dritten addire $\frac{3}{5}$ zu der kleinen rothen Zahl 40320
40320
40320
die kleinere rothe Zahl . . . . . . . . . . . . 17400
thut zusammen die gebürendt rothe Zahl der 138360
dritten Medio Proportional Zahl welche ist 398896111.

Zum vierten addier $\frac{4}{5}$ zu der kleinern rothen Zahl 161280
die kleinere rothe Zahl . . . . . . . . . . . . 17400
thut zusammen die gebürende rothe Zahl der 178680
vierten Medio Proportional Zahl, welche ist 596978352.

# XXIII.

## Miscellen.

Von dem Herausgeber.

### I.

In der Abhandlung: De symptomatibus quatuor punctorum in eodem plano sitorum. Acta Academiae scientiar. Imp. Petrop. 1782. P. I. p. 3. hat Euler eine sehr bemerkenswerthe Relation zwischen den sechs geraden Linien, die vier in einer Ebene liegende Punkte unter einander verbinden, bewiesen, und zur Auflösung verschiedener Aufgaben angewandt, von denen er sagt: „Huiusmodi quaestiones a Geometris quidem plures sunt pertractatae, verum earum solutiones plerumque ingentem propositionum geometricarum farraginem requirunt; quin etiam plures novas rectas in figura duci oportet, ex quibus certae relationes cum reliquis colligi queant, unde tandem solutio desiderata obtineri possit. Hic igitur in gratiam Geometrarum non parum ostendisse juvabit, quomodo ope duorum tantum Lemmatum omnes huiusmodi quaestiones pertractare et ad solutionem perducere liceat, ita ut nullis aliis rectis in subsidium vocandis sit opus.“ Man sieht aus diesen Worten u. A. auch, dass schon einem Euler ein solches Gewirr von Hülfslinien, mit denen namentlich jetzt manche Schriftsteller ihre geometrischen Figuren zum wahren Schrecken der Schüler, für die diese sogenannten Uebungen häufig bestimmt sein sollen, zu überziehen und völlig zu bedecken belieben, nicht zusagte, wie dies auch aus allen übrigen geometrischen Arbeiten dieses grossen Mannes sehr deutlich erhellet; ein solches Gewirr von Hülfslinien lässt sich aber in der That auch fast immer vermeiden, wenn man die betreffende Untersuchung auf ihre allgemeineren Principien zurückführt und durch

vorausgeschickte Lemmata, wie die älteren feineren Geometer immer thaten, erleichtert und vereinfacht, was namentlich der Uebersichtlichkeit stets sehr förderlich und besonders immer dann unbedingt nothwendig ist, wenn es sich um geometrische Uebungen für Schüler handelt. Die in Rede stehende allgemeine Relation zwischen den sechs geraden Linien, welche vier in einer Ebene liegende Punkte unter einander verbinden, hat Euler mit Hülfe mehrerer trigonometrischer Sätze und mittelst mancherlei Transformationen bewiesen, die zwar, wie dies bei einem Euler nicht anders sein kann, lehrreich, aber doch auch von Weitläufigkeiten nicht frei sind; auch scheinen mir die von Euler gegebenen Ausdrücke der in Rede stehenden Relation nicht die einfachsten zu sein. Ich will daher diese Relation in dem vorliegenden Aufsatze auf eine mir sehr einfach scheinende Weise entwickeln und zugleich auch auf ihren einfachsten Ausdruck zu bringen suchen. Freilich wird man sagen, die folgende Entwickelung nehme die analytische Geometrie in Anspruch; aber dies liegt im vorliegenden Falle mehr in der Bezeichnung, als in der Sache, und geschieht hier bloss der Einfachheit und Kürze wegen; denn in der That setzt die ganze folgende Entwickelung nichts weiter als den pythagoräischen Lehrsatz voraus, und hält sich insofern selbst weit mehr im Gebiete der reinen Geometrie, als die Entwickelung Euler's, welche trigonometrische Sätze zu Hülfe nimmt. Wem die Bezeichnungen und Begriffe der analytischen Geometrie nicht zusagen, wird dieselben aus dem Folgenden leicht ausscheiden und durch andere ihm mehr geläufige ersetzen können. Die sechs geraden Linien, welche die vier Punkte unter einander verbinden, werde ich im Folgenden absichtlich ganz eben so wie Euler bezeichnen.

Die vier Punkte wollen wir durch $A$, $B$, $C$, $D$; die Linien $BC$, $CA$, $AB$ respective durch $a$, $b$, $c$, und die Linien $AD$, $BD$, $CD$ respective durch $p$, $q$, $r$ bezeichnen. Nehmen wir dann den Punkt $D$ als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems an und bezeichnen die Coordinaten der Punkte $A$, $B$, $C$ respective durch $x, y$; $x_1, y_1$; $x_2, y_2$; so haben wir die folgenden Gleichungen:

$$x^2+y^2=p^2,\quad x_1{}^2+y_1{}^2=q^2,\quad x_2{}^2+y_2{}^2=r^2$$

und

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=a^2,$$

$$(x_2-x)^2+(y_2-y)^2=b^2,$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=c^2.$$

Zieht man die drei ersten Gleichungen der Reihe nach von den drei letzten ab, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$2(x_1x_2+y_1y_2)=q^2+r^2-a^2,$$
$$2(x_2x\ +y_2y)\ =r^2+p^2-b^2,$$
$$2(xx_1\ +yy_1)\ =p^2+q^2-c^2.$$

Nimmt man nun aber, was offenbar, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet ist, die Linie $DA$ als den positiven Theil der Axe der ersten Coordinaten an, so ist $x=p$, $y=0$, und die drei vorhergehenden Gleichungen gehen dann in die folgenden über:

$$2(x_1x_2+y_1y_2)=q^2+r^2-a^2,$$
$$2px_2=r^2+p^2-b^2,$$
$$2px_1=p^2+q^2-c^2.$$

Also ist

$$x_1=\frac{p^2+q^2-c^2}{2p},\quad x_2=\frac{r^2+p^2-b^2}{2p};$$

und folglich, weil

$$y_1^2=q^2-x_1^2,\quad y_2^2=r^2-x_2^2$$

ist:

$$y_1^2=q^2-\frac{(p^2+q^2-c^2)^2}{4p^2},\quad y_2^2=r^2-\frac{(r^2+p^2-b^2)^2}{4p^2};$$

also

$$4y_1^2y_2^2=4\{q^2-\frac{(p^2+q^2-c^2)^2}{4p^2}\}\{r^2-\frac{(r^2+p^2-b^2)^2}{4p^2}\}.$$

Nach dem Obigen ist aber

$$2y_1y_2=q^2+r^2-a^2-2x_1x_2,$$

also

$$2y_1y_2=q^2+r^2-a^2-\frac{(r^2+p^2-b^2)(p^2+q^2-c^2)}{2p^2},$$

folglich

$$4y_1^2y_2^2=\{q^2+r^2-a^2-\frac{(r^2+p^2-b^2)(p^2+q^2-c^2)}{2p^2}\}^2,$$

und daher, wenn man dies mit dem Obigen vergleicht:

$$\{q^2+r^2-a^2-\frac{(r^2+p^2-b^2)(p^2+q^2-c^2)}{2p^2}\}^2$$

$$=4\{q^2-\frac{(p^2+q^2-c^2)^2}{4p^2}\}\{r^2-\frac{(r^2+p^2-b^2)^2}{4p^2}\},$$

welche Gleichung man nach einigen ganz leichten Reductionen sogleich auf die folgende Form bringt:

$$p^2(q^2+r^2-a^2)^2+q^2(r^2+p^2-b^2)^2+r^2(p^2+q^2-c^2)^2$$

$$=4p^2q^2r^2+(q^2+r^2-a^2)(r^2+p^2-b^2)(p^2+q^2-c^2).$$

Dies ist die allgemeine Relation, welche zwischen den sechs, die vier Punkte $A$, $B$, $C$, $D$ unter einander verbindenden Linien $a$, $b$, $c$, $p$, $q$, $r$ jederzeit Statt findet, und zugleich die vorstehende Form derselben nach meiner Meinung die einfachste, wenn auch freilich nicht in Abrede zu stellen ist, dass bei weiterer Entwickelung dieser Gleichung sich eine grössere Anzahl von Gliedern derselben gegenseitig aufheben.

Euler findet nach seiner Methode diese Relation unter der folgenden Form:

$$\left.\begin{array}{r} a^2p^2(a^2+p^2-b^2-c^2-q^2-r^2)+a^2q^2r^2 \\ +b^2q^2(b^2+q^2-c^2-a^2-r^2-p^2)+b^2r^2p^2 \\ +c^2r^2(c^2+r^2-a^2-b^2-p^2-q^2)+c^2p^2q^2 \\ +a^2b^2c^2 \end{array}\right\}=0$$

oder

$$\left.\begin{array}{l} a^2q^2r^2-a^2p^2\{(b^2+c^2-a^2)+(q^2+r^2-p^2)\} \\ +b^2r^2p^2-b^2q^2\{(c^2+a^2-b^2)+(r^2+p^2-q^2)\} \\ +c^2p^2q^2-c^2r^2\{(a^2+b^2-c^2)+(p^2+q^2-r^2)\} \\ +a^2b^2c^2 \end{array}\right\}=0,$$

welche aus der von uns gefundenen Form leicht abgeleitet wird, wenn man die Quadrate und Producte gehörig entwickelt. Auch kann man diese Gleichung auf folgende Art darstellen:

$$\left.\begin{array}{r} a^2p^2(a^2+p^2)+a^2q^2r^2 \\ +b^2q^2(b^2+q^2)+b^2r^2p^2 \\ +c^2r^2(c^2+r^2)+c^2p^2q^2 \\ +a^2b^2c^2 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{l} a^2p^2(b^2+c^2+q^2+r^2) \\ +b^2q^2(c^2+a^2+r^2+p^2) \\ +c^2r^2(a^2+b^2+p^2+q^2). \end{array}\right.$$

Dass diese Gleichungen bei der Auflösung vieler Aufgaben treffliche Dienste leisten können, leuchtet von selbst ein. Sind z. B. von den sechs Linien $a$, $b$, $c$, $p$, $q$, $r$ fünf, etwa $a$, $b$, $c$, $p$, $q$, gegeben, und die sechste $r$ soll gefunden werden, so wird man die oben gefundene Gleichung auf die folgende Form einer Gleichung des vierten Grades bringen:

$$\left.\begin{array}{l} e^2r^4-\{(a^2-b^2)(p^2-q^2)+c^2(a^2+b^2-c^2+p^2+q^2)\}r^2 \\ \quad +(a^2p^2-b^2q^2)(a^2-b^2+p^2-q^2)+c^2(a^2-q^2)(b^2-p^2) \end{array}\right\}=0.$$

Wir wollen jetzt das Viereck $ABCD$ betrachten, indem wir dessen Seiten $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ nach der Reihe durch $a$, $b$, $c$, $d$ und die beiden Diagonalen $AC$, $BD$ durch $e$, $f$ bezeichnen. Dann müssen wir im Obigen

$$a=b, \quad b=e, \quad c=a, \quad p=d, \quad q=f, \quad r=c$$

setzen, wodurch wir die folgende Gleichung erhalten:

$$\left.\begin{array}{r} b^2d^2(b^2+d^2-e^2-a^2-f^2-c^2)+b^2f^2c^2 \\ +e^2f^2(e^2+f^2-a^2-b^2-c^2-d^2)+e^2c^2d^2 \\ +a^2c^2(a^2+c^2-b^2-e^2-d^2-f^2)+a^2d^2f^2 \\ +b^2e^2a^2 \end{array}\right\}=0$$

oder:

$$\left.\begin{array}{l} e^4f^2+e^2f^4-(a^2+b^2+c^2+d^2)e^2f^2 \\ \qquad (a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2)e^2 \\ \qquad (a^2d^2+b^2c^2-a^2c^2-b^2d^2)f^2 \\ \qquad (a^2c^2-b^2d^2)(a^2+c^2-b^2-d^2) \end{array}\right\}=0.$$

Sind je zwei gegenüberstehende Seiten des Vierecks $ABCD$ einander gleich, so ist $a=c$ und $b=d$, und die vorstehende Gleichung nimmt also in diesem Falle die folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{array}{r} e^4f^2+e^2f^4-2(a^2+b^2)e^2f^2-(a^2-b^2)^2e^2-(a^2-b^2)^2f^2 \\ +2(a^2-b^2)^2(a^2+b^2) \end{array}\right\}=0,$$

oder, wie man sogleich übersieht, die Gestalt:

$$\{e^2+f^2-2(a^2+b^2)\}\{e^2f^2-(a^2-b^2)^2\}=0,$$

so dass also entweder

$$e^2+f^2-2(a^2+b^2)=0 \quad \text{oder} \quad e^2f^2-(a^2-b^2)^2=0,$$

d. i. entweder

$$2(a^2+b^2)=e^2+f^2 \quad \text{oder} \quad (a^2-b^2)^2=e^2f^2$$

ist. Die erste dieser beiden Gleichungen gilt bekanntlich dann, wenn das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist. Die zweite Gleichung, welche man, vorausgesetzt, dass $a$ grösser als $b$ ist, kürzer unter der Form

$$a^2-b^2=ef$$

darstellen kann, gilt dann, wenn das Viereck $ABCD$ die in Taf. IX. Fig. 6. dargestellte Form hat, wo die Gegenseiten $AB=a$, $CD=c$ und $BC=b$, $DA=d$ wieder einander gleich sind. Denn in diesem Falle sind offenbar die Dreiecke $ABC$, $ACD$ und $ABD$, $BCD$ einander congruent, also $\angle ACB=\angle CAD$ und $\angle ADB=\angle CBD$, folglich

$$\angle ACB+\angle ADB=\angle CAD+\angle CBD=2R,$$

so dass sich also um das Viereck $ACBD$ ein Kreis beschreiben lässt, und daher nach dem Ptolemäischen Lehrsatze

$$AC.BD+AD.BC=AB.CD$$

oder

$$AC.BD+BC^2=AB^2,$$

also

$$AB^2-BC^2=AC.BD, \quad \text{d. i.} \quad a^2-b^2=ef$$

ist, wie bewiesen werden sollte.

Wenn im Allgemeinen das Viereck $ABCD$ ein Kreisviereck ist, so ist nach dem Ptolemäischen Lehrsatze

$$AB.CD+BC.DA=AC.BD,$$

also

$$ac+bd=ef.$$

Setzen wir nun in der obigen allgemeinen Gleichung $ac+bd$ für $ef$, so wird dieselbe:

$$\left.\begin{aligned}(ac+bd)^2(e^2+f^2)+(a^2b^2+c^2d^2-a^2c^2-b^2d^2)\,e^2\\ +(a^2d^2+b^2c^2-a^2c^2-b^2d^2)\,f^2\\ +(a^2c^2-b^2d^2)(a^2+c^2-b^2-d^2)\\ -(ac+bd)^2(a^2+b^2+c^2+d^2)\end{aligned}\right\}=0,$$

also, wie man leicht findet:

$$(ab+cd)^2e^2+(ad+bc)^2f^2-2(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)=0,$$

und folglich, wenn man wieder

$$ac+bd=ef$$

setzt:

$$(ab+cd)^2e^2+(ad+bc)^2f^2-2(ab+cd)(ad+bc)ef=0,$$

also:

$$\{(ab+cd)e-(ad+bc)f\}^2=0,$$

folglich:

$$(ab+cd)e-(ad+bc)f=0,$$

oder

$$(ab+cd)e=(ud+bc)f,$$

oder

$$ad+bc:ab+cd=e:f,$$

in welcher Proportion gleichfalls eine merkwürdige, leicht in Worten auszusprechende Eigenschaft des Kreisvierecks enthalten ist.

Für jedes Kreisviereck hat man also die beiden Gleichungen:

$$ac+bd=ef,\quad \frac{ad+bc}{ab+cd}=\frac{e}{f};$$

in denen eigentlich die vollständige Theorie des Kreisvierecks enthalten ist. Leicht erhält man aus diesen beiden Gleichungen:

$$e^2=\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd},\quad f^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc};$$

also zur Berechnung der Diagonalen eines Kreisvierecks aus seinen vier Seiten die Formeln:

$$e=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}},\quad f=\sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}.$$

Weitere Betrachtungen über diesen Gegenstand überlassen wir dem Leser. Die allgemeine Gleichung kann noch zu verschiedenen anderen bemerkenswerthen Folgerungen Veranlassung geben.

G.

---

## II.

Die Grundfläche $AA'A''A'''$ eines vierseitigen gerade stehenden schief abgeschnittenen Prisma's sei ein Trapezium mit den

parallelen Seiten $AA'$ und $A''A'''$, und $h$, $h'$, $h''$, $h'''$ seien die den Punkten $A$, $A'$, $A''$, $A'''$ entsprechenden vier Höhen dieses Prismas, dessen körperlichen Inhalt wir durch $P$ bezeichnen wollen. Zieht man die Diagonale $A'A'''$ der Grundfläche und denkt sich das in Rede stehende vierseitige schief abgeschnittene Prisma in zwei dreiseitige schief abgeschnittene Prismen mit den Grundflächen $AA'A'''$ und $A'A''A'''$ zerlegt, so ist nach einem allgemein bekannten stereometrischen Satze:

$$P = \Delta AA'A''' . \frac{h+h'+h'''}{3} + \Delta A'A''A''' . \frac{h'+h''+h'''}{3}.$$

Zieht man dagegen die Diagonale $AA''$ der Grundfläche und denkt sich das vierseitige schief abgeschnittene Prisma in zwei dreiseitige schief abgeschnittene Prismen mit den Grundflächen $AA'A''$ und $AA''A'''$ zerlegt, so ist ganz eben so:

$$P = \Delta AA'A'' . \frac{h+h'+h''}{3} + \Delta AA''A''' . \frac{h+h''+h'''}{3}.$$

Weil nun aber die Grundfläche $AA'A''A'''$ des Prismas $P$ ein Trapezium mit den parallelen Seiten $AA'$ und $A''A'''$ ist, so ist $\Delta AA'A''' = \Delta AA'A''$ und $\Delta A'A''A''' = \Delta AA''A'''$; also nach dem Obigen, wenn man addirt und der Kürze wegen

$$\Delta AA'A''' = \Delta AA'A'' = G,$$

$$\Delta A'A''A''' = \Delta AA''A''' = G'$$

setzt:

$$2P = G . \frac{2h+2h'+h''+h'''}{3} + G' . \frac{h+h'+2h''+2h'''}{3},$$

also:

$$P = G . \frac{2h+2h'+h''+h'''}{6} + G' . \frac{h+h'+2h''+2h'''}{6},$$

wo die doppelt genommenen Höhen $h$, $h'$ der parallelen Seite $AA'$, die doppelt genommenen Höhen $h''$, $h'''$ der parallelen Seite $A''A'''$ des Trapeziums entsprechen.

Wenn das Trapezium $AA'A''A'''$ in ein Parallelogramm übergeht, so dass auch die Seiten $AA'''$ und $A'A''$ einander parallel werden, so sind die beiden Dreiecke $G$ und $G'$ einander gleich, also nach dem Obigen:

$$P = G . \frac{3h+3h'+3h''+3h'''}{6} = G . \frac{h+h'+h''+h'''}{2}.$$

oder

$$P=2G.\frac{h+h'+h''+h'''}{4};$$

und bezeichnen wir nun die ganze Grundfläche des Prismas durch $\mathfrak{G}$, so ist $\mathfrak{G}=2G$, also:

$$P=\mathfrak{G}\frac{h+h'+h''+h'''}{4}.$$

---

### III.

In einer des grossen Meisters vollkommen würdigen Abhandlung über die sogenannten vier merkwürdigen Punkte des ebenen Dreiecks: „Solutio facilis problematum quorundam geometricorum difficillimorum. Novi Commentarii Acad. Scientiar. Imp. Petrop. T. XI. p. 103." hat Euler eine Reihe überaus merkwürdiger Ausdrücke entwickelt, die jedenfalls nicht so bekannt sind, wie sie zu sein verdienen, obgleich schon G. U. A. Vieth in seinem „Lehrbuche der reinen Mathematik. Thl. II. 1825. Funfzehnte Abhandlung" eine mir selbst übrigens niemals zu Gesicht gekommene neue Bearbeitung dieser schönen Abhandlung Euler's geliefert hat. Es scheint mir daher zweckmässig, die wichtigsten von Euler erhaltenen Resultate in einer zum Theil mir eigenthümlichen Entwickelungsweise den Lesern des Archivs mitzutheilen und in dieser Zeitschrift aufzubewahren. G.

Das Dreieck sei $ABC$, die Winkel und Seiten desselben werden auf die in der Trigonometrie gewöhnliche Weise bezeichnet. Den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der drei Höhen, den Schwerpunkt, den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises wollen wir respective durch $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ bezeichnen. Den Punkt $A$ nehmen wir als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der $xy$ an; die Seite $AB$ des Dreiecks $ABC$ sei der positive Theil der Axe der $x$; die positiven $y$ werden auf der Seite von $AB$ genommen, auf welcher die Spitze $C$ des Dreiecks $ABC$ liegt. In diesem Systeme bezeichnen wir die Coordinaten der Punkte $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ respective durch $x_0$, $y_0$; $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$; $x_3$, $y_3$. Der Flächeninhalt des Dreiecks $ABC$ werde durch $\Delta$ bezeichnet.

#### I.

Zuerst wollen wir nun diese Coordinaten sämmtlich durch die Seiten des Dreiecks $ABC$ ausdrücken.

In Betreff des Punktes $P_0$ überzeugt man sich zunächst unmittelbar von der ganz allgemeinen Gültigkeit der beiden Gleichungen:

$$x_0 = b\cos A, \quad y_0 = x_0 \cot B;$$

also:

$$x_0 = b\cos A, \quad y_0 = b\cos A \cot B.$$

Nach den Lehren der Trigonometrie ist aber

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \quad \sin B = \frac{2\varDelta}{ca};$$

also

$$\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4\varDelta},$$

und folglich:

$$x_0 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}, \quad y_0 = \frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)}{8c\varDelta}.$$

Was ferner den Punkt $P_1$ betrifft, so überzeugt man sich auf der Stelle von der Richtigkeit der zwei folgenden Gleichungen:

$$x_1 = \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{3}(x_0 - \tfrac{1}{2}c), \quad y_1 = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{2\varDelta}{c};$$

also:

$$x_1 = \tfrac{1}{3}(c + x_0), \quad y_1 = \frac{2\varDelta}{3c}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$c + x_0 = c + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c} = \frac{b^2+3c^2-a^2}{2c},$$

also:

$$x_1 = \frac{b^2+3c^2-a^2}{6c}, \quad y_1 = \frac{2\varDelta}{3c}.$$

Ferner ist in Betreff des Punktes $P_2$ offenbar in völliger Allgemeinheit:

$$x_2 = y_2 \cot\tfrac{1}{2}A, \quad y_2 = \frac{2\varDelta}{a+b+c};$$

also:

$$x_2 = \frac{2\varDelta\cot\tfrac{1}{2}A}{a+b+c}, \quad y_2 = \frac{2\varDelta}{a+b+c}.$$

Nun ist aber bekanntlich nach den Lehren der ebenen Geometrie:

$$\Delta=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)},$$

und nach bekannten trigonometrischen Formeln:

$$\cos\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(c+a-b)(a+b-c)}{4bc}};$$

also

$$\cot\tfrac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(c+a-b)(a+b-c)}},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$x_2=\frac{b+c-a}{2},\quad y_2=\frac{2\Delta}{a+b+c}.$$

Was endlich den Punkt $P_3$ betrifft, so überzeugt man sich mittelst einer einfachen geometrischen Betrachtung sogleich von der allgemeinen Gültigkeit der zwei Gleichungen:

$$x_3=\frac{1}{2}c,\quad \frac{1}{2}c=y_3\tang C \text{ oder } x_3=\frac{1}{2}c,\quad y_3=\frac{1}{2}c\cot C.$$

Nun ist aber

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab},\quad \sin C=\frac{2\Delta}{ab};$$

also

$$\cot C=\frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$x_3=\frac{1}{2}c,\quad y_3=\frac{c(a^2+b^2-c^2)}{8\Delta}.$$

Auf diese Weise erhält man, wie es mir scheint, die Ausdrücke der Coordinaten $x_0$, $y_0$; $x_1$, $y_1$; $x_2$, $y_2$; $x_3$, $y_3$ durch die Seiten $a$, $b$, $c$ des Dreiecks $ABC$ am leichtesten; Euler bedient sich zur Entwickelung derselben bloss der gemeinen Geometrie, was aber, wenn man sich zugleich von der allgemeinen Gültigkeit der Formeln rücksichtlich der Vorzeichen der Coordinaten überzeugen will, nach meiner Meinung nicht so zweckmässig ist wie der Gebrauch der allgemeinen trigonometrischen Formeln, in

deren Anwendung der vorliegende Gegenstand zugleich eine gute Uebung für Anfänger darbietet.

Rücksichtlich des Inhalts $\varDelta$ des Dreiecks $ABC$ bemerken wir noch, dass sich derselbe durch die drei Seiten $a$, $b$, $c$ bekanntlich auch auf folgende Art ausdrücken lässt:

$$\varDelta = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4},$$

wie auf der Stelle durch Entwickelung der Formel

$$\varDelta = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}bc\sqrt{1-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}}$$

folgt.

II.

Euler bestimmt nun die Entfernungen der Punkte $P_0$, $P_1$, $P_2$, $P_3$ von einander mittelst der bekannten Formeln:

$$P_0P_1{}^2 = (x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2,$$
$$P_0P_2{}^2 = (x_0-x_2)^2+(y_0-y_2)^2,$$
$$P_0P_3{}^2 = (x_0-x_3)^2+(y_0-y_3)^2,$$
$$P_1P_2{}^2 = (x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2,$$
$$P_1P_3{}^2 = (x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2,$$
$$P_2P_3{}^2 = (x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2;$$

und findet auf diese Weise:

$$P_0P_1{}^2 = \frac{1}{36\varDelta^2}\left\{\begin{array}{l} a^6+b^6+c^6 \\ -a^4(b^2+c^2)-b^4(c^2+a^2)-c^4(a^2+b^2) \\ +3a^2b^2c^2 \end{array}\right\},$$

$$P_0P_2{}^2 = \frac{1}{16\varDelta^2}\left\{\begin{array}{l} a^6+b^6+c^6 \\ -a^5(b+c)-b^5(c+a)-c^5(a+b) \\ -a^4(b^2+c^2)-b^4(c^2+a^2)-c^4(a^2+b^2) \\ +3a^4bc+3b^4ca+3c^4ab \\ -2a^3bc(b+c)-3b^3ca(c+a)-2c^3ab(a+b) \\ +2a^3b^3+2b^3c^3+2c^3a^3 \\ +6a^2b^2c^2 \end{array}\right\},$$

$$P_0P_3^2=\frac{1}{16\Delta^2}\left\{\begin{array}{l}a^6+b^6+c^6\\-a^4(b^2+c^2)-b^4(c^2+a^2)-c^4(a^2+b^2)\\+3a^2b^2c^2\end{array}\right\}$$

$$=\frac{9a^2b^2c^2}{16\Delta^2}-(a^2+b^2+c^2),$$

$$P_1P_2^2=\frac{1}{9(a+b+c)^2}\left\{\begin{array}{l}-a^4-b^4-c^4\\+a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)\\+4a^2b^2+4b^2c^2+4c^2a^2\\-5abc(a+b+c)\end{array}\right\},$$

$$P_1P_3^2=\frac{1}{144\Delta^2}\left\{\begin{array}{l}a^6+b^6+c^6\\-a^4(b^2+c^2)-b^4(c^2+a^2)-c^4(a^2+b^2)\\+3a^2b^2c^2\end{array}\right\},$$

$$P_2P_3^2=\frac{abc}{16(a+b+c)^2\Delta^2}\left\{\begin{array}{l}a^5+b^5+c^5\\+a^4(b+c)+b^4(c+a)+c^4(a+b)\\+abc(a^2+b^2+c^2)\\-2a^3(b^2+c^2)-2b^3(c^2+a^2)-2c^3(a^2+b^2)\end{array}\right\}$$

$$=\frac{abc}{16(a+b+c)\Delta^2}\left\{\begin{array}{l}a^4+b^4+c^4\\+abc(a+b+c)\\-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2\end{array}\right\}.$$

### III.

Um diese Ausdrücke zu vereinfachen, führt nun **Euler** die drei folgenden Hülfsgrössen ein:

$$p=a+b+c,\quad q=ab+bc+ca,\quad r=abc;$$

zwischen denen und den Seiten $a$, $b$, $c$ die folgenden ferneren Relationen Statt finden:

$$a^2+b^2+c^2=p^2-2q,$$

$$a^4+b^4+c^4=p^4-4p^2q+2q^2+4pr,$$

$$a^6+b^6+c^6=p^6-6p^4q+9p^2q^2-2q^3+6p^3r-12pqr-3r^2,$$

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2-2pr,$$

$$a^3(b+c)+b^3(c+a)+c^3(a+b)=p^2q-2q^2-pr,$$

$$abc(a+b+c)=pr,$$

$$a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)=p^2q^2-2q^3-2p^3r+4pqr-3r^2.$$

Nachdem er nun noch bemerkt hat, dass sich die Formel für $P_0P_2^2$ auch auf folgenden Ausdruck bringen lässt:

$$P_0P_2^2+(a^2+b^2+c^2)-(ab+bc+ca)$$

$$=\frac{abc}{4\Delta^2}\left\{\begin{array}{l}a^3+b^3+c^3\\ -a^2(b+c)-b^2(c+a)-c^2(a+b)\\ +3abc\end{array}\right\}$$

$$=\frac{abc(a^2+b^2+c^2-2ab-2bc-2ca)(a+b+c)+9a^2b^2c^2}{4\Delta^2},$$

findet er für die Quadrate der sechs Entfernungen leicht die folgenden Ausdrücke:

$$P_0P_1^2=\frac{r^2}{4\Delta^2}-\frac{4}{9}(p^2-2q),$$

$$P_0P_2^2=\frac{r^2}{4\Delta^2}-p^2+3q-\frac{4r}{p},$$

$$P_0P_3^2=\frac{9r^2}{16\Delta^2}-p^2+2q,$$

$$P_1P_2^2=-\frac{1}{9}p^2+\frac{5}{9}q-\frac{2r}{p},$$

$$P_1P_3^2=\frac{r^2}{16\Delta^2}-\frac{1}{9}(p^2-2q),$$

$$P_2P_3^2=\frac{r^2}{16\Delta^2}-\frac{r}{p}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt auf der Stelle:

$$P_0P_3=\frac{3}{2}P_0P_1,\quad P_1P_3=\frac{1}{2}P_0P_1.$$

Auch ist immer

$$4.P_2P_3^2+2.P_0P_2^2=3.P_0P_1^2+6.P_1P_2^2,$$

und andere Relationen würden sich leicht noch mehrere finden lassen.

IV.

Im Vorhergehenden sind die Quadrate der Entfernungen durch die vier Grössen $\Delta$, $p$, $q$, $r$ ausgedrückt. Euler zeigt nun endlich, dass die Quadrate der sechs Entfernungen, wenn man

$$4s = 4pq - p^3 - 8r$$

setzt, bloss durch die drei Grössen

$$P = p^2,\quad Q = \frac{r}{p},\quad R = \frac{r^2}{ps}$$

ausgedrückt werden können. Aus diesen Gleichungen folgt nämlich

$$p = \sqrt{P},\quad r = pQ = Q\sqrt{P},\quad s = \frac{r^2}{pR} = \frac{Q^2\sqrt{P}}{R};$$

also

$$q = \frac{4s + p^3 + 8r}{4p} = \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{Q^2}{R};$$

und weil nun

$$\begin{aligned}16\Delta^2 &= 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)\\ &= 2(q^2 - 2pr) - p^4 + 4p^2q - 2q^2 - 4pr\\ &= p(4pq - p^3 - 8r) = 4ps,\end{aligned}$$

also $4\Delta^2 = ps$ ist, so ist

$$4\Delta^2 = \frac{r^2}{R} = \frac{PQ^2}{R},$$

und:

$$P_0P_1^2 = R - \frac{2}{9}P + \frac{16}{9}Q + \frac{8Q^2}{9R},$$

$$P_0P_2^2 = R - \frac{1}{4}P + 2Q + \frac{3Q^2}{R},$$

$$P_0P_3^2 = \frac{9}{4}R - \frac{1}{2}P + 4Q + \frac{2Q^2}{R},$$

$$P_1P_2^2 = \frac{1}{36}P - \frac{8}{9}Q + \frac{5Q^2}{9R},$$

$$P_1P_3^2 = \frac{1}{4}R - \frac{1}{18}P + \frac{4}{9}Q + \frac{2Q^2}{9R},$$

$$P_2P_3^2 = \frac{1}{4}R - Q.$$

Aus je vieren dieser Gleichungen lassen sich die Grössen $P$, $Q$, $R$ ganz eliminiren, wodurch sich mannigfaltige Relationen zwischen den Quadraten der sechs Entfernungen ableiten lassen, was zu zweckmässigen Uebungen Veranlassung geben kann.

---

IV.

In der Abhandlung: De variis methodis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi. Commentarii Academiae scientiarum Petrop. T. IX. p. 222. hat Euler die folgenden allgemeinen Formeln zur Zerlegung eines Kreisbogens mit rationaler Tangente in andere Kreisbogen, deren Tangenten gleichfalls rational sind, angegeben:

$$\operatorname{Arctang}\frac{x}{y}=\operatorname{Arctang}\frac{ax-y}{ay+x}+\operatorname{Arctang}\frac{1}{a},$$

$$\operatorname{Arctang}\frac{x}{y}=\operatorname{Arctang}\frac{ax-y}{ay+x}+\operatorname{Arctang}\frac{b-a}{ab+1}+\operatorname{Arctang}\frac{1}{b},$$

$$\operatorname{Arctang}\frac{x}{y}=\operatorname{Arctang}\frac{ax-y}{ay+x}+\operatorname{Arctang}\frac{b-a}{ab+1}+\operatorname{Arctang}\frac{c-b}{bc+1}+\operatorname{Arctang}\frac{1}{c},$$

$$\operatorname{Arctang}\frac{x}{y}=\operatorname{Arctang}\frac{ax-y}{ay+x}+\operatorname{Arctang}\frac{b-a}{ab+1}+\operatorname{Arctang}\frac{c-b}{bc+1}$$
$$+\operatorname{Arctang}\frac{d-c}{cd+1}+\operatorname{Arctang}\frac{1}{d},$$

u. s. w.

Dass aus der ersten dieser Formeln die übrigen durch weitere Anwendung jener ersten Formel folgen, ist klar. Die oben genannte Abhandlung ist deshalb so wichtig, weil Euler in derselben das merkwürdige Hülfsmittel, durch Zerlegung der Kreisbogen mit rationaler Tangente in andere Kreisbogen mit rationalen Tangenten stark convergirende Reihen zur Berechnung des Kreisumfangs zu finden, zuerst vorgetragen hat.

In dieser wichtigen Abhandlung giebt Euler auch die beiden folgenden bekannten Formeln für den Umfang des eingeschriebenen und umschriebenen Sechsundneunzigecks an, den Halbmesser des Kreises der Einheit gleich gesetzt:

$$96.\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})})}$$

und

$$192.\frac{\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})})}}{\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})})}},$$

welche zwei Gränzen für den Umfang des Kreises liefern, so dass Euler also auch diese Form der vorstehenden Formeln zuerst gebraucht hat, die man in den Elementen jetzt häufig anwendet, um Anfängern die Möglichkeit der näherungsweisen Berechnung des Kreisumfangs anschaulich zu machen.

---

## V.

Bezeichnet man einen Vector einer Parabel durch $r$, und den von diesem Vector mit der von dem Brennpunkte nach dem Scheitel gezogenen Linie, welche wir durch $p$ bezeichnen wollen, so dass $4p$ der Parameter ist, eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch $\varphi$; so hat man nach der Natur der Parabel offenbar die Gleichung

$$r^2 \sin\varphi^2 = 4p(p - r\cos\varphi),$$

also

$$r^2 + \frac{4pr\cos\varphi}{\sin\varphi^2} = \frac{4p^2}{\sin\varphi^2},$$

und folglich, wenn man diese Gleichung in Bezug auf $r$ als unbekannte Grösse auflöst:

$$r = \pm\frac{2p(1\mp\cos\varphi)}{\sin\varphi^2},$$

also

$$r = +\frac{4p\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{\sin\varphi^2} \text{ oder } r = -\frac{4p\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2}{\sin\varphi^2}.$$

Weil aber $r$ seiner Natur nach positiv ist, so kann man nur

$$r = \frac{4p\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2}{\sin\varphi^2} \text{ oder } r = \frac{p}{\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2}$$

setzen, welches die bekannte Polargleichung der Parabel ist, die man auf diese Weise am leichtesten erhält.

Ist nun $r'$ der dem Vector $r$ direct entgegengesetzte Vector und $\varphi'$ der von demselben mit der von dem Brennpunkte nach dem Scheitel gezogenen Linie eingeschlossene, 180° nicht übersteigende Winkel, so ist natürlich ganz eben so:

$$r' = \frac{p}{\cos\frac{1}{2}\varphi'^2}.$$

Nun ist aber $\varphi' = 180^0 - \varphi$, also $\frac{1}{2}\varphi' = 90^0 - \frac{1}{2}\varphi$, und folglich:

$$r' = \frac{p}{\sin\frac{1}{2}\varphi^2}.$$

Also ist

$$\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{p}{r}, \quad \sin\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{p}{r'};$$

folglich, wenn man addirt:

$$\frac{p}{r} + \frac{p}{r_1} = 1 \text{ oder } \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{p},$$

woraus auch

$$p = \frac{rr'}{r+r'}$$

folgt, so dass also der vierte Theil des Parameters immer leicht aus zwei einander direct entgegengesetzten Vectoren berechnet werden kann.

Auch erhält man nun sogleich aus dem Obigen:

$$\cos\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{r'}{r+r'}, \quad \sin\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{r}{r+r'}, \quad \tang\frac{1}{2}\varphi^2 = \frac{r}{r'}$$

oder, da $\frac{1}{2}\varphi$ nicht grösser als $90^0$ ist:

$$\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{r'}{r+r'}}, \quad \sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{r}{r+r'}}, \quad \tang\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{r}{r'}};$$

und hieraus:

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{rr'}}{r+r'}.$$

Bezeichnen wir jetzt die den Winkeln $\varphi$ und $\varphi'$ entsprechenden Sectoren der Parabel respective durch $S$ und $S'$, so ist nach einer bekannten Formel der höheren Geometrie:

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2\partial\varphi,$$

also nach dem Obigen:

$$S = \frac{1}{2}p^2\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi^4}.$$

Setzen wir

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = u,\quad \sec\tfrac{1}{2}\varphi^2 = 1+u^2,\quad \cos\tfrac{1}{2}\varphi^2 = \frac{1}{1+u^2}$$

und

$$\frac{\tfrac{1}{2}\partial\varphi}{\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2} = \partial u,\quad \frac{\partial\varphi}{\cos\tfrac{1}{2}\varphi^4} = \frac{2\partial u}{\cos\tfrac{1}{2}\varphi^2} = 2(1+u^2)\partial u;$$

so ist

$$\int\frac{\partial\varphi}{\cos\tfrac{1}{2}\varphi^4} = 2\int(1+u^2)\partial u = 2(u+\tfrac{1}{3}u^3) = 2(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^3);$$

also auch

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\cos\tfrac{1}{2}\varphi^4} = 2(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^3),$$

und folglich nach dem Obigen:

$$S = p^2(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^3).$$

Ganz eben so ist

$$S' = p^2(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi' + \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi'^3),$$

oder, weil $\varphi' = 180^0 - \varphi$, $\tfrac{1}{2}\varphi' = 90^0 - \tfrac{1}{2}\varphi$ ist:

$$S' = p^2(\cot\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}\cot\tfrac{1}{2}\varphi^3).$$

Ist nun $\Sigma$ das von der durch die Vectoren $r$ und $r'$ gebildeten Sehne abgeschnittene Segment der Parabel, so ist

$$\Sigma = S + S',$$

und folglich nach dem Vorhergehenden:

$$\Sigma = p^2\{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi + \cot\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{3}(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^3 + \cot\tfrac{1}{2}\varphi^3)\},$$

also, wie man leicht findet:

$$\Sigma = p^2\frac{1+3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^2 + 3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^4 + \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^6}{3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^3}$$

oder

$$\Sigma = p^2\frac{(1+\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^2)^3}{3\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi^3} = \frac{p^2}{3\sin\tfrac{1}{2}\varphi^3\cos\tfrac{1}{2}\varphi^3}$$

oder

$$\Sigma = \frac{8p^2}{3\sin\varphi^3};$$

und weil nach dem Obigen

$$\sin\varphi^3 = \frac{8rr'\sqrt{rr'}}{(r+r')^3}$$

ist, so ist

$$\Sigma = \frac{p^2(r+r')^3}{3rr'\sqrt{rr'}}.$$

Weil aber

$$p = \frac{rr'}{r+r'}$$

ist, so ist auch

$$\Sigma = \tfrac{1}{3}(r+r')\sqrt{rr'}.$$

---

## VI.

### Aufgabe
### aus der Lehre von den Maximis und Minimis.

**Den Winkel $x$ so zu bestimmen, dass die Function**

$$y = \sin x^2 \sin(\theta - x),$$

**wo $\theta$ ein constanter, zwischen 0 und 180° liegender Winkel ist, und auch der Winkel $x$ zwischen 0 und 180° liegen soll, ein Maximum oder Minimum wird *).**

### Auflösung.

Differentiirt man $y$ nach $x$, so erhält man

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 2\sin x\cos x\sin(\theta - x) - \sin x^2\cos(\theta - x)$$
$$= \sin 2x\sin(\theta - x) - \sin x^2\cos(\theta - x),$$

und folglich

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\cos 2x\sin(\theta - x) - \sin 2x\cos(\theta - x)$$
$$- 2\sin x\cos x\cos(\theta - x) - \sin x^2\sin(\theta - x)$$
$$= (2\cos 2x - \sin x^2)\sin(\theta - x) - 2\sin 2x\cos(\theta - x)$$
$$= (2\cos x^2 - 3\sin x^2)\sin(\theta - x) - 2\sin 2x\cos(\theta - x).$$

---

*) Diese Aufgabe ist für die Nautik von Wichtigkeit. Hier erscheint sie nur als eine mir sehr zweckmässig scheinende Uebungsaufgabe aus der Lehre von den Maximis und Minimis.

Die gemeinschaftliche Bedingung des Maximums und Minimums ist

$$\sin 2x \sin(\theta - x) - \sin x^2 \cos(\theta - x) = 0,$$

d. i.

$$\sin x \{2\cos x \sin(\theta - x) - \sin x \cos(\theta - x)\} = 0,$$

eine Gleichung, welche in die beiden Gleichungen

$$\sin x = 0$$

und

$$2\cos x \sin(\theta - x) - \sin x \cos(\theta - x) = 0$$

zerfällt.

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen, nämlich aus der Gleichung

$$\sin x = 0,$$

ergiebt sich, weil $x$ zwischen 0 und 180° liegen soll, $x = 0$ oder $x = 180°$. Führt man dies in den zweiten Differentialquotienten ein, so erhält derselbe den Werth $2\sin\theta$; und da dieser Werth positiv ist, so wird die Function

$$y = \sin x^2 \sin(\theta - x)$$

für $x = 0$ und für $x = 180°$ ein Minimum.

Aus der zweiten der beiden obigen Gleichungen, nämlich aus der Gleichung

$$2\cos x \sin(\theta - x) - \sin x \cos(\theta - x) = 0,$$

folgt

$$2\cos x \sin(\theta - x) = \sin x \cos(\theta - x),$$

also

$$2\cot x \operatorname{tang}(\theta - x) = 1$$

oder

$$\frac{2(\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}x)}{1 + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}x} = \operatorname{tang}x,$$

also

$$2(\operatorname{tang}\theta - \operatorname{tang}x) = \operatorname{tang}x + \operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}x^2,$$

$$\operatorname{tang}\theta \operatorname{tang}x^2 + 3\operatorname{tang}x = 2\operatorname{tang}\theta,$$

$$\operatorname{tang}x^2 + 3\cot\theta \operatorname{tang}x = 2,$$

$$(\operatorname{tang}x + \tfrac{3}{2}\cot\theta)^2 = 2 + \tfrac{9}{4}\cot\theta^2 = \frac{8 + 9\cot\theta^2}{4},$$

$$\operatorname{tang}x + \tfrac{3}{2}\cot\theta = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{8 + 9\cot\theta^2};$$

folglich

$$\tang x = -\frac{3\cot\theta \mp \sqrt{8+9\cot\theta^2}}{2},$$

oder auch

$$\tang x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 \pm \sqrt{1+\frac{8}{9}\tang\theta^2}),$$

oder

$$\tang x = -\frac{3(1 \pm \sqrt{1+\frac{8}{9}\tang\theta^2})}{2\tang\theta}.$$

Wegen

$$\sin x\cos(\theta - x) = 2\cos x\sin(\theta - x)$$

ist nach dem Obigen der zweite Differentialquotient

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = (2\cos x^2 - 3\sin x^2)\sin(\theta - x) - 8\cos x^2\sin(\theta - x),$$

d. i.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -3(\sin x^2 + 2\cos x^2)\sin(\theta - x),$$

und das Zeichen von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist also immer dem Zeichen von $\sin(\theta - x)$ entgegengesetzt.

Es sei nun **erstens**

$$0 < \theta < 90^\circ.$$

In diesem Falle liefert in der Formel

$$\tang x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 \pm \sqrt{1+\frac{8}{9}\tang\theta^2})$$

das obere Zeichen offenbar einen negativen, das untere einen positiven Werth von $\tang x$, oder für das obere Zeichen ist

$$90^\circ < x < 180^\circ,$$

für das untere Zeichen dagegen ist

$$0 < x < 90^\circ.$$

Nimmt man daher das obere Zeichen, so ist jedenfalls

$$0 > \theta - x > -180^\circ,$$

folglich $\sin(\theta-x)$ negativ, also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv, und daher $y$ ein Minimum. Wäre, wenn man das untere Zeichen nimmt, $x>\theta$, so wäre, da

$$0<\theta<90^0,\quad 0<x<90^0$$

ist, auch $\operatorname{tang}x>\operatorname{tang}\theta$, folglich

$$-\frac{3}{2}\cot\theta(1-\sqrt{1+\frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2})>\operatorname{tang}\theta,$$

oder

$$\sqrt{1+\frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2}>1+\frac{2}{3}\operatorname{tang}\theta^2,$$

$$1+\frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2>1+\frac{4}{3}\operatorname{tang}\theta^2+\frac{4}{9}\operatorname{tang}\theta^4,$$

$$0>\frac{4}{9}\operatorname{tang}\theta^2(1+\operatorname{tang}\theta^2),$$

oder

$$0>\frac{4}{9}\operatorname{tang}\theta^2\sec\theta^2,$$

was offenbar ungereimt ist. Also ist $x<\theta$, und folglich

$$0<\theta-x<90^0,$$

daher $\sin(\theta-x)$ positiv, also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negativ, folglich $y$ ein Maximum.

Sei ferner zweitens

$$90^0<\theta<180^0.$$

In diesem Falle liefert in der Formel

$$\operatorname{tang}x=-\frac{3}{2}\cot\theta(1\pm\sqrt{1+\frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2})$$

das obere Zeichen offenbar einen positiven, das untere einen negativen Werth von $\operatorname{tang}x$, oder für das obere Zeichen ist

$$0<x<90^0,$$

für das untere Zeichen dagegen ist

$$90^0<x<180^0.$$

Nimmt man daher das obere Zeichen, so ist jedenfalls

$$0<\theta-x<180^0,$$

folglich $\sin(\theta - x)$ positiv, also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negativ, und daher $y$ ein Maximum. Wäre, wenn man das untere Zeichen nimmt, $x < \theta$, so wäre, da

$$90^0 < \theta < 180^0, \quad 90^0 < x < 180^0$$

ist, $-\operatorname{tang} x > -\operatorname{tang}\theta$, folglich

$$\frac{3}{2}\cot\theta(1 - \sqrt{1 + \frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2}) > -\operatorname{tang}\theta$$

oder

$$\frac{3}{2}(-\cot\theta)\left(\sqrt{1 + \frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2} - 1\right) > -\operatorname{tang}\theta,$$

also

$$\sqrt{1 + \frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2} > 1 + \frac{2}{3}\operatorname{tang}\theta^2,$$

was ganz wie vorher ungereimt ist. Daher ist $x > \theta$, und folglich

$$0 > \theta - x > -180^0,$$

daher $\sin(\theta - x)$ negativ, also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv, folglich $y$ ein Minimum.

Wenn also

$$0 < \theta < 90^0$$

ist, so ist $y$ für

$$\operatorname{tang} x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2})$$

ein Minimum, für

$$\operatorname{tang} x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 - \sqrt{1 + \frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2})$$

dagegen ein Maximum.

Wenn dagegen

$$90^0 < \theta < 180^0$$

ist, so ist $y$ für

$$\operatorname{tang} x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 + \sqrt{1 + \frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2})$$

ein Maximum, für

$$\operatorname{tang} x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 - \sqrt{1 + \frac{8}{9}\operatorname{tang}\theta^2})$$

dagegen ein Minimum.

Ein Maximum wird $y$ für

$$\tan g x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 \pm \sqrt{1+\frac{8}{9}\tan g\,\theta^2}),$$

wenn man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem $90^0 < \theta < 180^0$ oder $0 < \theta < 90^0$ ist.

Ein Minimum wird $y$ für

$$\tan g x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 \pm \sqrt{1+\frac{8}{9}\tan g\,\theta^2}),$$

wenn man in dieser Formel das obere oder untere Zeichen nimmt, jenachdem

$$0 < \theta < 90^0 \text{ oder } 90^0 < \theta < 180^0$$

ist.

Um $x$ mit Leichtigkeit berechnen zu können, berechne man den Hülfswinkel $\omega$ mittelst der Formel

$$\tan g\,\omega = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\tan g\,\theta),$$

wo $(\tan g\,\theta)$ den absoluten Werth von $\tan g\,\theta$ bezeichnen soll, und nehme $\omega$ zwischen 0 und $90^0$. Dann ist

$$\tan g x = -\frac{3}{2}\cot\theta(1 \pm \sqrt{1+\tan g\,\omega^2}),$$

d. i.

$$\tan g x = -\frac{3}{2}\cot\theta\frac{\cos\omega \pm 1}{\cos\omega},$$

oder

$$\tan g x = \mp\frac{3}{2}\cot\theta\frac{1 \pm \cos\omega}{\cos\omega};$$

folglich

$$\tan g x = \begin{cases} -\dfrac{3\cot\theta\cos\frac{1}{2}\omega^2}{\cos\omega} \\ +\dfrac{3\cot\theta\sin\frac{1}{2}\omega^2}{\cos\omega}. \end{cases}$$

Uebrigens kann man die Gleichung

$$2\cos x\sin(\theta - x) = \sin x\cos(\theta - x)$$

noch auf eine andere sehr einfache Weise auflösen. Addirt man nämlich

$$\cos x \sin(\theta - x)$$

auf beiden Seiten dieser Gleichung, so erhält man

$$3\cos x \sin(\theta - x) = \sin x \cos(\theta - x) + \cos x \sin(\theta - x) = \sin\theta,$$

folglich

$$\frac{3}{2}\{\sin(\theta - x + x) + \sin(\theta - x - x)\} = \sin\theta,$$

d. i.

$$\frac{3}{2}\{\sin\theta + \sin(\theta - 2x)\} = \sin\theta,$$

$$\sin\theta + \sin(\theta - 2x) = \frac{2}{3}\sin\theta;$$

also

$$\sin(\theta - 2x) = -\frac{1}{3}\sin\theta,$$

mittelst welcher Gleichung sich $x$ bestimmen lässt. Rücksichtlich der Gränzen, zwischen denen man $x$ nehmen muss, ergiebt sich aber aus dem Vorhergehenden unmittelbar Folgendes:

Wenn

$$0 < \theta < 90^0$$

ist, so muss $x$ für das Minimum zwischen $90^0$ und $180^0$, für das Maximum zwischen 0 und $90^0$ genommen werden.

Wenn dagegen

$$90^0 < \theta < 180^0$$

ist, so muss $x$ für das Minimum zwischen $90^0$ und $180^0$, für das Maximum zwischen 0 und $90^0$ genommen werden.

Es muss also immer $x$ für das Minimum zwischen $90^0$ und $180^0$, für das Maximum zwischen 0 und $90^0$ genommen werden.

---

## VII.

### Aufgabe für Schüler.

Zu beweisen, dass

$$4(\sin\varphi^6 + \cos\varphi^6) = 1 + 3\cos 2\varphi^2$$

ist.

# Literarischer Bericht CIII.

## Arithmetik.

**Note sur une méthode pour la réduction d'intégrales définies et sur son application à quelques formules speciales. Par D. Bierens de Haan. Publié par l'Académie Royale des Sciences à Amsterdam. Amsterdam. Van der Post. 1855. 4.**

Die Grundlage dieser Methode bilden zwei allgemeine Theoreme, welche füglich als Erweiterungen der sogenannten theilweisen Integration betrachtet werden können. Das erste dieser beiden Theoreme ist folgendes:

„Théorème I. Si dans une intégrale définie $\int_a^b F(x).dx$ la fonction $F(x)$ peut être mise sous la forme d'un produit, tel que l'un des facteurs soit la différentielle d'une fonction connue quelconque, c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$F(x) = \varphi(x).d_x.\{f(x)\},$$

on aura aussi l'équation

$$\int_a^b \varphi(x).d_x.\{f(x)\}dx = \varphi(b).f(b) - \varphi(a).f(a) - \int_a^b f(x).d_x.\{\varphi(x)\}dx.“$$

„Quoique dans le cours de cette Note“, sagt der Herr Verfasser, „on ne fera usage que de ce théorème, il vaudra bien la peine pourtant d'en tirer un corollaire intéressant“, nämlich das folgende

„**Théorème II.** Lorsque dans une intégrale définie $\int_a^b F(q,x)\,dx$ la fonction $F(q,x)$ peut être mise sous la forme d'un produit, tel que l'un des facteurs soit la différentielle d'une fonction connue quelconque de $q$, c'est-à-dire, lorsqu'on a

$$F(q,x) = \varphi(q,x)\,d_q\{f(q,x)\},$$

on aura aussi l'équation

$$\int_\alpha^\beta dq \int_a^b \varphi(q,x).d_q.\{f(q,x)\}\,dx = -\int_a^b dx \int_\alpha^\beta f(q,x)d_q\{\varphi(q,x)\}dq - \varDelta$$

$$+\int_a^b dx[\varphi(\beta,x).f(\beta,x) - \varphi(\alpha,x).f(\alpha,x)];$$

où $\varDelta$ est la correction nécessaire dans certains cas de disconnuité de la fonction $F(a,x)$ — pour des valeurs de $q$ et de $x$, qui tombent entre des limites respectives incluses, $\alpha$ et $\beta$, $a$ et $b$, — lors de l'application de la méthode du changement dans l'ordre des intégrations. Toutefois ce résultat ne peut valoir que sous la double condition, à laquelle ce changement est soumis, savoir que

$$y = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Lim}.\,\varepsilon\frac{d^2.F(q,x)}{dq^2} \text{ et } \mathrm{Lim}.\int_a^b y\,dx$$

soient toutes deux nulles“ *).

„Comme pour le Théorème I. il faut observer, qu'on a supposé que $\varphi(q,x).f(q,x)$ soit contenu entre les limites $\alpha$ et $\beta$ de $q$: lorsque cela ne serait plus le cas, il faudrait ajouter au second membre de cette équation la correction

$$\mathrm{Lim}.\int_\alpha^\beta [f(c-\varepsilon).\varphi(c-\varepsilon) - f(c+\varepsilon).\varphi(c+\varepsilon)].“$$

Jedenfalls ist es sehr bemerkenswerth, dass der Herr Verfasser dieser in allen Beziehungen äusserst werthvollen Abhandlung aus den obigen im Ganzen höchst einfachen Quellen einen grossen Reichthum theils bekannter, theils bis jetzt noch unbekannter Formeln ableitet, so dass wir es für unsere Pflicht halten, den Lesern des Archivs die vorliegende schöne Abhandlung recht sehr zur Beachtung zu empfehlen.

*) Pour la limite zéro de $\varepsilon$. G.

Zu unserer Freude hören wir, dass die im Literarischen Berichte Nr. LXXX. S. 1005. Thl. XX. vorläufig angekündigte Tafel der bestimmten Integrale, mit welcher der Herr Verfasser der Wissenschaft ein überaus wichtiges und angenehmes Geschenk machen wird, auf Kosten der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Amsterdam herausgegeben, ihrer so sehr zu wünschenden Vollendung immer näher rückt, und dass von derselben bereits die erste Abtheilung erschienen ist *). Wir wünschen dem Herrn Verfasser Kraft, Ausdauer und Gesundheit zu der baldigen Vollendung dieses wichtigen und schwierigen Werkes. G.

Primzahlen-Tafel von 1 bis 10000, oder Zerlegung der Zahlen von 1 bis 10000 in ihre Factoren. Dargestellt zur Erleichterung für alle Die, welche mit verwickelten Rechnungen zu thun haben, insbesondere für Mathematiker von Fach. Von Franz Schaller, Geometer. Weimar. Jansen & Comp. 1855. 4.

Was diese Tafel enthält, sagt ihr Titel. Ihre Einrichtung ist von der anderer derartiger Tafeln nicht wesentlich verschieden. Warum dieselbe insbesondere für „Mathematiker von Fach", nicht auch eben so gut und nicht noch mehr für die anderen auf dem Titel genannten ehrlichen Leute brauchbar sein soll, sehen wir nicht ein. Druck und Papier sind recht gut und deutlich; Fehler haben wir bei einigen Vergleichungen mit anderen Tafeln nicht gefunden, obgleich sich darüber natürlich nur bei öfterem und längerem Gebrauche mit Sicherheit urtheilen lässt. Die Tafel mag daher immerhin verdienen, nicht ganz unbeachtet gelassen zu werden.

---

## Geometrie.

Lehrbuch der analytischen Geometrie, bearbeitet von O. Fort und O. Schlömilch, Professoren an der polytechnischen Schule zu Dresden. Erster Theil. Analytische Geometrie der Ebene von O. Fort. Zweiter Theil. Analytische Geometrie des Raums von O. Schlömilch. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig. Teubner. 1855. 8.

Dieses Lehrbuch der analytischen Geometrie verdient der Deutlichkeit und Vollständigkeit der Darstellung wegen und wegen

---

*) S. Math. u. phys. Bibliographie. Nr. III. S. 1.

der vielen, sehr gut ausgeführten Figuren, die namentlich in der Geometrie des Raums sehr zur Erhöhung der Deutlichkeit und Anschaulichkeit beitragen, insbesondere Solchen, die das Studium der analytischen Geometrie beginnen, recht sehr zur Beachtung empfohlen zu werden, und eignet sich nach unserer Meinung vorzugsweise zum eigenen Studium, zu welchem Zwecke wir einem Anfänger kaum ein geeigneteres Werk zu empfehlen wüssten. Im Ganzen ist der Inhalt der gewöhnliche und bedarf deshalb im Allgemeinen einer weiteren Besprechung hier nicht. Um aber den Herren Verfassern zu zeigen, mit welchem Interesse der Unterzeichnete ihr verdienstliches und empfehlungswerthes Werk einer genaueren Durchsicht unterzogen hat, sieht sich derselbe zu den folgenden Bemerkungen veranlasst, wenn er auch dabei einigermaassen von sich selbst zu reden genöthigt sein wird, was er sonst, namentlich in diesen literarischen Berichten, gern vermeidet. Zunächst weiss es der Unterzeichnete dem Herrn Verfasser des ersten Theils, Herrn Professor Fort, Dank, dass er der Theorie der Kegelschnitte (Thl. I. S. 72.) — hier wohl in einem Lehrbuche zuerst — die Erklärung dieser Curven zu Grunde gelegt hat, nach welcher dieselben als geometrische Oerter der Punkte in einer Ebene, deren Entfernungen von einer festen Geraden und einem festen Punkte in einem unveränderlichen Verhältnisse zu einander stehen, definirt werden. Dass der Unterzeichnete diese Erklärung der Kegelschnitte, wie er glaubt, zuerst als Grundlage der Theorie derselben empfohlen hat, darf wohl aus der Abhandlung Archiv. Thl. XVII. Nr. II. S. 54. und, noch viel weiter zurückgehend, aus der Abhandlung: Bemerkungen über den elementaren Vortrag der Lehre von den Kegelschnitten in den Beiträgen zur reinen und angewandten Mathematik von J. A. Grunert. Thl. I. Brandenburg. 1838. S. 222. als bekannt vorausgesetzt werden. Auch hat einer der trefflichsten Schüler des Unterzeichneten, Herr Scoppewer, Lehrer der Mathematik und der Naturwissenschaft am Gymnasium zu Sorau, dem Vernehmen nach die in Rede stehende Erklärung schon vor einigen Jahren zum Gegenstande eines Schulprogramms gemacht. In Thl. I. S. 157. sagt Herr Fort: „Die auf die Quadratur der Hyperbel bezüglichen Untersuchungen greifen zu weit in das Gebiet der höheren Mathematik ein, um hier einen geeigneten Platz finden zu können; sie bleiben daher ebenso wie die Betrachtungen über die Rectification sämmtlicher Kegelschnittslinien von diesem Buche ausgeschlossen.“ Herr Fort möge dem Unterzeichneten erlauben, sich der angenehmen Hoffnung hingeben zu dürfen, dass diese Worte wohl schwerlich geschrieben worden wären, wenn Herr Fort die beiden von dem

Unterzeichneten veröffentlichten Abhandlungen: Elementare Darstellung der Lehre von der Quadratur der Hyperbel u. s. w. im Archiv. Thl. XXV. Nr. V. S. 82. *) und Allgemeiner, leicht elementar zu beweisender Satz von der Rectification und Quadratur der Curven. Elementare Rectification der Parabel, im Archiv. Thl. XXVI. Nr. III. S. 48., schon gekannt hätte, wobei zugleich darauf aufmerksam gemacht werden mag, dass das bald erscheinende erste Heft des 27sten Theils des Archivs eine neue elementare Quadratur der Hyperbel von dem als trefflicher Mathematiker schon hinreichend bekannten Herrn Essen, Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaft am Gymnasium zu Stargard, enthalten wird, auf die wir hier vorläufig aufmerksam machen. — Als einen besonderen Vorzug der von Herrn Professor Schlömilch in ansprechender Darstellung bearbeiteten analytischen Geometrie des Raums sieht es der Unterzeichnete an, dass hier die Theorie der geraden Linie im Raume und der Ebene ganz allgemein für schiefwinklige Coordinatensysteme entwickelt worden ist. Der Unterzeichnete darf wohl der Meinung sein, dass dies von ihm in seinen Elementen der analytischen Geometrie. Thl. I. Leipzig. zuerst geschehen ist, da alle früheren Lehrbücher sich auf rechtwinklige Coordinatensysteme beschränken **), und da der Unterzeichnete die Darstellung des Herrn Professors Schlömilch von der von ihm gegebenen Entwickelung durchaus nicht wesentlich abweichend findet, ferner auch die Formeln, selbst theilweise bis auf die Bezeichnung, mit den in den angeführten Elementen der analytischen Geometrie von dem Unterzeichneten zuerst gegebenen Formeln übereinstimmen: so kann es der Unterzeichnete natürlich nur für eine sehr angenehme Pflicht halten, Herrn Professor Schlömilch verbindlichst zu danken, dass er auf diese Weise zur weiteren Bekanntwerdung jener Formeln durch sein verdienstliches Werk gewiss wesentlich beigetragen hat. Da die für schiefwinklige Coordinatensysteme entwickelten Formeln besonders auch für die Krystallographie Bedeutung haben, so glaubt der Unterzeichnete sich noch erlauben zu

---

*) S. auch die schönen Bemerkungen des Herrn Directors Nizze in Stralsund im Archiv. Thl. XXVI. S. 110.

**) Später in seinen im Literar. Ber. Nr. LII. S. 720. Thl. XIII. mit verdientem Lobe angezeigten Beiträgen zur Molecular-Physik, Nürnberg. 1849. hat auch der den Wissenschaften leider zu früh entrissene treffliche G. S. Ohm die analytische Geometrie für beliebige schiefwinklige Coordinatensysteme in eigenthümlicher, von der von mir gegebenen Darstellung abweichender Weise entwickelt. G.

dürfen, bei dieser Gelegenheit auf eine von ihm früher veröffentlichte Abhandlung: Zur Krystallographie und analytischen Geometrie in den oben erwähnten Beiträgen zur r. u. a. Math. Thl. I. S. 149. verweisen zu dürfen. Weil der Raum leider verbietet, hier mehr über das vorliegende verdienstliche Buch zu sagen, so wollen wir nur noch bemerken, dass für den Anfänger auch die in ziemlicher Anzahl vorkommenden Anwendungen auf specielle Curven und Flächen besonders lehrreich sein werden, was dem Buche also von einer neuen Seite her zur Empfehlung dient. Die dem Buche durch den Herrn Verleger gegebene äussere Ausstattung ist in allen Beziehungen trefflich. G.

---

## Geodäsie.

Instruction über die Anfertigung der Situations- und Nivellimentspläne für Landesculturarbeiten. Zunächst zum Gebrauche für die Wiesenbau-Techniker in dem Regierungsbezirke Trier. Trier. Lintz. 1855. 16 Sgr.

Dieses sehr verständig, mit vieler Deutlichkeit und nach unserer Meinung mit vielem praktischen Sinn und Takt abgefasste Schriftchen eines ungenannten Verfassers verdient der allgemeineren Beachtung, als solchen Schriften meistens zu Theil zu werden pflegt, empfohlen zu werden. Die drei beigegebenen hübschen Karten: 1. Darstellung eines Terrains durch Profilzeichnungen. 2. Darstellung der Höhenverhältnisse eines Terrains durch Einschreibung der Höhenmaasse in den Plan. 3. Darstellung eines Terrains durch Horizontalen, dienen sehr zur deutlichen Erläuterung der verschiedenen üblichen Methoden der Terraindarstellung. Bei der jetzigen grossen Wichtigkeit solcher Darstellungen, z. B. für den Wiesenbau, der immer grössere Bedeutung für die Landwirthschaft gewinnt, wünschen wir diesem Schriftchen recht weite Verbreitung und sorgfältige Beachtung.

Die Terrainaufnahme rationell aus der Lehmannschen Theorie der Terraindarstellung entwickelt von Hermann von Schintling, Oberstlieutenant und Director des topographischen Bureau's des k. baierischen General-Quartiermeister-Stabs. Mit einer lithographirten Tafel. München. Franz. 1855. 8. 1 Thlr.

Diese Schrift enthält eine sehr geistreiche — welches Wort

uns hier vorzugsweise an seiner Stelle zu sein scheint — Darstellung der militairischen Terrainaufnahme mit besonderer Rücksicht auf die Lehmann'sche Theorie, und erörtert in äusserst interessanter Weise die allgemeinen Gesichtspunkte, welche bei diesem wichtigen Gegenstande in Rücksicht auf Methode und Zweck zur Sprache kommen, so dass wir deren Beachtung einem Jeden, wer sich mit dergleichen Arbeiten, deren Leitung zu unserer Freude in Baiern in so tüchtige Hände, wie die des Herrn Verfassers, gelegt ist, zu beschäftigen hat, dringend empfehlen. Auf einem geringen Raume ist in dieser Schrift sehr Vieles in 174 Paragraphen gegeben; hier aber nöthigt uns leider die Beschränktheit des Raums, uns mit der folgenden Inhaltsangabe der Hauptabschnitte zu begnügen: Einleitung. I. Theorie der Terrainzeichnung, constructive Grundlage derselben. II. Betrachtungen über die Anwendung der constructiven Gesetze auf die Terraindarstellung und über die Modificationen, welche hiebei eingetreten sind. (Dieser Abschnitt enthält eine sehr beachtenswerthe Kritik der Lehmann'schen Methode, die der Herr Verfasser mit den folgenden Motto's einleitet:

„Wo ein Berg ist, da mache er einen Klecks hin."

**König Friedrich der Grosse.** *)

und:

„Ich kann auf dieser Landkarte durchaus nicht sehen, wo wir eigentlich sind, inmaassen ich weder dich noch mich darauf verzeichnet finde."

**Kaiser Otto im König Eginhardt, von Justinus Kerner.**)

III. Fehlergränzen für die Aufnahme und Darstellung des Terrains. IV. Die Aufnahme des Terrains. Schlusswort. — Möge die Schrift die so sehr verdiente Beachtung in jeder Beziehung finden! G.

---

## Astronomie.

Der Mond. Ein Ueberblick über den gegenwärtigen Umfang und Standpunkt unserer Kenntnisse von der Oberflächengestaltung und Physik dieses Weltkör-

---

*) Gewiss ein in vielen Beziehungen, namentlich mit Rücksicht auf manche Künsteleien, sehr wahres und zu beherzigendes, natürlich aber sehr cum grano salis zu nehmendes Wort des grossen Königs.

Der Herausgeber.

pers. Von J. F. Julius Schmidt, Astronomen der Sternwarte des Prälaten Ritter von Unkrechtsberg zu Olmütz. Mit zwei farbigen Steindrucktafeln und mehreren in den Text gedruckten Holzschnitten. Leipzig. Barth. 1856. 8. 1 Thlr. 15 Sgr.

Der Herr Verfasser dieser der Beachtung der Leser des Archivs zu empfehlenden Schrift veröffentlicht in derselben die hinterlassenen Arbeiten Lohrmanns über die Mondgebirge mit seinen eigenen im Jahre 1840 begonnenen Beobachtungen über die Oberfläche unsers Erdtrabanten, und stellt, nur die nothwendigsten Erläuterungen über Bewegung, Masse, Grösse und Beleuchtung des Mondes gebend, weil diese Dinge grösstentheils als bekannt angesehen werden können, die Ergebnisse aller telescopischen Beobachtungen der Mondoberfläche zusammen, verfolgt dabei aber noch den besonderen Zweck, darauf hinzuweisen, dass ein sorgfältiges Studium der Mondgebirge für die Geologie von Wichtigkeit werden könne, insofern es sich dereinst um die Nachweisung gewisser Aehnlichkeiten zwischen den Gebirgsformen der Erde und ihres Trabanten, und um eine vergleichende Betrachtung handelt, in welcher man die Wirkungen ungeheurer Kräfte untersucht, die den Oberflächen zweier benachbarten Himmelskörper ihre gegenwärtige Configuration verliehen haben. Die von dem Herrn Verfasser erreichte Vollständigkeit wird aus der folgenden Angabe des Hauptinhalts erhellen: Allgemeine Vorerinnerungen über die Bahn und die Grösse des Mondes. Umlaufszeit. Parallaxe. Grösse und Masse. Rotation und Libration. Historischer Rückblick auf die selenographischen Arbeiten seit den letzten zwei Jahrhunderten. Besondere Versuche, die Oberfläche des Mondes darzustellen (Daguerrotype. Mondrelief von Dickert in Bonn.) Ursachen der Veränderungen der Mondgebirge. Bergschatten. Erdenlicht. Erscheinungen während einer Mondfinsterniss. Atmosphäre. Oberfläche. Höhenmessungen. Vertheilung der Ebenen und Gebirge. Ringgebirgsform. Massen- und Kettengebirge. Isolirte Berge. Bergadern. Strahlensysteme. Vergleichung irdischer Vulkane mit den Ringgebirgen. Dimensionen einiger Crater der Erde. Dimensionen einiger Ringgebirge des Mondes. Meinungen über lebende Wesen auf dem Monde und auf den Planeten. Ein Tag und eine Nacht auf dem Monde. Anmerkungen. — Je mehr der Herr Verfasser schon längst als genauer und eifriger Beobachter bekannt ist und schon in mehrfacher Weise als populärer Schriftsteller sich bewährt hat, desto mehr wird diese auch äusserlich in jeder Beziehung trefflich ausgestattete Schrift der Beachtung unserer Leser zu empfehlen sein.

# XXIV.

## Ueber die Ausziehung von Wurzeln aus Zahlen.

Von

Herrn *H. Kinkelin*,

Bezirkslehrer zu Aarburg im Canton Aargau.

### §. 1.

Der Gegenstand vorliegender Arbeit ist die Zurückführung der Ausziehung der $n$ten Wurzel aus einer Zahl auf die blosse Quadratwurzelausziehung mittelst der Kettenbrüche. Wir wählen zuerst die Cubikwurzelausziehung als Beispiel, um den Gang der Methode deutlich zu machen.

Es sei die $\sqrt[3]{\alpha}$ zu berechnen, so sei $\gamma$ ein angenäherter Werth derselben, den man auf irgend eine Art gefunden habe, so dass

$$y=\sqrt[3]{\alpha}-\gamma<1 \tag{1}$$

numerisch genommen. Erhebt man diese Gleichung auf die dritte Potenz, so kommt

$$y^3=\alpha-\gamma^3-3\sqrt[3]{\alpha^2}.\gamma+3\sqrt[3]{\alpha}.\gamma^2$$

oder

$$y^3=\alpha-\gamma^3-3\sqrt[3]{\alpha}.\gamma(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)$$

oder

$$y^3+3\sqrt[3]{\alpha}.\gamma y=\alpha-\gamma^3, \tag{2}$$

woraus gefunden wird:

$$y = \frac{\alpha - \gamma^3}{3\gamma\sqrt[3]{\alpha} + y^2}. \tag{3}$$

Da nun $y < 1$, also auch $y^2 < 1$, und man immer $\sqrt[3]{\alpha} > 1$ annehmen darf, so wird ein erster Nährungswerth sein:

$$y_1 = \frac{\alpha - \gamma^3}{3\gamma\sqrt[3]{\alpha}} = \frac{\alpha - \gamma^3}{3\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}. \tag{3'}$$

Diese Näherung wird den wahren Werth von $y$ übersteigen. Die zweite Näherung ist

$$y_2 = \frac{\alpha - \gamma^3}{3\gamma\sqrt[3]{\alpha} + y_1^2}$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\alpha - \gamma^3 = m \tag{4}$$

gesetzt wird:

$$y_2 = \frac{m}{3\gamma\sqrt[3]{\alpha} + y_1^2} = \frac{9\gamma^2 \alpha m}{27\gamma^3\alpha + m^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}, \tag{3''}$$

welches unter dem wahren Werth von $y$ ist. Die folgenden Näherungen werden abwechselnd über oder unter dem wahren Werth von $y$ sich befinden, und es ist

$$y_3 = \frac{(27\gamma^3\alpha + m^2)^2 . m}{3\gamma(27\gamma^3\alpha + m^2)^2 + 81\gamma^4 m^2 \alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}}; \tag{3'''}$$

allgemein

$$y_n = \frac{y'_n}{\sqrt[3]{\alpha}}, \tag{5}$$

wo $y'$ bloss von $m$, $\alpha$, $\gamma$ abhängt. Denn es ist

$$y_{n+1} = \frac{m}{3\gamma\sqrt[3]{\alpha} + y_n^2} = \frac{m . \sqrt[3]{\alpha^2}}{3\gamma\alpha + y_n'^2} = \frac{m\alpha}{3\gamma\alpha + y_n'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}},$$

und sonach

$$y'_{n+1} = \frac{m\alpha}{3\gamma\alpha + y_n'^2};$$

die Berechnung von

$$y'_n = \frac{m\alpha}{3\gamma\alpha + y'^2_{n-1}} \tag{6}$$

unterliegt also keinen weiteren Schwierigkeiten.

Hat man nun auf solche Weise irgend ein $y'_n$ auf eine bestimmte Anzahl Dezimalen berechnet, so ist dann, da man allgemein

$$y=\frac{y'}{\sqrt[3]{\alpha}}$$

setzen kann,

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt[3]{\alpha}-\gamma=\dfrac{y'}{\sqrt[3]{\alpha}} \text{ oder } \sqrt[3]{\alpha^2}-\gamma\sqrt[3]{\alpha}=y', \\ \text{woraus nun} \\ \sqrt[3]{\alpha}=\dfrac{\gamma}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\gamma^2+4y'}\end{array}\right\} \quad (7)$$

durch eine Quadratwurzel zu erhalten ist, wobei man das Zeichen $+$ nimmt, wenn $\gamma<\sqrt[3]{\alpha}$ und das Zeichen $-$, wenn $\gamma>\sqrt[3]{\alpha}$. Der Fehler, der hiebei begangen wird, indem man statt des allgemeinen Werthes $y'$ einen berechneten $y'_n$ nimmt, werde mit $\varDelta_n$ bezeichnet, so ist absolut genommen:

$$\varDelta_n=\frac{\gamma}{2}\left\{\sqrt{1+\frac{4y'_n}{\gamma^2}}-\sqrt{1+\frac{4y'}{\gamma^2}}\right\}=\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{1+\dfrac{4y'_n}{\gamma^2}-1-\dfrac{4y'}{\gamma^2}}{\sqrt{1+\dfrac{4y'_n}{\gamma^2}}+\sqrt{1+\dfrac{4y'}{\gamma^2}}}.$$

Für den Fall, dass $y'$ positiv, d. h. $\gamma<\sqrt[3]{\alpha}$, wird sonach

$$\varDelta_n<\frac{y'_n-y'}{\gamma};$$

ist aber $\gamma>\sqrt[3]{\alpha}$, also $y'$ negativ, so ist

$$\varDelta_n<\frac{2(y'_n-y')}{\gamma}.$$

Setzt man nun noch der Kürze wegen $y'_n-y'=\delta'_n$, so ist also bezüglich:

$$\varDelta_n<\frac{\delta'_n}{\gamma} \text{ und } \varDelta_n<\frac{2\delta'_n}{\gamma}. \quad (8)$$

## §. 2.

Fassen wir nun die allgemeine Wurzelausziehung $\sqrt[n]{\alpha}$ in's Auge, so kann sie, wenn $n$ eine gerade Zahl ist, durch blosse

Quadratwurzel-Ausziehung auf $\sqrt[\frac{n}{2}]{\alpha}$ zurückgeführt werden. Allgemein, wenn

$$n = 2^{\nu} . \mu$$

ist, so ist die $\sqrt[n]{\alpha}$ auf die angegebene Weise auf die $\sqrt[\mu]{\alpha}$ reduzirbar, wo $\mu$ eine ungerade Zahl ist; und wir brauchen somit bloss diesen Fall zu betrachten. Nun ist es immer möglich, einen Näherungswerth $\gamma$ zu finden, so dass

$$y = \sqrt[n]{\alpha} - \gamma < 1, \tag{1}$$

absolut genommen. Sollte dies von vornherein nicht möglich sein, so dividire man $\alpha$ so oft durch $10^{\mu}$, bis sich $\gamma$ als eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, .... 9 herausstellt. Es handelt sich jetzt darum, $y$ als Wurzel einer Gleichung vom $\mu$ten Grad darzustellen. Verfährt man dabei, wie Eingangs §. 1. angegeben wurde, so findet man allgemein:

$$y^{\mu} + \frac{\mu}{1} A y^{\mu-2} + \frac{\mu}{2}\binom{\mu-3}{1} A^2 y^{\mu-4} + \frac{\mu}{3}\binom{\mu-4}{2} A^3 y^{\mu-6}$$

$$+ \frac{\mu}{4}\binom{\mu-5}{3} A^4 y^{\mu-8} + \ldots . + \frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}} y^3 + \mu A^{\frac{\mu-1}{2}} y = \alpha - \gamma^{\mu},$$

wobei

$$A = \gamma \sqrt[\mu]{\alpha}. \tag{2}$$

Diese Gleichung spezialisirt sich für $\mu = 3, 5, 7$ auf folgende Weise:

$$y^3 + 3Ay = \alpha - \gamma^3, \qquad A = \gamma\sqrt[3]{\alpha};$$

$$y^5 + 5Ay^3 + 5A^2 y = \alpha - \gamma^5, \qquad A = \gamma\sqrt[5]{\alpha};$$

$$y^7 + 7Ay^5 + 14A^2 y^3 + 7A^3 y = \alpha - \gamma^7, \quad A = \gamma\sqrt[7]{\alpha}.$$

Die Wurzeln der Gleichung (2) werden folgende sein:

$$\sqrt[\mu]{\alpha} - \gamma, \ \sqrt[\mu]{\alpha}.(\text{Cos}\frac{2\pi}{\mu} + i\,\text{Sin}\frac{2\pi}{\mu}) - \gamma, \ldots . \sqrt[\mu]{\alpha}.(\text{Cos}\frac{2k\pi}{\mu} + i\,\text{Sin}\frac{2k\pi}{\mu}) - \gamma, \ldots,$$

deren Zahl $\mu$ ist. Unter ihnen ist bloss die eine reelle $\sqrt[\mu]{\alpha} - \gamma$, deren Berechnung unser Zweck ist.

Anmerkung. Wenn $\alpha = \beta^{\mu}$, so geht Gleichung (2) über in:

$$y^\mu + \frac{\mu}{1}\beta\gamma y^{\mu-2} + \frac{\mu}{2}\binom{\mu-3}{1}\beta^2\gamma^2 y^{\mu-4} + \frac{\mu}{3}\binom{\mu-4}{2}\beta^3\gamma^3 y^{\mu-6} + \dots$$
$$\dots + \mu\gamma^{\frac{\mu-1}{2}}\beta^{\frac{\mu-1}{2}} y = \beta^\mu - \gamma^\mu.$$

Ist also $a$ eine beliebige Zahl, deren Faktoren $\beta$ und $\gamma$ sind, so hat die Gleichung

$$y^\mu + \frac{\mu}{1} a y^{\mu-2} + \frac{\mu}{2}\binom{\mu-3}{1}a^2 y^{\mu-4} + \frac{\mu}{3}\binom{\mu-4}{2}a^3 y^{\mu-6} + \dots$$
$$\dots + \mu a^{\frac{\mu-1}{2}} y = \beta^\mu - \gamma^\mu \qquad (3)$$

die Wurzeln

$\beta - \gamma$ und $\beta(\text{Cos}\frac{2k\pi}{\mu} + i\,\text{Sin}\frac{2k\pi}{\mu}) - \gamma$, wo $k$ eine ganze Zahl.

Setzt man einen der Faktoren $\beta$, $\gamma$ gleich der Einheit, so hat man die beiden Gleichungen:

$$y^\mu + \frac{\mu}{1} a y^{\mu-2} + \frac{\mu}{2}\binom{\mu-3}{1}a^2 y^{\mu-4} + \dots + \mu a^{\frac{\mu-1}{2}} y = a^\mu - 1,$$

$$y^\mu + \frac{\mu}{1} a y^{\mu-2} + \frac{\mu}{2}\binom{\mu-3}{1}a^2 y^{\mu-4} + \dots + \mu a^{\frac{\mu-1}{2}} y = -(a^\mu - 1);$$

deren Wurzeln resp. sind:

$$a - 1,\ (a\,\text{Cos}\frac{2k\pi}{\mu} - 1) + ia\,\text{Sin}\frac{2k\pi}{\mu}$$

und

$$1 - a,\ \text{Cos}\frac{2k\pi}{\mu} - a + i\,\text{Sin}\frac{2k\pi}{\mu}.$$

Wird endlich noch $a = 1$, so erhält man als Wurzeln der Gleichung

$$y^{\mu-1} + \frac{\mu}{1} y^{\mu-3} + \frac{\mu}{2}\binom{\mu-3}{1} y^{\mu-5} + \frac{\mu}{3}\binom{\mu-4}{2} y^{\mu-7} + \dots + \mu = 0$$

die imaginären Ausdrücke, die in der Formel

$$\text{Cos}\frac{2k\pi}{\mu} - 1 + i\,\text{Sin}\frac{2k\pi}{\mu} \text{ oder } -2\,\text{Sin}^2\frac{k\pi}{\mu} + i\,\text{Sin}\frac{2k\pi}{\mu}$$

oder

$$2\,\mathrm{Sin}\,\frac{k\pi}{\mu}.\left\{-\mathrm{Sin}\,\frac{k\pi}{\mu}+i\,\mathrm{Cos}\,\frac{k\pi}{\mu}\right\},$$

wo $k$ eine ganze Zahl vorstellt, enthalten sind; $\mu$ ist eine ungerade Zahl.

Aehnliche Gleichungen lassen sich aufstellen, wenn $\mu$ eine gerade Zahl ist; jedoch sollen sie hier, als nicht zur Aufgabe gehörig, übergangen werden.

## §. 3.

Aus der Gleichung (2) §. 2. erhält man nun

$$y=\frac{\alpha-\gamma^\mu}{\mu\gamma^{\frac{\mu-1}{2}}\sqrt[\mu]{\alpha}^{\frac{\mu-1}{2}}+\ldots\ldots\mu\gamma\sqrt[\mu]{\alpha}.y^{\mu-3}+y^{\mu-1}}. \qquad (1)$$

Man setze der Kürze wegen wieder

$$\gamma\sqrt[\mu]{\alpha}=A,\ \alpha-\gamma^\mu=B; \qquad (2)$$

so wird die Form von $y$:

(3)

$$y=\frac{B}{\mu A^{\frac{\mu-1}{2}}+aA^{\frac{\mu-3}{2}}y^2+bA^{\frac{\mu-5}{2}}y^4+\ldots pA^2y^{\mu-5}+qAy^{\mu-3}+y^{\mu-1}},$$

wo die $a, b, \ldots. p, q$ nur von $\mu$ abhängig sind.

Der erste Näherungswerth von $y$ ist

$$y_1=\frac{B}{\mu A^{\frac{\mu-1}{2}}}, \qquad (4)$$

und wir wollen nun beweisen, dass allgemein $y_n$ von der Form ist:

$$y_n=\frac{M}{A^{\frac{\mu-1}{2}}},$$

wo $M$ nur abhängig ist von $\gamma$ und $\alpha$, und keine $\sqrt[\mu]{\alpha}$ mehr implizirt. Der folgende Näherungswerth $y_{n+1}$ wird gefunden, indem man rechterhand vom Gleichheitszeichen in (3) für $y$ seinen Näherungswerth $y_n$ substituirt. Thut man dies, so kommt:

$$y_{n+1} = \frac{B}{\left\{\begin{array}{c} \mu A^{\frac{\mu-1}{2}} + aM^2 A^{\frac{-\mu-1}{2}} + bM^4 A^{\frac{-3\mu-1}{2}} + \ldots pM^{\mu-5} A^{2-\frac{(\mu-1)(\mu-5)}{2}} \\ + qM^{\mu-3} A^{1-\frac{(\mu-1)(\mu-3)}{2}} + M^{\mu-1} A^{-\frac{(\mu-1)^2}{2}} \end{array}\right\}}$$

oder

(5)

$$y_{n+1} = \frac{BA^{\frac{(\mu-1)(\mu-1)}{2}}}{\left\{\begin{array}{c} \mu A^{\frac{(\mu-1)\mu}{2}} + aM^2 A^{\frac{(\mu-3)\mu}{2}} + bM^4 A^{\frac{(\mu-5)\mu}{2}} + \ldots pM^{\mu-5} A^{2\mu} \\ + qM^{\mu-3} A^{\mu} + M^{\mu-1} \end{array}\right\}}.$$

Es ist aber

$$A^{k\mu} = \gamma^{k\mu} \alpha^k,$$

also von $\sqrt[\mu]{\alpha}$ unabhängig. Es implizirt daher der Nenner von $y_{n+1}$ kein $\sqrt[\mu]{\alpha}$ mehr. Ferner ist

$$A^{\frac{(\mu-1)(\mu-1)}{2}} = \frac{A^{\frac{(\mu-1)\mu}{2}}}{A^{\frac{\mu-1}{2}}},$$

wobei auch $A^{(\mu-1)\mu}$ von $\sqrt[\mu]{\alpha}$ unabhängig ist. Wenn also

$$y_n = \frac{M}{A^{\frac{\mu-1}{2}}},$$

so ist auch $y_{n+1}$ von derselben Form. Es ist aber $y_1$ von dieser Form laut Gleichung (4), folglich ist die obige Behauptung bewiesen. Da nun nach (2) $A = \gamma \sqrt[\mu]{\alpha}$, so ist

$$A^{\frac{\mu-1}{2}} = \gamma^{\frac{\mu-1}{2}} . \sqrt[\mu]{\alpha}^{\frac{\mu-1}{2}},$$

und somit darf man setzen:

$$y_n = \frac{y'_n}{\sqrt[\mu]{\alpha}^{\frac{\mu-1}{2}}}, \tag{6}$$

welches die Form für alle Näherungswerthe von $y$ ist. Um den Uebergang von $y'_n$ in $y'_{n+1}$ zu finden, darf man bloss in (5) für $M$

den Werth $y'_n . \gamma^{\frac{\mu-1}{2}}$ setzen, so findet man, wenn abkürzend $\alpha\gamma = a$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{array}{l} y'_{n+1} = \dfrac{B\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}{\mu a^{\frac{\mu-1}{2}} + \frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} a^{\frac{\mu-3}{2}} y_n'^2 + \ldots + \mu a y_n'^{\mu-3} + y_n'^{\mu-1}}, \\ \text{wobei} \\ y'_1 = \dfrac{B}{\mu\gamma^{\frac{\mu-1}{2}}}. \end{array}\right\} \quad (7)$$

§. 4.

Es soll nun der Fehler bestimmt werden, der begangen wird, wenn man bei einem bestimmten $y_n$ stehen bleibt. Da der Nenner von $y_n$ keine negativen Glieder enthält, auch wenn $y$ negativ ist, so werden diese Näherungswerthe abwechselnd absolut grösser und kleiner sein, als der wahre Werth von $y$ und zwar:

$$y_{2\nu+1} > y, \quad y_{2\nu} < y.$$

Der wahre Werth von $y$ liegt also immer zwischen $y_n$ und $y_{n+1}$, und folglich ist, wenn nur auf den absoluten Werth gesehen wird:

$$y_n - y < y_n - y_{n+1}.$$

Bezeichnet man also den begangenen Fehler mit $\delta_n$, so ist

$$\delta_n < y_n - y_{n+1}. \quad (1)$$

Nun ist mit der angenommenen Bezeichnung:

$$y = \frac{B}{\mu A^{\frac{\mu-1}{2}} + \frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}} y^2 + \ldots + \mu A y^{\mu-3} + y^{\mu-1}} = \frac{B}{\varphi};$$

folglich wird

$$+\delta_n < y_n - \frac{B}{\varphi_{n+1}} \text{ oder } \frac{y_n\varphi_{n+1} - B}{\varphi_{n+1}}$$

oder

$$-\delta_n < \frac{B - \mu A^{\frac{\mu-1}{2}} y_n - \frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}} y_n^3 - \ldots - \mu A y_n^{\mu-2} + y_n^{\mu}}{\varphi_{n+1}}$$

oder, wenn man den Werth

$$y_n = \frac{B}{\varphi_n}$$

einsetzt, auch für $-\delta_n$, $+\delta_n$ schreibt:

$$\delta_n < \frac{\left\{ \begin{array}{l} B\{\varphi_n^\mu - \mu A^{\frac{\mu-1}{2}} \varphi_n^{\mu-1} - \frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}} \varphi_n^{\mu-3} B^2 - \dots \\ \qquad\qquad \dots - \mu A \varphi_n^2 B^{\mu-3} - B^{\mu-1}\} \end{array} \right\}}{\varphi_{n+1}\varphi_n^\mu}$$

oder

$$\delta_n < \frac{B.}{\varphi_{n+1}\varphi_n^\mu}\{\varphi_n^{\mu-1}(\varphi_n - \mu A^{\frac{\mu-1}{2}})$$
$$-\frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}} \varphi_n^{\mu-3} B^2 - \dots \mu A \varphi_n^2 B^{\mu-3} - B^{\mu-1}\}$$

oder um so mehr

$$\delta_n < \frac{B}{\varphi_{n+1}\varphi_n^\mu}\{\varphi_n^{\mu-1}(\varphi_n - \mu A^{\frac{\mu-1}{2}}) - \frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}} \varphi_n^{\mu-3} B^2\}$$

oder angenähert:

$$\delta_n < \frac{B}{\varphi_{n+1}\varphi_n^\mu}\{\varphi_n^{\mu-1} \cdot \frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}} y_{n-1}^2 - \frac{1}{4}\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}} \varphi_n^{\mu-3} B^2\}$$

oder

$$\delta_n < \frac{B^3\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}}}{4\varphi_{n+1}\varphi_n} \left\{ \frac{1}{\varphi_{n-1}^2} - \frac{1}{\varphi_n^2} \right\}$$

oder

$$\delta_n < \frac{B\binom{\mu+1}{3} A^{\frac{\mu-3}{2}}}{4\varphi_{n+1}\varphi_n}\{y_{n-1}^2 - y_n^2\}.$$

Es ist aber

$$y_{n-1}^2 - y_n^2 = (y_{n-1} + y_n)(y_{n-1} - y_n)$$

also

$$< 2y_1\,\delta_{n-1},$$

da $y_1$ das grösste $y_n$ ist; folglich wird

$$\delta_n < \frac{\binom{\mu+1}{3} B A^{\frac{\mu-3}{2}}}{2\varphi_1^2} y_1 \delta_{n-1},$$

da $\varphi_1$ das kleinste $\varphi_n$; oder, da nun

$$y_1 = \frac{B}{\mu A^{\frac{\mu-1}{2}}}, \quad \varphi_1 = \mu A^{\frac{\mu-1}{2}},$$

$$\delta_n < \frac{\binom{\mu+1}{3} B^2 A^{\frac{\mu-3}{2}}}{2\mu^3 A^{\frac{3\mu-3}{2}}} \delta_{n-1},$$

oder endlich, da $\binom{\mu+1}{3} = \frac{(\mu+1)\mu(\mu-1)}{2.3}$,

$$\delta_n < \frac{(\mu^2-1)B^2}{12\mu^2 A^\mu} \delta_{n-1}, \tag{2}$$

woraus nun

$$\delta_n < \frac{(\mu^2-1)^{n-1} B^{2n-2}}{12^{n-1} \mu^{2n-2} A^{\mu n-\mu}} \delta_1$$

und um so mehr

$$\delta_n < \frac{B^{2n-2}}{12^{n-1} A^{\mu n-\mu}} \delta_1.$$

Es bleibt noch $\delta_1$ zu bestimmen. Der nullte Näherungswerth von $y$ ist $y_0 = 0$, folglich

$$\delta_0 < y_0 - y_1 = -\frac{B}{\mu A^{\frac{\mu-1}{2}}},$$

also wegen (2):

$$\delta_1 < \frac{B^3}{12\mu^3 A^{\frac{3\mu-1}{2}}}. \tag{3}$$

Dies substituirt, gibt endlich:

$$\delta_n < \frac{B^{2n+1}}{12^n \mu^3 A^{\mu n + \frac{\mu-1}{2}}}, \tag{4}$$

welche Formel noch vereinfacht werden kann, indem man für $A = \gamma\sqrt[\mu]{\alpha}$, einfach $\gamma^2$ setzt, für den Fall, dass $\gamma < \sqrt[\mu]{\alpha}$. Dann wird

$$\delta_n < \frac{B^{2n+1}}{12^n \mu^3 \gamma^{(2n+1)\mu-1}}. \qquad (5)$$

Ist aber $\gamma > \sqrt[\mu]{\alpha}$, so wird $A > \sqrt[\mu]{\alpha^2}$ und $A < \gamma^2$ und folglich:

$$A^{\mu n + \frac{\mu-1}{2}} = \frac{A^{\mu(n+\frac{1}{2})}}{A^{\frac{1}{2}}} > \frac{\alpha^{2n+1}}{\gamma},$$

und somit

$$\delta_n < \frac{B^{2n+1}\gamma}{12^n \mu^3 \alpha^{2n+1}}. \qquad (6)$$

Man bemerkt, dass die Näherung eine ziemlich schnelle ist. Sie ist um so schneller mit fortschreitendem $n$, je kleiner $B$ ist, je grösser $\mu$ und $\gamma$ sind.

Da sich diese Methode besonders gut eignet, die 5te, die 7te und die 3te Wurzel auszuziehen, so mögen die Spezialisirungen obiger Formeln für diese Fälle folgen.

Für $\mu = 5$ wird:

$$\delta_n < \frac{B^{2n+1}}{12^n . 125 . \gamma^{10n+4}} \text{ und } \delta_n < \frac{B^{2n+1} . \gamma}{12^n . 125 . \alpha^{2n+1}}; \qquad (7)$$

und für $\mu = 3$:

$$\delta_n < \frac{B^{2n+1}}{12^n . 27 . \gamma^{6n+2}}, \quad \delta_n < \frac{B^{2n+1} . \gamma}{12^n . 27 . \alpha^{2n+1}}; \qquad (8)$$

für $\mu = 7$:

$$\delta_n < \frac{B^{2n+1}}{12^n . 343 . \gamma^{14n+6}}, \quad \delta_n < \frac{B^{2n+1} . \gamma}{12^n . 343 . \alpha^{2n+1}}. \qquad (9)$$

## §. 5.

Es wurde gefunden:

$$y = \frac{y'}{\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}},$$

oder, da $y = \sqrt[\mu]{\alpha} - \gamma$:

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu+1}{2}}} - \gamma \sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}} = y'. \qquad (1)$$

Hieraus können nun auf folgende zwei Arten quadratische Gleichungen erhalten werden.

1. Man multiplizire die Gleichung (1) mit $\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}$, so erhält man:

$$\alpha - \gamma\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu-1}} = y'\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}},$$

woraus

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}} = \frac{1}{2\gamma}\{-y' + \sqrt{4\alpha\gamma + y'^2}\}.$$

Was das Vorzeichen der Quadratwurzel anbelangt, so wurde dasselbe als $+$ angenommen, weil $\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}$ immer eine positive Grösse ist.

2. Man multiplizire die Gleichung (1) mit $\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu+1}{2}}}$, so kommt:

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\mu+1}} - \gamma\alpha = y'\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu+1}{2}}},$$

woraus

$$\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu+1}{2}}} = \frac{1}{2}\{y' + \sqrt{4\alpha\gamma + y'^2}\}, \tag{3}$$

wovon, bezüglich des Vorzeichens der Wurzel, die nemliche Bemerkung wie vorhin gilt.

Man bezeichne diesen letzten Ausdruck mit $a$, und insofern, als ein gewisses $y'_n$ dabei genommen wird, mit $a_n$; so ist der Fehler von $a_n$:

$$\delta_n = \frac{1}{2}\delta'_n = \frac{\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}}{2}\delta_n, \tag{3'}$$

und der Fehler von $\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}} = a'_n$ wird also sein:

$$\delta'_n = \frac{\sqrt[\mu]{\alpha^{\frac{\mu-1}{2}}}}{2\gamma}\delta_n, \tag{2'}$$

da $a'_n = \frac{1}{\gamma}a_n$.

Hiemit ist nun der vorgesetzten Aufgabe ein Genüge geleistet,

indem nachgewiesen wurde, dass die Ausziehung der $\sqrt[\mu]{\ }$ zurückgeführt werden kann auf die Ausziehung der $\sqrt[\frac{\mu-1}{2}]{\ }$ oder der $\sqrt[\frac{\mu+1}{2}]{\ }$ Wurzel einer Zahl, welche durch einfache Kettenbruch-Operationen aus der gegebenen Zahl gefunden wird. Ist nemlich $a_n$ oder $a'_n$ berechnet nach Vorschrift der Gleichungen (2) und (3), so ist

$$\sqrt[\mu]{\alpha}=\sqrt[\frac{\mu-1}{2}]{a'_n} \text{ oder } \sqrt[\mu]{\alpha}=\sqrt[\frac{\mu+1}{2}]{a_n},$$

mit einer gewissen Genauigkeit $\mathfrak{D}'_n$ und $\mathfrak{D}_n$, welche noch berechnet werden sollen. Man findet nemlich leicht:

$$\mathfrak{D}'_n=\frac{2\delta'_n\sqrt[\frac{\mu-1}{2}]{a'_n}}{(\mu-1)a'_n}=\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}.\sqrt[\mu]{\alpha}^{\frac{\mu-1}{2}}}{(\mu-1)\gamma\sqrt[\frac{\mu-1}{2}]{\alpha}^{\frac{\mu-1}{2}}}\delta_n=\frac{\sqrt[\mu]{\alpha}}{(\mu-1)\gamma}\delta_n,$$

oder annährend:

$$\mathfrak{D}'_n=\frac{\delta_n}{\mu-1}; \tag{2''}$$

und ebenso:

$$\mathfrak{D}_n=\frac{\delta_n}{\mu+1}. \tag{3''}$$

Ist also $\mu$ nicht sehr gross, so kann man annähernd annehmen:

$$\mathfrak{D}'_n=\mathfrak{D}_n=\delta_n;$$

für grössere $\mu$ wird die Näherung noch grösser.

Die Ausziehung der $\sqrt[\frac{\mu-1}{2}]{a'_n}$ und der $\sqrt[\frac{\mu+1}{2}]{a_n}$ geschieht nun auf gleiche Weise, wie die der $\sqrt[\mu]{\alpha}$, wobei man aber darauf Bedacht nehmen muss, dass der Fehler höchstens gleich $\delta'_n$ oder $\delta_n$ wird, jedenfalls aber denselben nicht übersteigen darf.

Die Wahl, ob $a$ oder $a'$ zu nehmen sei, steht ganz frei; nur wird man darauf Bedacht nehmen, welcher Weg die leichteste Reduktion auf Quadratwurzel darbietet. Bei den Werthen 3, 5, 7, 9 für $\mu$ nimmt man:

| | 3 | 5 | 7 | 9 |
|---|---|---|---|---|
| | $\alpha'$ | $\alpha'$ | $\alpha$ | $\alpha'$ |
| $\frac{\mu-1}{2}=$ | 1 | 2 | | $4=2^2$ |
| $\frac{\mu+1}{2}=$ | | | $4=2^2$ | |

Bei diesen 4 Zahlen, überhaupt bei allen von der Form $2^\nu \pm 1$, wird man also bloss eine einmalige Kettenbruch-Berechnung nöthig haben.

§. 6.

Für die Ausziehung der $\sqrt[3]{\alpha}$ erhält man folgendes Verfahren. Man suche einen angenäherten Werth $\gamma$ von $\sqrt[3]{\alpha}$, setze

$$\sqrt[3]{\alpha}-\gamma=y,\quad \alpha-\gamma^3=B;$$

so ist $y$ der Werth des Kettenbruchs

$$y=\frac{B}{3\gamma\sqrt[3]{\alpha}+y^2}$$

oder, wenn $y=\frac{y'}{\sqrt[3]{\alpha}}$ gesetzt wird, so ist $y'$ der Werth des Kettenbruchs

$$y'=\frac{B\alpha}{3\alpha\gamma+y'^2},$$

wobei allgemein

$$y'_n=\frac{B\alpha}{3\alpha\gamma+y'^2_{n-1}},\quad y'_1=\frac{B}{3\gamma}.$$

Der Fehler, der hiedurch an $y_n$ begangen wird, ist

$$\delta_n=\frac{B^{2n+1}}{12^n.27.\gamma^{6n+2}} \text{ oder } \delta_n=\frac{B^{2n+1}.\gamma}{12^n.27.\alpha^{2n+1}},$$

jenachdem $\gamma <$ oder $> \sqrt[3]{\alpha}$ genommen wurde; und es wird dann

$$\sqrt[3]{\alpha}=\frac{1}{2\gamma}\{-y'+\sqrt{4\alpha\gamma+y'^2}\}$$

oder auch aus §. 5. (1):

$$\sqrt[3]{\alpha}=\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+y'}$$

mit dem anhaftenden Fehler

$$\mathfrak{D}_n=\frac{\delta_n}{2}.$$

§. 7.

Es sei $\mu=5$, so setze man:

$$\sqrt[5]{\alpha}-\gamma=y,\quad \alpha-\gamma^5=B,\quad \alpha\gamma=a,$$

$$y=\frac{y'}{\sqrt[5]{\alpha^2}};$$

so ist $y'$ der Werth des Kettenbruchs

$$y'=\frac{B\alpha^2}{5a^2+5ay'^2+y'^4},\quad y'_n=\frac{B\alpha^2}{5a^2+5ay'^2_{n-1}+y'^4_{n-1}};$$

$$y'_1=\frac{B}{5\gamma^2}.$$

Die Fehler sind von $y$:

$$\delta_n=\frac{B^{2n+1}}{12^n.125.\gamma^{10n+4}}\text{ oder }\delta_n=\frac{B^{2n+1}\gamma}{12.125.\alpha^{2n+1}},$$

jenachdem $\gamma \lessgtr \sqrt[5]{\alpha}$. Dann ist

$$\sqrt[5]{\alpha}=\sqrt{\frac{-y'+\sqrt{4\alpha\gamma+y'^2}}{2\gamma}}$$

mit dem Fehler $\mathfrak{D}_n=\frac{\delta_n}{4}$.

§. 8.

Es sei $\mu=7$, so setze man:

$$\sqrt[7]{\alpha}-\gamma=y,$$

$$\alpha-\gamma^7=B,\quad \alpha\gamma=a,$$

und $y'$ der Werth des Kettenbruchs

$$y'_n=\frac{B\alpha^3}{7\alpha^3+14\alpha^2y'^2_{n-1}+7\alpha y'^4_{n-1}+y'^6_{n-1}},\quad y'_1=\frac{B}{7\gamma^3};$$

so ist

$$\sqrt[7]{\alpha}=\sqrt{\sqrt{\frac{y'+\sqrt{4\alpha\gamma+y'^2}}{2}}},$$

wobei der Fehler

$$\mathfrak{D}_n=\frac{B^{2n+1}}{12^n.2744.\gamma^{14n+6}}\text{ oder }=\frac{B^{2n+1}.\gamma}{12^n.2744.\alpha^{2n+1}},$$

jenachdem $\gamma<$ oder $>\sqrt[7]{\alpha}$.

## §. 9.

Für die Ausziehung der Cubikwurzel insbesondere kann noch eine mit Vortheil anwendbare, von der vorhergehenden verschiedene Methode der Zurückführung auf Quadratwurzeln aufgestellt werden.

Es ist nemlich identisch:

$$\sqrt[3]{\alpha}-\gamma=-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+\sqrt[3]{\alpha}(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)}$$

oder

$$\sqrt[3]{\alpha}=\frac{\gamma}{2}\left\{1+\sqrt{1+\frac{4\sqrt[3]{\alpha}.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)}{\gamma^2}}\right\}. \quad (1)$$

Es sei nun $\gamma$ ein bekannter Näherungswerth von $\sqrt[3]{\alpha}$, so dass

$$\sqrt[3]{\alpha}-\gamma<1,$$

absolut genommen, so wird

$$\gamma^2>4\sqrt[3]{\alpha}.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)$$

sein, wenn $\gamma>4$, sobald vorausgesetzt wird, dass $\gamma<\sqrt[3]{\alpha}$. Dies ist nun immer zu bewerkstelligen möglich, und wir können daher annehmen, es sei

$$\frac{4\sqrt[3]{\alpha}.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)}{\gamma^2}<1.$$

Entwickelt man daher die Wurzelgrösse rechts in Gleichung (1), so kommt:

$$\sqrt[3]{\alpha}=\frac{\gamma}{2}\{2+\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt[3]{\alpha}.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)}{\gamma^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{16\sqrt[3]{\alpha^2}.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^2}{\gamma^4}+\delta\},$$

wobei der Fehler $\delta$ kleiner ist als

$$\frac{2\sqrt[3]{\alpha^3}(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^3}{\gamma^5} \text{ oder } <\frac{2\alpha.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^3}{\gamma^5},$$

um welche Grösse der Näherungswerth zu klein ist. Oder es wird

$$\sqrt[3]{\alpha}=\gamma+\frac{\sqrt[3]{\alpha}.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)}{\gamma}-\frac{\sqrt[3]{\alpha^2}.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^2}{\gamma^3}+\delta$$

oder

$$\sqrt[3]{\alpha}-\gamma=(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma).\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\gamma}-(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^2.\frac{\sqrt[3]{\alpha^2}}{\gamma^3}+\delta'(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma),$$

wobei

$$\delta'<\frac{2\alpha(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^2}{\gamma^5},$$

oder, durch $\sqrt[3]{\alpha}-\gamma$ dividirt:

$$1=\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\gamma}-\frac{\sqrt[3]{\alpha^2}}{\gamma^3}(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)+\delta'$$

oder

$$\gamma^3=\gamma^2\sqrt[3]{\alpha}-\alpha+\gamma\sqrt[3]{\alpha^2}+\gamma^3\delta'$$

oder

$$\sqrt[3]{\alpha^2}+\gamma\sqrt[3]{\alpha}=\frac{\gamma^3+\alpha}{\gamma}-\gamma^2\delta',$$

woraus nun

$$\sqrt[3]{\alpha}=-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}+\gamma^2+\frac{\alpha}{\gamma}-\gamma^2\delta'}$$

oder

$$\sqrt[3]{\alpha}=-\frac{\gamma}{2}+\frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{5\gamma^3+4\alpha}{\gamma^3}-4\delta'},$$

oder

$$\sqrt[3]{\alpha}=-\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\gamma^3+4\alpha}{\gamma}}-\frac{\gamma\delta'}{\sqrt{\frac{5\gamma^3+4\alpha}{\gamma^3}}}+\dots$$

Nimmt man also den Näherungswerth

$$\sqrt[3]{\alpha}=-\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5\gamma^3+4\alpha}{\gamma}}-\varDelta; \qquad (2)$$

so ist der dabei begangene Fehler $\varDelta$ kleiner als

$$\frac{\gamma\delta'}{\sqrt{\frac{5\gamma^3+4\alpha}{\gamma^3}}} \text{ oder um so mehr } < \frac{\gamma\delta'}{\sqrt{\frac{5\gamma^3+4\gamma^3}{\gamma^3}}},$$

wenn $\gamma<\sqrt[3]{\alpha}$, oder also

$$\varDelta<\frac{\gamma\delta'}{3},$$

und somit

$$\varDelta<\frac{2\alpha(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^2}{3\gamma^4}. \qquad (3)$$

Um nun einen angenäherten Werth von $(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^2$ zu erhalten, hat man

$$\alpha-\gamma^3-3\sqrt[3]{\alpha}.\gamma.(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)=(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^3.$$

Da $\sqrt[3]{\alpha}-\gamma<1$, so wird $(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^3$ gegen die übrigen Grössen verschwinden, und es wird:

$$\sqrt[3]{\alpha}-\gamma<\frac{\alpha-\gamma^3}{3\gamma\sqrt[3]{\alpha}}<\frac{\alpha-\gamma^3}{3\gamma^2},$$

also

$$(\sqrt[3]{\alpha}-\gamma)^2<\frac{(\alpha-\gamma^3)^2}{9\gamma^4},$$

und daher

$$\varDelta<\frac{2\alpha.(\alpha-\gamma^3)^2}{27\gamma^8}. \qquad (4)$$

Lässt man bei der wirklichen Berechnung die letzte unsichere Stelle ganz weg, so wird der so erhaltene Näherungswerth von $\sqrt[3]{\alpha}$ als ein neues $\gamma$ angenommen werden können, welches ebenfalls kleiner als $\sqrt[3]{\alpha}$ sein wird. Zu bemerken ist dabei, dass allemal der folgende Näherungswerth wenigstens doppelt so viele genaue Dezimalstellen enthält, als der

gebrauchte. Die Richtigkeit dieser Behauptung folgt unmittelbar aus (3). Hat man somit z. B. mit Logarithmentafeln $\sqrt[3]{\alpha}$ auf 7 Dezimalen genau gefunden, so ergibt sich mit Hülfe von (2) $\sqrt[3]{\alpha}$ auf 14 Stellen genau u. s. f. Behufs der Anwendung dieses Verfahrens ist aber noch einmal zu bemerken, dass vorher immer $\alpha$ so eingerichtet werden muss, dass $y \geqq 4$ wird.

## §. 10.

Durch Kettenbrüche lässt sich auch die Gleichung des dritten Grades, sowie die des zweiten Grades auflösen. Wie man ersteres zu Stande bringt, soll in diesem Paragraphen gelehrt werden.

Die Gleichung des dritten Grades lässt sich bekanntlich immer leicht auf die Form bringen:

$$y^3 + Ay = B.$$

Setzt man

$$y = x\sqrt[3]{B} \text{ und } \frac{A}{\sqrt[3]{B^2}} = a,$$

so kommt:

$$x^3 + ax = 1, \tag{1}$$

mit welcher Gleichung wir uns nun beschäftigen wollen. Man bekömmt daraus

$$x = \frac{1}{a + x^2}. \tag{2}$$

Ist daher $x^2 < a$, so wird man dieses als Kettenbruchformel gebrauchen können, deren Näherungswerthe um so schneller konvergiren, je grösser $a$.

Es sei $x_{n-1}$ ein solcher Näherungswerth, so findet man den folgenden durch die Gleichung

$$x_n = \frac{1}{a + x_{n-1}^2} \text{ oder } x_n^2 = \frac{x_n}{a + x_{n-1}^2}, \tag{3}$$

woraus sich dann der Kettenbruch ergibt:

$$x_n = \cfrac{1}{a + \cfrac{x_{n-1}}{a + \cfrac{x_{n-2}}{a + \cfrac{x_{n-3}}{a + \dots \cfrac{x_1}{a}}}}}, \qquad (4)$$

welcher sich von den gewöhnlichen Kettenbrüchen dadurch unterscheidet, dass zugleich die Näherungswerthe des ursprünglichen Kettenbruchs, der aus (2) entspringt, in demselben auftreten.

Die Herstellung der successiven Näherungen bietet durchaus keine Schwierigkeit dar und man findet:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a},\\
x_2 &= \frac{1}{a + x_1^2} = \frac{a^2}{a^3 + 1},\\
x_3 &= \frac{1}{a + x_2^2} = \frac{a^6 + 2a^3 + 1}{a^7 + 3a^4 + a},\\
x_4 &= \frac{1}{a + x_3^2} = \frac{a^{14} + 6a^{11} + 11a^8 + 6a^5 + a^2}{a^{15} + 7a^{12} + 15a^9 + 12a^6 + 5a^3 + 1},
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

u. s. f.

Es ist nun der Fehler zu suchen, der bei einem bestimmten $x_n$ begangen wird. Dabei ist klar, dass der wahre Werth von $x$ je zwischen $x_n$ und $x_{n+1}$ liegen wird, und zwar näher bei $x_{n+1}$ als bei $x_n$. Jedenfalls ist also

$$x_n - x = \Delta_n < x_n - x_{n+1}. \qquad (6)$$

Es sei nun

$$x_n = \frac{Z_n}{N_n}, \quad x_{n+1} = \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}};$$

so ist:

$$\frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{1}{a + \frac{Z_n^2}{N_n^2}} = \frac{N_n^2}{aN_n^2 + Z_n^2}$$

und somit, wenn nichts reduzirt wird:

$$Z_{n+1} = N_n^2, \quad N_{n+1} = aN_n^2 + Z_n^2, \qquad (7)$$

woraus auch

$$Z_{n+1} = \{aZ_n + Z_{n-1}^2\}^3, \quad N_{n+1} = aN_n^3 + N_{n-1}^2. \tag{8}$$

Sonach wird nun, wenn $x_n - x_{n+1} = \delta_n$ gesetzt wird:

$$\delta_n = \frac{Z_n}{N_n} - \frac{Z_{n+1}}{N_{n+1}} = \frac{Z_n N_{n+1} - N_n Z_{n+1}}{N_n N_{n+1}} = \frac{aZ_n N_n^2 + Z_n^3 - N_n^3}{N_n N_{n+1}} \tag{9}$$

wegen (7) und (8), oder

$$\delta_n = \frac{N_n^2(aZ_n - N_n) + Z_n^3}{N_n N_{n+1}} = \frac{N_n^2(aN_{n-1}^2 - aN_{n-1}^2 - Z_{n-1}^2) + Z_n^3}{N_n N_{n+1}},$$

oder

$$\delta_n = \frac{Z_n^3 - N_n^2 Z_{n-1}^2}{N_n N_{n+1}} = \frac{N_{n-1}^6 - (aN_{n-1}^2 + Z_{n-1}^2)^2 Z_{n-1}^2}{N_n N_{n+1}},$$

oder

$$N_n N_{n+1}\delta_n = -a^2 N_{n-1}^4 Z_{n-1}^2 - Z_{n-1}^6 + N_{n-1}^6 - 2aN_{n-1}^2 Z_{n-1}^4. \tag{10}$$

Aus (9) folgt aber:

$$N_{n-1}N_n\delta_{n-1} = aZ_{n-1}N_{n-1}^2 + Z_{n-1}^3 - N_{n-1}^3,$$

welches, in's Quadrat erhoben, gibt:

$$N_{n-1}^2 N_n^2 \delta_{n-1}^2 = a^2 Z_{n-1}^2 N_{n-1}^4 + Z_{n-1}^6 + N_{n-1}^6 + 2aZ_{n-1}^4 N_{n-1}^2$$
$$-2aZ_{n-1}N_{n-1}^5 - 2Z_{n-1}^3 N_{n-1}^3.$$

Dieses zu (10) addirt gibt:

$$N_n N_{n+1}\delta_n + N_{n-1}^2 N_n^2 \delta_{n-1}^2 = -2N_{n-1}^3(aZ_{n-1}N_{n-1}^2 + Z_{n-1}^3 - N_{n-1}^3)$$

oder

$$N_n N_{n+1}\delta_n + N_{n-1}^2 N_n^2 \delta_{n-1}^2 = -2N_{n-1}^3 . N_{n-1}N_n\delta_{n-1}. \tag{11}$$

Man setze nun

$$\delta_n = \frac{\zeta_n}{\nu_n},$$

so dass wegen (9)

$$\left.\begin{aligned} \nu_n &= N_n N_{n+1}, \\ N_n N_{n+1}\delta_n &= \zeta_n. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Alsdann geht die Gleichung (11) über in:

$$\zeta_n + \zeta_{n-1}^2 = -2N_{n-1}^3\zeta_{n-1}$$

oder

$$\zeta_n = -\zeta_{n-1}\{\zeta_{n-1} + 2N_{n-1}^3\},$$

also auch

$$\zeta_{n-1} = -\zeta_{n-2}\{\zeta_{n-2} + 2N_{n-2}^3\},$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\zeta_2 = -\zeta_1\{\zeta_1 + 2N_1^3\};$$

woraus nun durch Multiplikation:

$$(-1)^{n-1}\zeta_n = \zeta_1(\zeta_1 + 2N_1^3)(\zeta_2 + 2N_2^3)\ldots.(\zeta_{n-1} + 2N_{n-1}^3), \qquad (13)$$

welche Gleichung nun zur Messung des Fehlers benutzt werden kann.

Durch Vereinigung von (12) mit (7) findet man nun, wenn man $n$ in $m$ umsetzt:

$$\zeta_m = aN_m^3\delta_m + N_m Z_m^2\delta_m,$$

also

$$\zeta_m + 2N_m^3 = N_m^3(a\delta_m + 2) + N_m Z_m^2\delta_m$$
$$= N_m^3\{(a\delta_m + 2) + \delta_m \frac{Z_m^2}{N_m^2}\}$$

oder

$$\zeta_m + 2N_m^3 = N_m^3\{a\delta_m + 2 + \delta_m x_m^2\} = N_m^3\{2 + \delta_m(a + x_m^2)\},$$

folglich wegen (3):

$$\zeta_m + 2N_m^3 = N_m^3\left(2 + \frac{\delta_m}{x_{m+1}}\right).$$

Substituirt man dies in (13), indem man $m$ alle ganzen Werthe von 1 bis $n-1$ annehmen lässt, und bedenkt, dass, da

$$\delta_1 = \frac{\zeta_1}{\nu_1} = \frac{1}{a} - \frac{a^2}{a^3+1} = \frac{1}{a(a^3+1)},$$
$$\zeta_1 = 1, \quad \nu_1 = a(a^3+1); \qquad (14)$$

so erhält man:

$$(-1)^{n-1}\zeta_n = (2 + \frac{\delta_1}{x_2})(2 + \frac{\delta_2}{x_3})(2 + \frac{\delta_3}{x_4})\ldots(2 + \frac{\delta_{n-1}}{x_n})(N_1 N_2 N_3 \ldots. N_{n-1})^3.$$

Da nun allgemein

$$\delta_{2m+1} = +, \quad \delta_{2m} = -;$$

folglich auch

$$\zeta_{2m+1} = +, \quad \zeta_{2m} = -;$$

so geht diese Gleichung, wenn wir von nun an alle $\delta$ als positiv annehmen und die beiden Fälle unterscheiden, wo $n$ eine gerade oder ungerade Zahl vorstellt, über in:

(15)

$$\zeta_{2n} = (2+\frac{\delta_1}{x_2})(2-\frac{\delta_2}{x_3})\ldots\ldots(2-\frac{\delta_{2n-2}}{x_{2n-1}})(2+\frac{\delta_{2n-1}}{x_{2n}})(N_1\ldots\ldots N_{2n-1})^2,$$

$$\zeta_{2n+1} = (2+\frac{\delta_1}{x_2})(2-\frac{\delta_2}{x_3})\ldots\ldots(2+\frac{\delta_{2n-1}}{x_{2n}})(2-\frac{\delta_{2n}}{x_{2n+1}})(N_1\ldots\ldots N_{2n})^2.$$

Es sei nun $a$ positiv, so ist $x_1$ der grösste Werth von $x_m$ und $x_2$ der kleinste, und daher wird:

$$\zeta_{2n} < (2+\frac{\delta_1}{x_2})(2-\frac{\delta_2}{x_1})\ldots\ldots(2-\frac{\delta_{2n-2}}{x_1})(2+\frac{\delta_{2n-1}}{x_2})(N_1\ldots\ldots N_{2n-1})^2,$$

$$\zeta_{2n+1} < (2+\frac{\delta_1}{x_2})(2-\frac{\delta_2}{x_1})\ldots\ldots(2+\frac{\delta_{2n-1}}{x_2})(2-\frac{\delta_{2n}}{x_1})(N_1N_2\ldots\ldots N_{2n-1})^2.$$

Von allen $\delta_{2m+1}$ ist ferner $\delta_1$ das grösste und von den $\delta_{2m}$ das kleinste: $\delta_{2n-2}$ in $\zeta_{2n}$ und in $\zeta_{2n+1}$ ist $\delta_1$ das grösste und $\delta_{2n}$ das kleinste, folglich ist um so mehr:

$$\zeta_{2n} < (2+\frac{\delta_1}{x_2})^n.(2-\frac{\delta_{2n-2}}{x_1})^{n-1}.(N_1N_2\ldots\ldots N_{2n-1})^2,$$

$$\zeta_{2n+1} < (2+\frac{\delta_1}{x_2})^n.(2-\frac{\delta_{2n}}{x_1})^n.(N_1N_2\ldots\ldots N_{2n})^2;$$

also

$$\left.\begin{aligned}\delta_{2n} &< (2+\frac{\delta_1}{x_2})^n(2-\frac{\delta_{2n-2}}{x_1})^{n-1}.\frac{(N_1N_2\ldots\ldots N_{2n-1})^2}{N_{2n}N_{2n+1}},\\ \delta_{2n+1} &< (2+\frac{\delta_1}{x_2})^n(2-\frac{\delta_{2n}}{x_1})^n.\frac{(N_1N_2\ldots\ldots N_{2n})^2}{N_{2n+1}N_{2n+2}}.\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Um diese Formeln noch mehr zu reduziren, betrachten wir nun allgemein den Quotienten

$$\frac{(N_1 N_2 \ldots . N_{m-1})^3}{N_m N_{m+1}} = q_m .$$

Da $N_{m+1} = aN_m^2 + Z_m^2$, so ist $N_{m+1} > aN_m^2$, und

$$q_m < \frac{(N_1 N_2 \ldots . N_{m-1})^3}{aN_m^3},$$

ferner:

$$\begin{aligned} N_m &> aN_{m-1}^2 , \\ &> aN_{m-1} . aN_{m-2}^2 , \\ &> aN_{m-1} . aN_{m-2} . aN_{m-3} , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &> aN_{m-1} . aN_{m-2} \ldots . aN_1 . N_1 \end{aligned}$$

oder, da $N_1 = a$, so ist:

$$N_m > a^m (N_1 N_2 \ldots . N_{m-1}),$$

also

$$aN_m^3 > a^{3m+1} (N_1 N_2 \ldots . N_{m-1})^3 ;$$

folglich

$$q_m < \frac{1}{a^{3m+1}},$$

daher

$$q_{2n} < \frac{1}{a^{6n+1}}, \quad q_{2n+1} < \frac{1}{n^{6n+4}},$$

und durch Substitution in (16):

$$\delta_{2n} < \frac{(2 + \frac{\delta_1}{x_2})^n . (2 - \frac{\delta_{2n-2}}{x_1})^{n-1}}{a^{6n+1}},$$

$$\delta_{2n+1} < \frac{(2 + \frac{\delta_1}{x_2})^n . (2 - \frac{\delta_{2n}}{x_1})^n}{a^{6n+4}}.$$

Diese Formeln können durch folgende Betrachtungen noch vereinfacht werden.

Es ist

$$x_1 = \frac{1}{a}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{x_1} = a ;$$

$$x_2 = \frac{a^2}{a^3+1}, \quad \text{also} \quad \frac{1}{x_2} = \frac{a^3+1}{a^2};$$

ferner ist

$$2 - \frac{\delta_{2n-2}}{x_1} = 2 - a\delta_{2n-2} < 2$$

und kommt dem Werth 2 um so näher, je kleiner $\delta_{2n-2}$, also je grösser $n$ ist. Es ist somit mit Hülfe von (14):

$$2 + \frac{\delta_1}{x_2} = 2 + \frac{a^3+1}{a^3(a^3+1)} = \frac{2a^3+1}{a^3},$$

also hat man endlich, da auch $\Delta_m < \delta_m$:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{2n} &< \frac{(2a^3+1)^n . 2^{n-1}}{a^{9n+1}}, \\ \Delta_{2n+1} &< \frac{(2a^3+1)^n . 2^n}{a^{9n+4}}. \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

Wenn $n$ nicht gross ist, dagegen $a$ eine solche Grösse hat, dass

$$2a^3+1 \quad \text{von} \quad 2a^3$$

nicht sehr verschieden ist, so kann man auch näherungsweise setzen

$$\Delta_{2n} = \frac{2^{2n-1}}{a^{6n+1}}, \quad \Delta_{2n+1} = \frac{2^{2n}}{a^{6n+4}}. \tag{18'}$$

## §. 11.

Zum Schluss unserer theoretischen Betrachtungen soll noch kurz die Auflösung der quadratischen Gleichungen durch Kettenbrüche und die Anwendung derselben auf die Quadratwurzelausziehung auf demselben Wege gezeigt werden.

Es sei die Gleichung vorgelegt:

$$x^2 + ax = 1, \tag{1}$$

auf welche jede quadratische Gleichung zurückgeführt werden kann, so ist daraus:

$$x = \frac{1}{a+x},$$

und die Kettenbruchentwickelung folgt nach dem Gesetz:

$$x_n = \frac{1}{a + x_{n-1}}, \quad \text{wobei} \quad x_1 = \frac{1}{a}. \tag{2}$$

Man findet nun auf dem Wege der Induktion die Formeln:

(3)

$$x_{2n} = \frac{a^{2n-1} + \binom{2n-2}{1} a^{2n-3} + \binom{2n-3}{2} a^{2n-5} + \binom{2n-4}{3} a^{2n-7} + \ldots + na}{a^{2n} + \binom{2n-1}{1} a^{2n-2} + \binom{2n-2}{2} a^{2n-4} + \binom{2n-3}{3} a^{2n-6} + \ldots \binom{n+1}{2} a^2 + 1},$$

$$x_{2n+1} = \frac{a^{2n} + \binom{2n-1}{1} a^{2n-2} + \binom{2n-2}{2} a^{2n-4} + \binom{2n-3}{3} a^{2n-6} + \ldots \binom{n+1}{2} a^2 + 1}{a^{2n+1} + \binom{2n}{1} a^{2n-1} + \binom{2n-1}{2} a^{2n-3} + \binom{2n-2}{3} a^{2n-5} + \ldots (n+1)a},$$

deren Richtigkeit leicht geprüft werden kann. Diese Ausdrücke konvergiren gegen einen bestimmten Werth $x$, wenn $a > 1$ und die Fehlergrenze ist:

$$\Delta_m < \frac{1}{N_m^2},$$

wenn $N_m^2$ den Nenner von $x_m$ vorstellt. $a$ kann dabei positiv oder negativ sein, indem, wenn $a$ negativ ist, $x$ nur das Zeichen ändert.

Die Wurzeln der Gleichung (1) sind:

$$\left.\begin{aligned} x &= -\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} \\ \text{und} \qquad & \\ x &= -\frac{a}{2} - \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Wenn $a$ positiv ist, so ist der durch den Kettenbruch gefundene Werth jedenfalls positiv und somit stellt derselbe die erste Wurzel vor. Die zweite Wurzel ist dann gleich

$$-(a + x_m).$$

Ist in Gleichung (1) aber $a$ negativ $= -a'$, oder ist dieselbe von der Form

$$x^2 - a'x = 1,$$

so setze man $x = -x'$, und man erhält:

$$x'^2 + a'x' = 1,$$

wovon durch den Kettenbruch die Wurzel:

$$x' = -\frac{a'}{2} + \sqrt{1 + \frac{a'^2}{4}},$$

oder also

$$x = \frac{a'}{2} - \sqrt{1 + \frac{a'^2}{4}}.$$

In diesem Fall wird also die zweite Wurzelform (5) berechnet und die andere Wurzel ist dann gleich

$$+(a' - x_m).$$

Um nun hievon die Anwendung auf die Ausziehung von Quadratwurzeln aus Zahlen zu machen, hat man die Gleichung:

$$-\frac{a}{2} + \sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} = x_m$$

oder

$$\sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} = x_m + \frac{a}{2},$$

unter der Annahme, dass $a$ positiv sei. Man setze nun

$$\sqrt{1 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{b},$$

so ist

$$1 + \frac{a^2}{4} = b, \quad a^2 = 4(b-1),$$

und

$$a = 2\sqrt{b-1}.$$

Um $\sqrt{b}$ zu berechnen, braucht man also bloss in (3) anstatt $a$ die Grösse $2\sqrt{b-1}$ zu setzen. Thut man dies, so bekommt man:

(5)

$$x_{2n} =$$

$$\frac{2^{2n-1}(b-1)^{n-1}+\binom{2n-2}{1}2^{2n-3}(b-1)^{n-2}+\ldots n.2}{2^{2n}(b-1)^{n}+\binom{2n-1}{1}2^{2n-2}(b-1)^{n-1}+\ldots\binom{n+1}{1}2^{2}.(b-1)+1}\sqrt{b-1},$$

$$x_{2n+1} =$$

$$\frac{2^{2n}(b-1)^{n}+\binom{2n-1}{1}2^{2n-2}(b-1)^{n-1}+\ldots\binom{n+1}{2}2^{2}.(b-1)+1}{2^{2n+1}(b-1)^{n+1}+\binom{2n}{1}2^{2n-1}(b-1)^{n}+\ldots(n+1).2(b-1)}\sqrt{b-1};$$

also allgemein

$$x_m = B.\sqrt{b-1} \qquad (7)$$

und somit:

$$\sqrt{b} = B\sqrt{b-1}+\sqrt{b-1}$$

oder

$$\sqrt{b} = (B+1)\sqrt{b-1}. \qquad (8)$$

Kann man $\sqrt{b-1}$ ausziehen oder auf eine kleinere Wurzel zurückführen, so ist $\sqrt{b}$ berechnet. Es sei also

$$\sqrt{b-1} = c\sqrt{b'},$$

so hat man alsdann:

$$\sqrt{b} = c(B+1)(B'+1)\sqrt{b'-1}, \qquad (8')$$

mit der man wieder auf gleiche Weise verfährt, bis man auf eine Wurzel

$$\sqrt{b^{(p}}$$

gelangt, die man ausziehen kann, womit nun die Rechnung beendigt ist.

Hiemit beschliessen wir den theoretischen Theil vorliegenden Aufsatzes und wollen zur Verdeutlichung der angegebenen Methode dieselbe noch auf mehrere Beispiele anwenden.

## §. 12.

Als Beispiel zu §. 6. sei $\sqrt[3]{9}$ auszuziehen.

Es ist

$$\alpha = 9, \quad \gamma = 2,$$

$$B = 1;$$

folglich bei der dritten Näherung der Fehler

$$\delta_3 < \frac{1}{12^3 . 27 . 2^{20}} = \frac{1}{48817'504256}$$

und

$$D_3 = \frac{1}{100'000'000000} = 0'000'000'00001;$$

also erhält man $y_3$ und folglich $\sqrt[3]{9}$ auf 10 Stellen genau. Ferner ist:

$$y_1' = \frac{1}{6}, \quad y_2' = \frac{324}{1945}, \quad y_3' = \frac{3783025}{22709814},$$

also

$$\sqrt[3]{\alpha} = 1 + \sqrt{1 + \frac{3783025}{22709814}} = 1 + \sqrt{1,166581'064908'765875'45}$$

oder

$$\sqrt[3]{9} = 2,080083'82309 \ldots.$$

Diese nemliche Wurzel wollen wir auch nach der Methode des §. 9. berechnen. Da man $\gamma > 4$ machen muss, so hat man:

$$\sqrt[3]{9} = \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{72}.$$

Man findet nun auf dem daselbst angegebenen Wege:

$$\sqrt[3]{\alpha} = \sqrt[3]{72} = 4,1601 = \gamma,$$

so dass der Fehler kleiner ist als 0,0001 und der Fehler $\Delta$ des folgenden Näherungswerthes

$$\Delta < 0,000000'001.$$

Derselbe ist nach §. 9. (2):

$$\sqrt[3]{72} = -2,08005 + \tfrac{1}{3}\sqrt{155,761265119589674}$$

oder

$$\sqrt[3]{9} = 2,080083'823 \ldots,$$

welches mit dem vorhin gefundenen Werthe übereinstimmt.

## §. 13.

Als Beispiel zu §. 10. soll die Wurzel der Gleichung:

$$x^3 + 10x = 1$$

berechnet werden. Nach (17′) ist schon bei der zweiten Näherung

$$\varDelta = \frac{16}{10'000'000'000'000'000}$$

oder

$$\varDelta < 0{,}000000'000000'002;$$

die Wurzel wird also wenigstens auf 14 Dezimalstellen genau. Dieselbe wird (nach (5)) gleich

$$x^2 = \frac{100}{1001} = 0{,}099900'099900'099\ldots.$$

## §. 14.

Als Beispiel zu §. 11. soll

$$\sqrt{17}$$

gefunden werden. Für $n = 6$ findet man, da $b - 1 = 16$:

$$x_6 = \frac{2^5.16^2 + 4.2^3.16 + 3.2}{2^6.16^3 + 5.2^4.16^2 + 6.2^2.16 + 1}.4 = \frac{4.8710}{283009},$$

$$x_6 = 0{,}123105'62560.$$

Der Fehler ist:

$$\varDelta < \frac{1}{283009^2} \quad \text{oder} \quad < 0{,}000000'00001,$$

also $x_6$ auf 11 Stellen genau; folglich ist, da

$$\sqrt{b} = x_m + \sqrt{b-1},$$

$$\sqrt{17} = 4{,}123105'62560\ldots.$$

## XXV.

# Johann Joseph Prechtl.

Von

Herrn Professor Dr. *A. Schrötter*,

General-Secretär der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien *).

---

**Prechtl** (Johann Joseph) wurde zu Bischofsheim im Unter-Mainkreise in Baiern den 16. November 1778 geboren, wo sein Vater fürstlich-würzburgischer Commercienrath und Vorsteher eines Eisenhüttenwerkes war. Er genoss eine sorgfältige Erziehung und vollendete seine juridischen Studien an der Universität Würzburg. Bald nach deren Beendigung begab er sich nach Wien (1801) mit einer bereits entschiedenen Neigung für die Naturwissenschaften und ihre Anwendung auf das praktische Leben. Er hatte anfangs die Absicht, beim damaligen Reichshofrathe zu prakticiren, gab jedoch diesen Entschluss bald auf und trat als Erzieher in das gräflich Taaffe'sche Haus in Brünn, wo er neben der gewissenhaftesten Erfüllung seiner übernommenen Pflichten als Lehrer und Erzieher sich ausschliesslich mit dem ernsten Studium der Naturwissenschaften beschäftigte. Hier war es, wo er den Grund zu der Allseitigkeit seines Wissens legte, die man später so sehr an ihm bewunderte und die ihn zur glücklichen Lösung jener grossen Aufgabe in so hohem Grade befähigte, welche ihm später werden sollte. Er schloss daselbst eine dauernde Freundschaft mit dem damals in Brünn lebenden, verdienstvollen Wirthschafts-

---

*) Aus dem Bericht über die Wirksamkeit der k. Akademie der Wissenschaften und die in derselben seit 30. Mai 1854 vor sich gegangenen Veränderungen. Erstattet in der feierlichen Sitzung am 30. Mai 1855 von Dr. A. Schrötter, General-Secretär der k. Akademie der Wissensch. Wien. 1855. S. 49.

rathe Christian André, mit dem ihn später nähere Familienbande verknüpften, da er sich im Jahre 1807 mit einer Tochter desselben, Rosine André, vermählte.

Prechtl erregte bald durch seine literarischen Arbeiten auch in grösseren Kreisen Aufmerksamkeit und so kam es, dass er im Jahre 1809 zum Director der damals in Triest zu errichtenden Real- und Navigations-Academie ernannt und mit der Organisation dieses Institutes beauftragt wurde. Aber schon nach dem Friedensschlusse kehrte er nach Wien zurück, um an der damaligen Real-Academie Naturgeschichte, Physik und Chemie zu lehren.

Das Bedürfniss nach zeitgemässen, nicht blos zur Bildung von Beamten bestimmten Unterrichts-Anstalten, deren Zweck vielmehr Verbreitung gründlicher Kenntnisse aus den Naturwissenschaften zum Behufe ihrer Anwendung im praktischen Leben sein sollte, hatte sich damals so lebhaft und allseitig ausgesprochen, dass Kaiser Franz I. die Errichtung eines polytechnischen Institutes in Wien, nach einem grossartigen, dieses, in der Geschichte Oesterreichs so hervorragenden Monarchen, würdigen Massstabe befahl.

Welche Wichtigkeit Kaiser Franz dieser seiner Schöpfung beilegte, geht deutlich aus der Stellung und den für die damaligen Verhältnisse höchst anständigen Gehalten hervor, die der Kaiser den Professoren dieser Anstalt anwies, und aus der bedeutenden Summe, welche er für die wissenschaftlichen Zwecke derselben bestimmte. Zur Bildung des hiezu nothwendigen Fonds wurden bereits im Jahre 1803 die nöthigen Einleitungen getroffen. Prechtl überreichte den ersten Plan zum Wiener polytechnischen Institute dem damaligen Hofkammer-Präsidenten Grafen O'Donnel im Anfange des Jahres 1810; im Jahre 1814 wurde er beauftragt, diesem entsprechend einen Detailplan einzureichen, was einen Monat später geschah. Im December des Jahres 1814 wurde Prechtl zum Director des zu errichtenden Institutes ernannt (mit Allerh. Entschl. vom 24. Dec.), welche Stelle er durch 35 Jahre ruhmvoll bekleidete.

Gleich nach seiner Ernennung war Prechtl aufs Eifrigste bemüht, sowohl die Localitäten in dem zu diesem Behufe um 200,000 fl. W. W. angekauften gräflich Lose'schen Hause einzurichten, als auch die nöthigsten Lehrmittel herbeizuschaffen. Kaiser Franz berief ihn im August 1815 nach Paris, wo damals die Alliirten anwesend waren, und stellte ihm eine ansehnliche Summe zum Ankauf von Büchern, Apparaten, Modellen, Mustern etc. zur

Verfügung. Auf diese Weise gelang es **Prechtl**, das Institut schon am 3. November 1815 eröffnen zu können. Er that dies mit einer Rede, in welcher er das Programm desselben und zugleich sein künftiges Wirken klar und einfach darlegte. Das Institut, welches bald ein Muster für ganz Deutschland werden sollte, war von nun an mit seinem Leben aufs Innigste verwebt, und eine Geschichte dieser Anstalt schreiben, heisst, eine der segensreichsten Seiten von **Prechtl's** Leben schildern. Seine allseitige Gelehrsamkeit, die specielle Bekanntschaft mit den Fächern die an dieser Anstalt gelehrt werden, und die genaue Kenntniss der naturwissenschaftlichen Literatur aller cultivirten Länder, sowie ihrer merkantilen und gewerblichen Verhältnisse machte ihn zur Seele derselben. Ihm war es, wie unter andern die Gründung der Jahrbücher des polytechnischen Institutes bewies, vom Anfang an klar, dass das Institut, wenn es auf das industrielle Leben einwirken sollte, auch ein lebendiger Organismus sein musste; er war es daher, der demgemäss eine vernünftige Lehr- und Lern-Freiheit an demselben zu einer Zeit einführte, wo man noch glaubte, den Studien durch möglichste Beschränkung jeder freien Bewegung des Geistes aufzuhelfen. **Prechtl** war weit davon entfernt, ein Institut, welches das verbindende Glied zwischen der Industrie und der Wissenschaft werden sollte, durch blosse Disciplinar-Vorschriften leiten zu wollen, er wusste zu gut, dass nur bei einem genauen Eingehen auf die Bedürfnisse der Lehrer und Schüler, sowie einem geistigen, befruchtenden Verkehr mit denselben aus dem Institute mehr werden konnte als eine **besser dotirte Realschule**, nämlich, wie es in der Absicht des hohen Gründers lag, eine **Universität des technischen Wissens**.

Wurde nicht alles wie **Prechtl** es sich dachte, so lag die Schuld nicht an ihm, sondern eben nur daran, dass er nur Wenige fand, die auf seine Ideen einzugehen vermochten, aber um so mehr solche, die es leichter fanden, an der neuen Schöpfung zu maassregeln, als deren Geist aufzufassen.

Man kann bei der Einrichtung technischer Schulen von einer andern Ansicht ausgehen als **Prechtl**, man kann wenigstens bei höheren technischen Lehranstalten keine so scharfe Ausschliessung jedes, für allgemeine Bildung bestimmten Lehrfaches anstreben, als er für zweckmässig hielt, allein das wird jeder zugestehen müssen, dass **Prechtl** sich vom Anbeginn dessen, was er wollte, klar bewusst war, und dass er sein Ziel mit Consequenz und Geist verfolgte. Sein ängstliches Bemühen, der grossartigen Schöpfung, welche Kaiser **Franz** durch ihn i'ns Leben gerufen, Zeit zu ihrer Befestigung zu lassen, mag ihn abgehalten haben,

manchen Forderungen der Zeit Rechnung zu tragen; wer aber, der die traurigen Folgen jener unstäten Neuerungssucht kennt, die nur um zu verändern, nicht um zu verbessern Kraft verbraucht, wird Prechtl darum tadeln? Die Grundsätze, von denen er ausging stehen fest, ihre Erweiterung bedingt das Bedürfniss der Zeit, aber diese muss noch um ein Stück weiter vorgerückt sein, ehe die Wirksamkeit Prechtl's von dieser Seite der unparteiischen Feder des Geschichtsschreibers anheimfällt *).

Wer nicht gewohnt ist einseitig zu urtheilen, und das unbedingt zu verwerfen, was er anders findet, als er es eben kennen lernte, wer es nicht verschmäht, fremde Verhältnisse erst gründlich zu studiren, ehe er in sie eingreift, der wird zu der Ueberzeugung gelangen, dass Prechtl in den Ideen, welche er bei Gründung des Institutes verfolgte, seiner Zeit vorauseilte, und dass man namentlich in Deutschland kaum noch jetzt zu begreifen anfängt, was er lange vorher schon bezweckte und unter der Gunst der Umstände ausführte.

Fassen wir nun eine andere Seite von Prechtl's Leben in's Auge, nämlich die, wo er sich nicht als Organisator und strenger Beamter, sondern als Forscher und sammelnder Gelehrter zeigte. Wir bewegen uns hier freier und können die Blüthen, die Prechtl's Geist und Thätigkeit auf diesem Felde pflückte, unbesorgt vor falscher Auslegung in den Kranz seines Andenkens flechten.

Schon im Jahre 1804 veröffentlichte Prechtl eine 21 Bogen starke Schrift, „über die Fehler der Erziehung" (Braunschweig, 1804), welche zeigt, dass er sich damals bereits feste pädagogische Grundsätze und bestimmte Ueberzeugungen gebildet hatte, die er später so consequent verfolgte. Nichts ist für die edle Denkungsweise und die durchaus humanen Ansichten, welche Prechtl stets leiteten, bezeichnender, als diese an Ideen und Wahrheiten so reiche Schrift, deren ernste Berücksichtigung auch gegenwärtig noch sehr nützlich wäre. Das edle Gemüth Prechtl's spiegelt sich treu ab in dem Capitel „Ueber die Unwürdigkeit und die Nachtheile der Erziehungs-Strenge, insbesondere der körperlichen Züchtigung." Was er über die Nothwendigkeit der Leitung der öffentlichen Erziehung durch den Staat sagt, kann auch jetzt nicht besser durchgeführt werden, wenn er auch in seiner idealen Anschauung, diesem bei der Privaterziehung einen grösseren Einfluss vindiciren möchte, als man ihm jetzt einzuräumen geneigt

*) Einiges Material hierzu findet sich in den Jahrbüchern des k. k. polytechnischen Institutes. Bd. I.

sein würde. Prechtl's Ansichten über den relativen Werth der Erziehung werden zu allen Zeiten wahr bleiben, und die Art, wie er sich darüber äussert, ist in hohem Grade anziehend. Ueberhaupt verdiente dieses in völlige Vergessenheit gerathene Buch, dieser entrissen zu werden.

Ueber das Studium der Naturwissenschaften spricht sich Prechtl in einer Weise aus, die seine Liebe zu denselben deutlich erkennen lässt und für ihn bezeichnend ist. Mit welchem Ernst er diese Richtung verfolgte, zeigt die Thatsache, dass er im Jahre 1805 für eine Schrift „Ueber die Physik des Feuers" von der k. holländischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Haarlem mit der goldenen Preismedaille belohnt wurde.

Im 19. Bande von Gilbert's Annalen (1805) findet sich ein Schreiben Prechtl's, der damals noch Erzieher beim Grafen Taaffe war, an Gilbert, in welchem er kurze Nachricht gibt von seinen Untersuchungen über die zu jener Zeit noch gänzlich unbearbeitete Theorie des Fluges der Vögel. Dass er die Schwierigkeiten seiner Aufgabe richtig erkannte und ihre Lösung von der rechten Seite versuchte, beweiset die im 23. Bande der Annalen abgedruckte grosse Abhandlung: „Ueber den absoluten Widerstand, den eine in der Luft bewegte Fläche auf die Richtung ihrer Bewegung senkrecht erleidet," die er eben in dem obigen Briefe angekündigt hatte. Er zeigte, wie das damals angenommene Gesetz, dass der Widerstand der Luft wie das Quadrat der Geschwindigkeit wächst, für grössere Geschwindigkeiten nicht gelte.

Fest in derselben Richtung verharrend, beschäftigte sich später Prechtl, wenn auch darin mehrfach unterbrochen, mit der Erforschung des Mechanismus und der Theorie des Fluges der Vögel. Die Annalen der Physik enthalten im 30. Bande (1808) und in den folgenden Bänden hierauf bezügliche Mittheilungen. Als letzte reife Frucht dieses unermüdlichen Forschens erschien 38 Jahre später bei C. Gerold in Wien eine Schrift: „Untersuchung über den Flug der Vögel" 17 Bogen stark, welche wegen ihres Reichthums an Thatsachen und der scharfsinnigen Auffassung dieses schwierigen Gegenstandes, so wie der gründlichen Behandlung des anatomischen, physiologischen und physicalischen Theiles allgemeine Bewunderung erregt hat, und stets als Grundlage für alle späteren Forschungen auf diesem Gebiete dienen wird.

Während Prechtl die Widerstandserscheinungen in der Luft durch 40 Jahre unausgesetzt im Auge behielt, blieb er doch den Fortschritten in den übrigen Theilen der Naturwissenschaften nicht fremd; wir sehen im Gegentheil, dass er sich bei jeder Zeitfrage

lebhaft betheiligt, was unter andern seine Aufsätze über das Sandparadoxon, dessen richtige Erklärung er zuerst gab, bezeugen.

Diese Forschungen auf dem Gebiete der mechanischen Physik konnten Prechtl am wenigsten in jener denkwürdigen Zeit gänzlich fesseln, wo durch die Entdeckung der chemischen Wirkungen des elektrischen Stromes eine neue Epoche für die Naturwissenschaft eintrat, wo sich die glänzende Reihe von Eroberungen auf diesem Gebiete eröffnete, unter deren Einflusse das gegenwärtige Geschlecht heranwuchs und noch lebt. Die Aufmerksamkeit der Naturforscher wandte sich damals besonders den sogenannten Imponderabilien zu; man machte sich mehr und mehr von den alten Vorstellungen los, nach welchen die Erscheinungen von Licht, Wärme, Elektricität und Magnetismus besonderen Stoffen zugeschrieben wurden, und fing an zu begreifen, dass eine Mechanik der Atome ein eben so grosses Bedürfniss für den Fortschritt der Physik sei, wie die Mechanik des Himmels eine Lebensfrage für die Astronomie war. Prechtl, immer noch Erzieher beim Grafen Taaffe, veröffentlichte eine Abhandlung über die Identität von Licht und Wärme (Gilbert's Annalen, XX. Band, 1805) die den Uebergang zu den jetzigen Ansichten der Physiker deutlich bezeichnet, und mit der ihm eigenen Klarheit und Einfachheit geschrieben ist. Wäre Prechtl damals in der Lage gewesen Versuche anzustellen, hätte es ihm nicht an äusserer Anregung durch Gedankenaustausch gemangelt, er hätte gewiss wichtige Thatsachen gefunden. In einem Briefe an Gilbert (Brünn, März 1806) schreibt er: „Wie manche Schuppen werden uns nicht von den Augen fallen, wenn die elektrischen und magnetischen Plus- und Minus-Flüssigkeiten, Wärmestoff und Lichtstoff für uns nur die Repräsentanten einer und derselben Kraft sind! Ich möchte über alles das so viele Versuche anstellen (denn alles das lässt sich wohl nach und nach der Natur durch Versuche extorquiren), aber wo dazu Zeit, Gelegenheit und Instrumente hernehmen? Unsere gegenwärtige Temperatur ist eigentlich die Schöpferin der gegenwärtigen Form der Dinge und unserer Erkenntnissart; sobald wir uns gewöhnen, diese Form nicht als eine absolute, sondern nur als eine solche anzusehen, die unter tausend möglichen zufälliger Weise für uns die Einzige geworden ist: so werden unsere Entdeckungen sicher einen raschern Gang nehmen, und wir werden dann unsere Versuche zweckmässiger ordnen, ohne so oft im Finstern zu tappen."

Von dieser Zeit an hat sich Prechtl eifrig mit Erforschung der schwierigsten Punkte der damals im Werden begriffenen Elektricitätslehre befasst. Erman's berühmte Arbeit über die elek-

trische Leitungsfähigkeit der Körper gab ihm unter andern Veranlassung zu einer grösseren Abhandlung über denselben Gegenstand, die im 35. Bande von Gilbert's Ann. (1810) niedergelegt ist und viel zur Fesstellung klarer Vorstellungen in diesem Gebiete beitrug. Es lag in derselben der Keim zu manchen, später von Andern gemachten Entdeckungen, die Prechtl, den damals bereits die administrative Thätigkeit in Anspruch nahm, weiter zu verfolgen nicht vergönnt war. Er beklagte sich später gegen Gilbert, dass man seinen Grundsatz der „relativen Isolirung" so wenig beachte, und es kann nicht geleugnet werden, dass er schon zu jener Zeit vieles als Folgerungen aus demselben hinstellte, was erst lange nachher als richtig erkannt wurde, z. B. die Abhängigkeit der Leitungsfähigkeit von der Intensität der Elektricität.

Prechtl's Tendenz ging immer dahin, die Imponderabilien auf eine einzige Grundursache zurückzuführen und dieses Bestreben leitete alle seine Unternehmungen auf diesem Gebiete. Er stellte daher auch viele Versuche an, die, was hier nicht verschwiegen werden darf, nahe daran waren, ihn zum Entdecker des Oersted'schen Fundamentalfactums zu machen. Schon im Jahre 1808 hing nämlich Prechtl eine Zink-Kupfer-Säule an nicht gedrehten Seidenfäden auf, um zu erfahren, ob sie sich nach den Polen richte. Würde er diese Säule geschlossen haben, so hätte er zu seinem Erstaunen gesehen, dass sie sich von Ost nach West, nicht aber, wie er erwartete, von Nord nach Süd gewendet hätte. Prechtl kannte schon im Jahre 1811 die Magnetisirung des Eisens durch den elektrischen Strom, und doch war es ihm nicht vergönnt, vor Oersted und Ampère den directen Zusammenhang zwischen Elektricität und Magnetismus klar auszusprechen. An so zarten Fäden hängt die Entwickelung der Wissenschaft, sie gedeiht daher nur dort, wo sie mit Liebe gepflegt wird! —

Bald nach der Entdeckung Oersted's publicirte Prechtl im 67. Bande von Gilbert's Annalen eine wichtige Arbeit „über die wahre Beschaffenheit des magnetischen Zustandes des Schliessungsdrathes in der Volta'schen Säule", wo er denselben als Transversalmagnet betrachtete und auf diese Weise die neuen, daran beobachteten Erscheinungen auf eine der Erfahrung entsprechende Weise darstellte. Diese Arbeit verfehlte nicht, die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich zu ziehen und sichert Prechtl eine dauernde Anerkennung, wenn diese Hypothese auch bald der tieferen Anschauungsweise Ampère's weichen musste. Noch in demselben Jahre (Bd. 68 von Gilbert's Ann.) gibt Prechtl weitere Erläuterungen über den „elektrischen Magnetismus" und

sucht auf experimentellem Wege zu beweisen, dass die „magnetische Disposition des Longitudinalmagnetes dieselbe ist, wie die elektrische Disposition der isolirten Volta'schen Säule, eines mit elektrischer Polarität geladenen Körpers."

Dies war eigentlich die letzte Arbeit Prechtl's in diesem Gebiete. Er wendete sich nun der Wärmelehre und Optik zu und gab allen seinen Arbeiten eine mehr praktische Richtung. Poggendorff, der nach dem Tode des um die Verbreitung und Erhaltung gründlicher Naturforschung in Deutschland so hoch verdienten Gilbert die Herausgabe der Annalen der Physik übernahm, und sie in demselben Geiste der Unparteilichkeit und Gründlichkeit noch fortführt, sah sich veranlasst, einen Aufsatz Prechtl's „über das Gesetz der Abnahme der Wärme mit der Höhe aus dem Jahrbuche des polytechnischen Instituts in seine Annalen aufzunehmen und die Bemerkung beizufügen, dass derselbe, „obgleich schon seit geraumer Zeit dem 3. Bande des trefflichen Jahrbuches des k. k. polytechnischen Instituts in Wien einverleibt, dennoch nicht, so wie er es gewiss seinem Interesse nach verdient, dem grösseren physicalischen Publicum bekannt geworden ist."

In jene Periode fallen noch die interressanten Mittheilungen, welche Prechtl in Gehlen's Journal für Chemie, Meteorologie, Physik und Mineralogie einrückte. Der 5. Band dieser sehr reichhaltigen Zeitschrift enthält eine Mittheilung über den merkwürdigen Steinregen bei Stannern in Mähren am 22. Mai 1808, wobei er sich nicht begnügte, eine ausführliche Darstellung dieses Ereignisses zu geben, sondern auch seine eigene Ansicht über den Ursprung desselben entwickelte. Er sprach sich darin mit Geist für die von Chladni schon im Jahre 1794 in seiner Schrift „Ueber den Ursprung der von Pallas gefundenen und anderer ihr ähnlichen Eisenmassen" u. s. w. aufgestellte Hypothese aus, dass dieselben aus dem Weltenraume stammen und weder in der Atmosphäre gebildet werden, noch vom Monde auf die Erde fallen, welche beide zuletzt genannten Ansichten damals viele Anhänger zählten.

Die damals von Chladni, Prechtl und Andern vertheidigte kosmische Ansicht über den Ursprung der Meteoriten ist die nun allgemein angenommene, da sowohl die seit jener Zeit reichlich gesammelten Beobachtungen dieser im Weltenraume zerstreuten Massen, als auch die Fortschritte der Naturwissenschaft überhaupt jede andere Erklärungsweise ihres Ursprunges in den Hintergrund drängten. Die Bestimmtheit und Zuversicht, mit der sich Prechtl

schon damals für diese Ansicht erklärte, ist ein sprechender Beweis für seinen Scharfsinn und klaren Geist.

Bald nach dieser Arbeit erschien im 6. Bande von Gehlen's Journal eine freie Bearbeitung von Avogadro's Abhandlung: „Ueber die Natur des elektrischen Ladungszustandes." Unmittelbar darauf liess Prechtl eine grössere Abhandlung folgen, unter dem bescheidenen Titel: „Einige Bemerkungen über Herrn Avogadro's Abhandlung", in welcher er die Symmer'sche Ansicht bekämpft und in scharfsinniger, höchst anregender Weise zu zeigen sucht, um wie viel naturgemässer die von Franklin aufgestellte Theorie eines einzigen elektrischen Fluidums sei. Sätze wie folgende: „Im luftleeren Raume ist gar keine elektrische Ladung möglich" .... „Die Luft ist das natürliche Vehikel, wodurch uns die Elektricität erkennbar wird" .... „Die Wirkung der Elektricität durch Spitzen ist keine andere als die galvanische" .... „Die Spitzen-Elektricität bewirkt im Allgemeinen in den Theilen des Körpers, welche sie afficirt, dieselben Aenderungen wie eine sehr hohe Temparatur" u. dgl. m. Sätze wie diese, zur damaligen Zeit ausgesprochen, mögen zeigen, in welchem Geiste Prechtl seinen Gegenstand auffasste.

Im 7. Bande (1808) von Gehlen's Journal finden wir eine umfangreiche Abhandlung: „Beiträge zur elektrischen Meteorologie", in welcher Prechtl Volta's Theorie des Hagels zu widerlegen und ihre schwachen Seiten aufzudecken sucht. Letzteres ist ihm jedenfalls in sehr scharfsinniger Weise gelungen. Die Worte, mit welchen Prechtl diese Abhandlung einleitet, sind für seine Gesinnung zu bezeichnend, als dass sie hier unerwähnt bleiben dürften. Er sagt: „Je berühmter der Mann ist, unter dessen Firma sich eine Meinung im wissenschaftlichen Publicum introducirt, desto strenger ist die Pflicht Aller, denen der wahre Fortschritt der Wissenschaften am Herzen liegt, diese Meinung mit der grössten Sorgfalt zu untersuchen, und nie zuzugeben, dass durch eine übelverstandene Dankbarkeit gegen erworbene Verdienste irgend ein Irrthum, sei er auch in das glänzendste Gewand gehüllt, in den heiligen Tempel der Wissenschaft schleiche."

Im folgenden Jahre 1809 erschien eine Fortsetzung dieser Abhandlung (Band 8), in welcher Prechtl seine eigenen Ansichten über die elektrischen Meteore entwickelte. Er behandelt die Quellen der Luftelektricitäten und giebt eine Theorie der Gewitter, als deren speciellen Fall er den Hagel darstellt.

Er verspricht am Ende seiner Abhandlung die Fortsetzung derselben mit folgenden Worten: „In der Fortsetzung dieser Ab-

handlung werde ich diese Theorie in ihren einzelnen Theilen und in ihren Modificationen weiter auseinander setzen; ich werde sie durch Rechnung und Erfahrungen zu jener Evidenz bringen, die dem gründlichen Naturforscher genügt. Ich werde zeigen, wie vollständig sie alle Erscheinungen und ihre Begleitungen erklärt, die bei diesen Vorgängen in der Natur stattfinden, die des Hagels mit eingeschlossen; wie hell sie uns bis in die letzten Gründe dieser verwickelten Erscheinungen sehen lässt und wie sie dieselben mit allen übrigen in der Natur in feste Verbindung bringt."

Leider ist dieses Versprechen nicht in Erfüllung gegangen, wahrscheinlich weil Prechtl zu dieser Zeit in's praktische Leben trat und neue Ideen seinen Geist erfüllten, die Wissenschaft auch schon so rasch fortschritt, dass er nicht mehr Musse fand, ihr in allen Zweigen zu folgen. Bei grösserer Anregung von Aussen, als zu jener Zeit möglich war, wäre diese Frucht seines Geistes vielleicht nicht untergegangen. Dies ist um so mehr zu bedauern, als wir auch jetzt noch keine erschöpfende Theorie des Hagels besitzen.

Im Jahre 1813 sah sich Prechtl, vorzugsweise zum Gebrauche bei seinen Vorlesungen, veranlasst, ein „Compendium der Chemie in ihrer technischen Beziehung" zu verfassen. Dieses Buch, welches mit grosser Einfachheit und Klarheit das Wichtigste des zu jener Zeit Bekannten aus der Chemie enthielt, wurde im In- und Auslande so beifällig aufgenommen, dass es schon nach 3 Jahren vergriffen war. Im Jahre 1817 erschien die 2. Auflage der „Grundlehren der Chemie in technischer Beziehung", welche bereits von einem höheren Standpunkte aus, die damals mehr entwickelte Wissenschaft behandelte. In der ersten Auflage folgte Prechtl noch ganz den Ideen Berthollet's, während er in der zweiten sich bereits genöthigt sah, die Lehre von den Aequivalenten im Sinne Richter's aufzunehmen; freilich stellte er dieselbe nicht an die Spitze, sondern schaltete sie bei den Salzen ein. Die Art, wie Prechtl diese Lehre schon zu jener Zeit behandelte, ist meisterhaft zu nennen, und es wäre zu wünschen, dass sich manche viel spätere Schriftsteller hierin Prechtl zum Muster genommen hätten. Erhebliche, den Fortschritt der Wissenschaft störende Missverständnisse wären unterblieben, wenn man immer so streng wie schon damals Prechtl das Thatsächliche von dem Hypothetischen getrennt hätte. Er spricht nur von Aequivalenten und bezieht diese auf das des Wasserstoffes, welches er $=1$ setzt, wohl wissend, dass man nicht genauer rechnet, wenn man diese und alle folgenden Aequivalente mit 12.5 oder irgend einer anderen Zahl multiplicirt. Es bedurfte eines langen Umweges, bis man

wieder einzusehen anfing, dass die, von nicht Wenigen für die Wahrheit selbst gehaltene Atomentheorie, nur eine noch ziemlich mangelhafte Hypothese sei, und bis man endlich zur ursprünglichen Einfachheit zurückkehrte, wie dies jetzt geschieht, wenn es gleich nicht an Bemühungen fehlt, die neue Verwirrung in die Wissenschaft zu bringen drohen.

Es ist eigenthümlich, dass Prechtl keine eigenen Forschungen auf dem chemischen Gebiete hinterliess, obwohl er dieses Fach lehrte und eine so gründliche Kenntniss desselben in allen Richtungen besass, während er sich doch in der Physik als origineller Forscher bethätigte. Der Grund hievon mag wohl darin zu suchen sein, dass zu jener Zeit die eigentlich experimentirende Richtung in der Chemie in Deutschland noch so wenig entwickelt war und Prechtl in den früheren Jahren wenig Gelegenheit hatte, seine Thätigkeit nach dieser Seite hin zu wenden.

Ein halbes Jahr, nachdem Prechtl die 2. Auflage seiner Chemie herausgegeben hatte, erschien seine „Anleitung für zweckmässige Einrichtung der Apparate für die Beleuchtung mit Steinkohlengas" (Wien, bei C. Gerold 1817). Prechtl hatte zuerst in Oestreich den Muth, in Verbindung mit Arzberger, dem damaligen sehr ausgezeichneten Professor der Mechanik am Institute, einen Versuch, die Beleuchtung mit Steinkohlengas in grösserem Maassstabe auszuführen und zwar am Institute selbst.

Der Versuch gelang man kann sagen für die gegebenen Verhältnisse vollständig und es wurden so viele Anfragen an Prechtl in dieser Angelegenheit gerichtet, dass er sich zur Herausgabe der obigen Schrift, der ersten selbständigen in Deutschland, über diesen wichtigen Industriezweig entschloss. Dieselbe enthielt manche damals neue Erfahrungen und nützliche Winke.

Von dieser Zeit an wendete Prechtl seine litterarische Thätigkeit vorzüglich den von ihm in's Leben gerufenen vortrefflichen Jahrbüchern zu, die er durch seine eigenen Arbeiten zu heben und zu beleben suchte. Diese Jahrbücher bilden eine ununterbrochene Reihe von 20 Bänden vom Jahre 1819 bis 1839. Schon im Jahre 1824 erschien eine 2. Auflage des 1. Bandes. Sie sind ein sprechender Beweis, wie richtig Prechtl seine Aufgabe als Director eines Institutes auffasste, das nach dem Willen seines erhabenen Gründers, eine der Universität, sowohl in ihren äusseren Verhältnissen, als in ihrer Tendenz gleichgestellte Lehranstalt für die einer technischen Anwendung fähigen Naturwissenschaften sein — und wohl auch bleiben sollte. Selbst ein leuchtendes Beispiel rastloser

Thätigkeit und origineller Auffassung der Wissenschaft, riss er die älteren und jüngeren Glieder des Institutes mit sich fort, regte überall zum Selbstforschen an, und stand rathend und anregend jedem zur Seite — ein Vorbild für alle. Es entwickelte sich daher auch am Institute ein Geist echter Naturforschung, wie er noch zu keiner Zeit vorher an irgend einem Punkte der Monarchie hervorgetreten war.

Prechtl hat in diesen Jahrbüchern nicht weniger als 33 grössere und kleinere Abhandlungen niedergelegt. Mehrere haben den Zweck, wichtige Entdeckungen aus dem Gebiete der Mechanik, Chemie, Physik, besonders wenn sie einen Einfluss auf's praktische Leben zu üben bestimmt waren, fasslich darzustellen und im Vaterlande bekannt zu machen, andere waren kritischer Natur und sollten vor angepriesenen Erfindungen warnen, wenn die Theorie von vorne herein ihre Unausführbarkeit nahzuweisen erlaubte. Aber auch an Originalarbeiten liess es Prechtl nicht fehlen, von denen hier nur einige besonders erwähnt sein mögen. Im 4. Bande (1823) findet sich die Beschreibung und gründliche Berechnung eines neuen Baroskopes zum Höhenmessen, das wohl hauptsächlich der unvollkommenen Ausführung wegen, in der es in's Publikum kam, weniger Aufmerksamkeit erregte als es verdiente. Prechtl fühlte selbst die Schwierigkeiten, welche dieses Instrument bei der Verfertigung darbot, und als ein Beweis für die Ausdauer, mit der er eine einmal gefasste Idee verfolgte, mag dienen, dass er später im 20. Bande der Jahrbücher eine Vereinfachung dieses Instrumentes angab, wodurch es jedenfalls viel brauchbarer wurde, und in dieser veränderten Gestalt allen zu demselben Zweck später angegebenen Instrumenten dieser Art vorzuziehen sein dürfte.

Eine andere im 14. Bande d. Jahrb. enthaltene Arbeit, die ebenfalls der Wiederaufnahme werth wäre, sind die Versuche, welche Prechtl „über die Beziehung der Adhärenz der Metalle zu ihrer elektrischen Differenz" anstellte. Es ist zu bedauern, dass Prechtl diesen Gegenstand nicht selbst weiter verfolgt hat, da ihm auch die äusseren Mittel hierzu in der von ihm gegründeten vortrefflichen Werkstätte des Institutes (noch gegenwärtig unter der umsichtigen Leitung des rühmlichst bekannten Werkmeisters Herrn Christoph Starke) reichlicher zu Gebote stand, als irgend Jemandem.

Die vielen, mit mancherlei persönlichen Unannehmlichkeiten verbundenen ämtlichen Geschäfte liessen Prechtl dennoch Zeit, sich nebst der Herausgabe der Jahrbücher auch noch an anderen literarischen Arbeiten zu betheiligen. Die grosse Vervollkomm-

nung der optischen Instrumente, namentlich der Fernröhre, welche insbesondere durch das Genie Fraunhofer's in dem ersten Viertel unseres Jahrhunderts erreicht ward, so wie die Feststellung ihrer Theorie durch Herschel, Young, Littrow u. A. lenkten die Aufmerksamkeit Prechtl's auf diesen so anziehenden Theil der Physik. Ausser verschiedenen Aufsätzen über einzelne Theile der Optik veröffentlichte er im Jahre 1828 seine „praktische Dioptrik" (Wien, bei Heubner, 1828), durch welche er den Künstlern und Liebhabern, die sich mit der Verfertigung astronomischer Fernröhre befassen, einen Leitfaden in die Hand geben wollte, der sie in den Stand setzen sollte „diese optischen Instrumente mit jenem Grade der Vollendung herzustellen, die sie nach dem heutigen Zustande der Wissenschaft und Kunst erreichen können." Diesen Zweck hatte Prechtl auch erreicht, denn es fehlte gerade damals an einem ähnlichen Werke. Dieses Buch fand daher schnell eine grosse Verbreitung und hat gewiss zu dem Aufschwunge beigetragen, den die praktische Optik in Wien nahm, und zur Erlangung des hohen Ranges, den sie noch gegenwärtig behauptet. Dasselbe darf jedoch nicht für eine blosse Zusammenstellung des Bekannten gehalten werden; Prechtl hat vielmehr in diesem Werke über mehrere Punkte ganz neue Aufschlüsse gegeben, so dass es als ein Quellenwerk erscheint und als solches auch häufig benützt wird. Als Beweis hiefür kann unter andern dienen, dass Prechtl darin zuerst durch genaue Messungen der Fraunhofer'schen Linsen bei Fernröhren zeigte, dass dieser grosse Optiker die Herschel'schen Formeln der Berechnung der Krümmungshalbmesser seiner Gläser zu Grunde legte, was eine für die Praxis wichtige Thatsache ist.

Wie umfassend und tief eingehend sich Prechtl mit der successiven Entwickelung der Naturwissenschaften, namentlich in industrieller Beziehung beschäftigte, geht unter andern auch daraus hervor, dass er sich nicht begnügte alles zu sammeln, was die reiche Literatur Frankreichs, Englands, Deutschlands, Italiens und der vereinigten Staaten von Nordamerika ihm darbot; sein Blick wandte sich auch dem so viele Geheimnisse bergenden Asien zu, und da war es das älteste Culturvolk der Welt, die, wie er oft sagte, so sehr verkannten und mit Unrecht oft so missachteten Chinesen, die besonders seine Aufmerksamkeit auf sich zogen. Um mit eigenen Augen zu sehen, und sich ein selbständiges Urtheil zu bilden, scheute er die Mühe nicht, sich mit der chinesischen Sprache und Literatur vertraut zu machen. Er betrieb dieses Studium seit dem Jahre 1830 mit Eifer, und die reiche Sammlung chinesischer Werke, so wie die von seiner Hand geschriebenen

zahlreichen Notaten, welche er hinterliess, zeigen deutlich, wie tief und mit welcher Vorliebe er auf diesen Gegenstand einging. Er verfolgte dabei den Zweck (worüber er sich oft gegen den Verfasser dieser Skizze aussprach), die Geschichte der Erfindungen in China zu bearbeiten und es ist sehr zu beklagen, dass er diesen Plan nicht durchführen konnte. Ein wichtiger Beitrag für die so merkwürdigen und noch so wenig gekannten Gesetze, nach welchen sich die Culturverhältnisse des Menschengeschlechtes gestalten, unterbleibt dadurch vielleicht für noch lange Zeit, denn wann wird sich wieder die Kenntniss einer noch so selten betriebenen Sprache mit gründlicher naturwissenschaftlicher Bildung bei einem Manne in einem solchen Grade zusammenfinden, wie dies bei Prechtl der Fall war und wie es auch, selbst nur zur annähernden Lösung einer solchen Aufgabe nothwendig ist. Als schöner Beweis für seine Bescheidenheit kann angeführt werden, dass manche, selbst mit Prechtl befreundete Männer, von diesen seinen aussergewöhnlichen Studien keine Ahnung hatten. Mit dem halben Wissen Prechtl's in diesem Fache hätte mancher sich zum Sprachforscher gestempelt. Prechtl schwieg davon, da er noch kein ihm hinreichend wichtig erscheinendes Resultat aufzuweisen hatte.

Im Jahre 1829 fasste Prechtl, angeregt durch Freih. v. Cotta und getrieben von dem patriotischen Streben, die vaterländische Industrie nach Kräften zu fördern, den Entschluss, „eine technologische Encyklopädie zum Gebrauche für Cameralisten, Oekonomen, Künstler, Fabrikanten und Gewerbstreibende jeder Art" herauszugeben.

In der That erschien der erste Band dieses schätzbaren, ja in seiner Art einzig dastehenden Werkes schon im Jahre 1830 (Stuttgart, im Verlage der J. G. Cotta'schen Buchhandlung; Wien, bei C. Gerold, in dessen Buchdruckerei der Druck besorgt wurde). Prechtl war ein zu gründlicher Kenner aller technischen Zweige der Naturwissenschaften, als dass er sich hätte die Schwierigkeiten eines solchen Unternehmens verhehlen können, dennoch aber unterschätzte er dieselben; für das erstere spricht der Umstand, dass er sich gleich anfangs die beiden ausgezeichneten Technologen Altmütter und Karmarsch als ständige Mitarbeiter beigesellte, für das letztere, dass er den Umfang des Werkes auf 10 bis 12 Bände festsetzte, während bereits 19 erschienen sind. Wer konnte auch im Jahre 1830 die so überaus raschen Fortschritte der Naturwissenschaften ermessen. Die Zeit umfassender Encyklopädien für ganze Gruppen von Wissenschaften ist vorüber, man kann nur mehr Wörterbücher für einzelne Fächer schreiben und

selbst diese bieten, wie alle neueren Unternehmungen dieser Art zeigen, grosse Schwierigkeiten dar. Wie Prechtl allem, was er angriff, eine neue Seite abzugewinnen wusste, so auch hier. Seine Encyklopädie unterscheidet sich nämlich von allen früheren Werken dieser Art dadurch, dass sie nicht nach Schlagwörtern, sondern nach Sachen alphabetisch geordnet ist, was viele Wiederholungen vermied und eine grosse Vereinfachung erlaubte. Die Haupttendenz des Werkes ist zwar, wie das Leben Prechtl's selbst, eine praktische, aber mit streng wissenschaftlicher Begründung. Dass übrigens Prechtl diesem Werke nicht bloss seinen Namen lieh, sondern selbst daran auf's Thätigste mitarbeitete, sieht man aus der grossen Anzahl der Artikel, die von ihm verfasst sind, und deren Anzahl in den vorliegenden 19 Bänden nicht weniger als 90 beträgt. Darunter sind mehrere von bedeutendem Umfange, wie über „Gasbeleuchtung" (Bd. 6, 1835) 7 Bogen stark, „Heizung" (Bd. 7, 1836) 6 Bogen, „Leder" (Bd. 9, 1838) fasst 7 Bogen, „Münzkunst" (Bd. 10, 1840) 3 Bogen u. s. f.

In der That nahmen auch diese Arbeiten alle freie Zeit Prechtl's in Anspruch, welche ihm die mit der Ausdehnung des Instituts rasch wachsenden Geschäfte übrig liessen. Er befasste sich daher seit dem Jahre 1830 nicht mehr mit eigenen Forschungen und die nach dieser Periode erschienenen Jahrbücher enthalten keine Mittheilungen dieser Art von ihm, mit Ausnahme des oben erwähnten kurzen Aufsatzes im letzten Bande derselben. Nur mit den speciellen Arbeiten zur Vollendung seines Werkes über den Flug der Vögel beschäftigte er sich noch bis zum Jahre 1840.

Die Gewissenhaftigkeit, mit der Prechtl die hinsichtlich der Encyklopädie übernommenen Verpflichtungen zu erfüllen suchte, so wie sein vorgerücktes Alter sind der Grund, dass die Akademie sich keiner grösseren Mittheilung von ihm zu erfreuen hatte. Die Jahre der Kraft und der literarischen Wirksamkeit Prechtl's waren vorüber als unsere Akademie in's Leben trat, er gehörte derselben mehr als Ehrenmitglied, denn als wirkliches an. Seine früheren Originalarbeiten wären Zierden der Schriften jeder Akademie gewesen.

Prechtl's Gesundheit war schon im Jahre 1847 angegriffen, er verliess von dieser Zeit an den Winter hindurch seine Wohnung nur selten und fühlte bald nicht mehr die Kraft in sich, seinem schwierigen Amte in der Weise vorzustehen, wie er es dem Staate und sich selbst schuldig zu sein glaubte. Er suchte daher im Jahre 1849 um seine Pensionirung an, die ihm mit Erlass vom 11. Juli 1849 gewährt wurde.

Se. k. k. Apost. Majestät geruhten Prechtl bei dieser Gelegenheit in gerechter Anerkennung seiner Verdienste um „Staat und Wissenschaft" das Ritterkreuz des österr. kais. Leopoldordens zu verleihen, worauf dessen Erhebung in den österr. Ritterstand, den Statuten dieses hohen Ordens gemäss, erfolgte. Die Stadt Wien hatte ihm in Anbetracht seiner mannigfachen mit Erfolg gekrönten Bemühungen um das Gemeindewesen im Jahre 1847 das Ehrenbürgerrecht ertheilt. Der Akademie gehörte er seit ihrer Gründung als wirkliches Mitglied an [1]).

Die letzten fünf Jahre seines thätigen Lebens verlebte Prechtl ruhig und heiter im Kreise seiner Familie [2]), immer noch geistig beschäftigt, bis ihn der Tod am 24. October 1854 ereilte. Es war ihm noch vergönnt, die technische Encyklopädie wenigstens im Manuscripte zu vollenden, der 20. Band derselben, zugleich der letzte, befindet sich unter der Presse und wird nächstens erscheinen.

Wirft man nun den Blick zurück auf das Leben und Wirken Prechtl's, so kann man nicht umhin, zuzugestehen, dass er ein Charakter von seltener Consequenz und Reinheit war; die Ansichten, welche er als junger Mann von 26 Jahren in seiner ersten literarischen Arbeit, der oben erwähnten Schrift über die Fehler der Erziehung, mit Freimüthigkeit und Wärme aussprach, sehen wir ihn 50 Jahre später noch vertheidigen und befolgen, wie denn überhaupt in diesem Buche die ganze Richtung seines späteren Lebens gewissermassen vorhergezeichnet ist. Sein Geist war vorzugsweise ein ordnender, berichtigender, nach Gründlichkeit strebender, eine ruhige, natürliche Entwickelung in jeder Richtung forderender; hieraus erklären sich manche Eigenthümlichkeiten, vielleicht auch manche Irrthümer seines Lebens.

Bei einem Manne, dessen Wirksamkeit nicht die eines Gelehrten allein war, bei dem vielmehr der Gelehrte sehr oft dem Beamten weichen musste, ist der Einfluss der Gestaltung seiner Zeit, der persönlichen Eigenschaften der Männer, mit denen er in Wechselwirkung stand, auf seine geistige Richtung und Entwickelung weit grösser, als bei jenen Glücklichen, denen es vergönnt ist, sich dem Forschungstriebe ihres Geistes ungestört und unbeirrt hinzugeben. Prechtl hat einen nicht unbedeutenden Theil seiner staunenswerthen Arbeitskraft zur Ueberwindung von Widerständen verbraucht, dennoch wurde er mit Gerstner der Begründer der jetzigen technischen Bildungsanstalten in Oesterreich. Die Verhältnisse und Umstände, unter welchen dies geschah, näher zu beleuchten, wird die Aufgabe desjenigen sein, der

die Culturgeschichte unseres Vaterlandes in einer späteren Periode zu schildern unternimmt.

---

1) Das vollständige Verzeichniss der Titel und anderweitigen Auszeichnungen Prechtl's lautet wie folgt: Prechtl, Johann Joseph Ritter von, Ritter des kaiserl. österr. Leopoldordens, k. k. Regierungsrath, emeritirter Director des k. k. polytechnischen Institutes; Ehrenmitglied des Industrie- und Gewerbevereines in Inner-Oesterreich, der k. k. Gesellschaft der Aerzte zu Wien, der Akademie des Ackerbaues und der Künste zu Verona, des Vereines zur Beförderung des Gewerbsfleisses in Preussen, der ökonomischen Gesellschaft im Königreiche Sachsen, der märkisch-ökonomischen Gesellschaft zu Potsdam, der allgemeinen schweizerischen Gesellschaft für die Naturwissenschaften, des Apotheker-Vereines im Grossherzogthum Baden, der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur, der Gesellschaft zur Vervollkommnung der Künste und Gewerbe zu Würzburg, des kön. polytechnischen Vereines in Baiern, des grossherzoglich-hessischen Gewerbsvereines zu Darmstadt, des Gewerbsvereines für das Königreich Hannover, des Gewerbsvereines in Lahr, des Apotheker-Vereines im nördlichen Deutschland; Mitglied der k. k. Landwirthschafts-Gesellschaften zu Wien, Gratz, Laibach und Brünn, der Gesellschaften für Naturwissenschaften und Heilkunde zu Heidelberg und zu Dresden, der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg, des landwirthschaftlichen Vereines im Grossherzogthum Baden, des Vereines zur Ermunterung des Gewerbsgeistes in Böhmen; correspondirendes Mitglied der k. k. Institute der Wissenschaften und Künste zu Mailand und Venedig, der kön. baierischen Akademie der Wissenschaften, des National-Institutes zur Beförderung der Wissenschaften zu Washington, der Gesellschaft zur Beförderung der nützlichen Künste und ihrer Hilfswissenschaften zu Frankfurt a. M., der polytechnischen Gesellschaft zu Paris; Ehrenbürger der k. k. Haupt- und Residenzstadt Wien.

2) Prechtl's Gattin starb schon im Jahre 1837 und er verlor durch diesen härtesten Schlag des Schicksals eine Lebensgefährtin, die eben so ausgezeichnet war durch Geist und Bildung, als durch einen edlen Charakter. Aus dieser Ehe stammten 9 Kinder, nämlich 5 Söhne und 4 Töchter. Der älteste Sohn, Rudolf, geboren 30. Jänner 1821, ist gegenwärtig im k. k. Finanzministerium als Concipist angestellt. Der zweitgeborne, Moritz, 13. September 1834 geboren, ein hoffnungsvoller Jüngling, dem Range nach der Erste in der fünften Classe der k. k. Ingenieur-Akademie, wurde dem Vater in einem Alter von 17 Jahren am 14. Juni 1841 durch ein Scharlachfieber entrissen. Die älteste Tochter, Maria, ist gegenwärtig an den Professor der Naturgeschichte Dr. Franz Lanza am k. k. Gymnasium zu Spalato verehelicht. Die zweite Tochter, Caroline, geboren 26. März 1816, starb am 9. Mai 1854 als Wittwe des k. k. Herrn Oberfinanzrathes Dr. Ludwig August Krause. Die

drittgeborne, Auguste, ist seit 1840 Gattin des Professors am k. k. polytechnischen Institute und Präses der Direction der k. k. priv. Kaiser-Ferdinands-Nordbahn, Herrn Joseph Stummer. Die vierte Tochter, Emilie, geboren 9. November 1818, das treue Abbild ihrer Mutter, ausgestattet mit einem seltenen Talente für Malerei, starb im 22. Jahre ihres Alters am 20. Sept. 1848. Drei Knaben sind in der Kindheit verstorben.

(Das vollständige, neun Seiten füllende Verzeichniss der sämmtlichen Schriften Prechtl's muss man in der sehr verdienstlichen Schrift des Herrn Professor Schrötter selbst nachsehen. G.)

---

# XXVI.

## Zur Capitalien- und Rentenversicherung.

Von

Herrn *Franz Unferdinger*,

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

---

Der Berechner einer Sammlung von Prämientarifen, für die verschiedenen gangbaren Versicherungsarten auf das Leben und Absterben der Menschen, bedient sich bekanntlich einer Reihe von Hilfsgrössen, die, spaltenweise auseinander abgeleitet, die Elemente bilden, aus deren Zusammensetzung schliesslich die Prämien selbst entstehen. Von der Mortalitätstafel ausgehend, rechnet er zuerst die discontirten Zahlen, die Summen der discontirten Zahlen, und wieder die Summen dieser letzten. Die einem bestimmten Versicherungsvertrage entsprechende allgemeine Formel dient dann nur als Weisung, mit dem Alter als Argument, die correspondirenden Hilfszahlen aus den Spalten zu entnehmen.

Ist $A_m$ die dem Alter $m$ entsprechende Zahl der Mortalitätstafel,

$$r = 1 + \frac{p}{100},$$

der Zinsfuss für $p$ Procente, und sind $D_m$, $E_m$, $E_m'$ die correspondirenden Hilfszahlen, so gelten die Gleichungen:

$$D_m = \frac{A_m}{r_m},\quad E_m = D_m + D_{m+1} + D_{m+2} + \ldots,\quad E_m' = E_m + E_{m+1} + E_{m+2} + \ldots = D_m + 2D_{m+1} + 3D_{m+2} + \ldots$$

In Joh. Nic. Tetens „Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften", findet man solche Hilfszahlen gerechnet p. 89 und 217 nach der Süssmilch-Baumann'schen Mortalitätstafel mit vier Procent, welche in allen folgenden numerischen Erläuterungen zur Basis genommen werden sollen. Um diese zu vereinfachen, wurde nach ihnen vorerst die Hilfstafel 1. zusammengestellt.

### Hilfstafel 1.

| $m$ | $D_m$ | $D_{m+n}$ | | $D_m - D_{m+n}$ | | $E_m - E_{m+n}$ | | $E_m - r.E_{m+1}$ | $E_{m+n} - r.E_{m+n+1}$ | | $r.E_{m+n+1}$ | | $E_m' - r.E_{m+1}'$ | $E_{m+n}' - r.E_{m+n+1}'$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | $n=5$ | $n=20$ | $n=5$ | $n=20$ | $n=5$ | $n=20$ | | $n=5$ | $n=20$ | $n=5$ | $n=20$ | | $n=5$ | $n=20$ |
| 0 | 1000.— | 475.90 | 224.09 | 524.10 | 775.91 | 3388.58 | 8444.90 | 542.74 | 133.22 | 73.59 | 8909.68 | 3912.99 | 4525.76 | 3170.53 | 1734.96 |
| 5 | 475.90 | 359.40 | 174.80 | 116.50 | 301.10 | 2124.90 | 6073.52 | 133.22 | 97.06 | 63.02 | 6820.94 | 2906.36 | 3170.53 | 2589.51 | 1388.98 |
| 10 | 359.40 | 283.74 | 135.35 | 75.66 | 224.05 | 1637.49 | 4740.94 | 97.06 | 83.87 | 53.68 | 5196.64 | 2123.38 | 2589.51 | 2132.93 | 1092.25 |
| 20 | 224.09 | 174.80 | 77.90 | 49.29 | 146.19 | 1017.20 | 2883.81 | 73.59 | 63.02 | 36.90 | 2906.36 | 1065.87 | 1734.96 | 1388.98 | 633.12 |
| 30 | 135.35 | 103.65 | 42.21 | 31.70 | 93.14 | 610.20 | 1679.11 | 53.68 | 45.12 | 23.98 | 1521.74 | 473.97 | 1092.25 | 841.64 | 324.36 |
| 40 | 77.90 | 58.04 | 19.96 | 19.86 | 57.94 | 347.69 | 916.17 | 36.91 | 30.16 | 13.40 | 724.92 | 173.20 | 633.12 | 462.63 | 136.16 |
| 50 | 42.21 | 29.49 | 7.19 | 12.72 | 35.02 | 184.17 | 447.67 | 23.98 | 18.12 | 5.47 | 295.66 | 44.81 | 324.36 | 216.64 | 40.13 |
| 60 | 19.96 | 12.66 | 1.61 | 7.30 | 18.35 | 84.66 | 178.24 | 13.40 | 9.09 | 1.34 | 92.85 | 7.02 | 136.16 | 78.05 | 7.18 |
| 70 | 7.19 | 3.64 | 0.18 | 3.55 | 7.01 | 28.21 | 49.70 | 5.47 | 2.90 | 0.16 | 19.17 | 0.42 | 40.13 | 18.29 | 0.54 |

Erlegt nun z. B. ein $m$jähriges Individuum sogleich die Summe $\alpha$ und durch $a$ Jahre zu Anfang jedes Jahres die Prämie $\beta$, um bei seinem Ableben, wenn dasselbe in den, auf die $b$ ersten Jahre folgenden $c$ Jahren erfolgt, das Capital $\gamma$ zu hinterlassen; so ist der Zusammenhang der Grössen $m$, $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ durch die Gleichung gegeben:

$$(1)\quad \alpha+\frac{\beta}{D_m}.(E_m-E_{m+a})$$
$$=\frac{\gamma}{r.D_m}.[(E_{m+b}-r.E_{m+b+1})-(E_{m+b+c}-r.E_{m+b+c+1})]\,^{*)}.$$

Für $m=30$, $a=b=10$, $c=20$ zeigen Tetens's Tafeln:

$$D_m=135.35,\ E_m=2177.06,\ E_{m+a}=1102.77=E_{m+b},$$
$$E_{m+b+1}=1024.87,\ E_{m+b+c}=186.60,\ E_{m+b+c+1}=166.54;$$

hieraus findet man nach (1) für

$$\beta=0,\ \gamma=100:\ \alpha=16.70$$

und für

$$\alpha=0,\ \gamma=100:\ \beta=2.104;$$

für diese einmalige Einlage $\alpha$ oder jene durch 10 Jahre, zu Anfang des Jahres zu entrichtende Prämie $\beta$, erhält $A_m$ nach seinem Ableben das Capital 100, wenn er die nächstfolgenden 10 Jahre überlebt und in den darauf folgenden 20 Jahren stirbt. Zahlt $A_m$ Einlage und Prämie, so ist das Capital gleich 200.

Will ein $m$jähriger, im Falle er im Laufe der nächsten $n$ Jahre stirbt, das Capital

$$\gamma,\ 2\gamma,\ 3\gamma,\ \ldots\ \text{oder}\ n\gamma$$

beziehen, jenachdem dessen Ableben im Laufe des

1. 2. 3. .... oder $n$ten

Jahres erfolgt, so kann die einmalige Einlage auf folgende Art bestimmt werden:

---

*) S. J. J. Littrow „Ueber Lebensversicherungen und andere Versorgungsanstalten", Wien, 1832. Um die Wiederholung von Entwickelungen, welche allenthalben in Werken über Lebensversicherung vorkommen, zu vermeiden und das Verständniss des Inhalts dieser Abhandlung auch denjenigen möglich zu machen, welche zwar mit der Mathematik,

Von $A_m$ Versicherten sterben im Laufe des $x$ten Jahres

$$A_{m+x-1}-A_{m+x},$$

am Ende des $x$ten Jahres hat also die Casse die Ausgabe

$$(A_{m+x-1}-A_{m+x}).x\gamma,$$

diese auf den Anfang der Versicherung discontirt und auf alle $A_m$ Mitglieder gleichförmig vertheilt, gibt:

$$\frac{1}{A_m}.(A_{m+x-1}-A_{m+x}).\frac{x\gamma}{r^x}=\gamma.\frac{r^{m-1}}{A_m}.(x.\frac{A_{m+x-1}}{r^{m+x-1}}-r.x.\frac{A_{m+x}}{r^{m+x}})$$

als Antheil des Einzelnen, am gegenwärtigen Werth, der am Ende des $x$ten Jahres zu leistenden Zahlungen. Setzt man in diesem Ausdruck der Reihe nach $x=1, 2, 3, \ldots n$ und addirt, so ist die Summe offenbar gleich dem Gesammtantheil des Einzelnen am reducirten Werth aller Zahlungen der Casse der Gesellschaft; also gleich der einmaligen Einlage:

$$\alpha=\gamma.\frac{r^{m-1}}{A_m}.[\overset{n}{\underset{1}{S}}x.\frac{A_{m+x-1}}{r^{m+x-1}}-r.\overset{n}{\underset{1}{S}}x.\frac{A_{m+x}}{r^{m+x}}].$$

Die angedeuteten Summen lassen sich leicht durch die mit $E$ und $E'$ bezeichneten Hilfsgrössen ersetzen: in der That ist

$$\overset{n}{\underset{1}{S}}x.\frac{A_{m+x-1}}{r^{m+x-1}}=E'_m-n.E_{m+n}-E'_{m+n}$$

und

$$\overset{n}{\underset{1}{S}}x.\frac{A_{m+x}}{r^{m+x}}=E'_{m+1}-n.E_{m+n+1}-E'_{m+n+1},$$

diese Werthe substituirt, $\frac{r^{m-1}}{A_m}$ durch $\frac{1}{r.D_m}$ ersetzt und die homologen Glieder zusammengefasst, gibt die Formel:

$$(2)\qquad \alpha=\frac{\gamma}{r.D_m}$$

$$\times[(E'_m-r.E'_{m+1})-(E'_{m+n}-r.E'_{m+n+1})-n.(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})].$$

Soll diese bedingte Capital-Versicherung statt mit einer einmaligen Einlage $\alpha$, mit einer, anfangs jedes Jahres zu entrichtenden Prämie $\beta$ erreicht werden, so ist bekanntlich:

---

nicht aber mit diesem so nützlichen Zweige ihrer Anwendung vertraut sind, ist es nothwendig, gleich Eingangs auf diese Schrift zu verweisen, welche alles enthält, was wir in den folgenden Rechnungen bedürfen."

$$(\Delta) \qquad \beta = \frac{\alpha . D_m}{E_m - E_{m+n}}$$

oder substituirt:

(3)

$$\beta = \frac{\gamma}{r} . \frac{(E'_m - r.E'_{m+1}) - (E'_{m+n} - r.E'_{m+n+1}) - n.(E_{m+n} - r.E_{m+n+1})}{E_m - E_{m+n}}.$$

Wenn $\gamma = 100$, $m = 30$, $n = 20$, so ist:

$$\alpha = \frac{100}{1.04.135.35} . [1092.25 - 324.36 - 20.23.98] = 204.81,$$

$$\beta = \frac{204.81 . 135.35}{1679.11} = 16.509 .$$

Die Bestandtheile der Formeln (2) und (3) werden aus der Hilfstafel I entnommen. Die folgende kleine Tafel gibt solcher Beispiele mehr.

Tafel A.

| m | n = 5 | | n = 20 | |
|---|---|---|---|---|
| | α | β | α | β |
| 0 | 66.26 | 19.55 | 126.8 | 15.02 |
| 5 | 19.34 | 4.33 | 105.3 | 8.25 |
| 10 | 9.96 | 2.19 | 113.3 | 8.59 |
| 20 | 13.25 | 2.92 | 156.1 | 12.13 |
| 30 | 17.77 | 3.94 | 204.8 | 16.51 |
| 40 | 24.30 | 5.45 | 282.6 | 24.03 |
| 50 | 39.00 | 8.94 | 398.2 | 37.55 |
| 60 | 60.98 | 14.38 | 492.2 | 55.12 |
| 70 | 98.13 | 25.02 | 486.5 | 70.40 |

Bei allen Versicherungsarten, welche von dem Ableben des Versichernden in einer bestimmten Zeitperiode abhangen, kann die Bedingung festgesetzt werden, dass, im Falle das entgegengesetzte Ereigniss statt findet, die eingezahlten Beträge wieder zurückgegeben werden und im Folgenden

soll nun, unter Anwendung der Gleichungen (1), (2) und (3) an einigen der Versicherungs-Praxis entnommenen Aufgaben, die allgemeine Methode zur Aufstellung der entsprechenden Formeln erläutert werden.

---

### Aufgabe 1.

$A_m$ macht die Einlage $\alpha$ und will dafür nach seinem Ableben, wenn dasselbe im Laufe der nächstfolgenden $n$ Jahre erfolgt, seinen Erben das Capital $\gamma$ hinterlassen. Wenn jedoch $A_m$ diese Zeit überlebt, so soll ihm die Einlage $\alpha$ einfach wieder zurückgegeben werden. Es soll die Bedingungsgleichung zwischen $m$, $\alpha$, $n$ und $\gamma$ aufgestellt werden.

### Auflösung.

Zerlegen wir diesen Vertrag in zwei Theile, so haben wir erstens die Versicherung des Capitals $\gamma$ auf Todesfall innerhalb $n$ Jahren, die entsprechende Einlage heisse $x$; zweitens die Versicherung des Capitals $\alpha$ auf Lebensfall am Ende des $n$ten Jahres, die zugehörige Einlage heisse $y$.

$x$ findet man aus der Gleichung (1) wenn $\beta=0$, $b=0$ und $c=n$ gesetzt wird:

$$(4)\quad x=\frac{\gamma}{r.D_m}.[(E_m-r.E_{m+1})-(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})]=\frac{\gamma}{r.D_m}.M,$$

der Kürze wegen.

Von $A_m$ Versicherten leben noch am Ende des $n$ten Jahres $A_{m+n}$ und diese erhalten das Capital $\alpha$, dessen heutiger Werth $\frac{\alpha}{r^n}$ ist.

$$\frac{\alpha}{r^n}.\frac{A_{m+n}}{A_m}=\alpha.\frac{D_{m+n}}{D_m}$$

bezeichnet also den gegenwärtigen Werth des Antheils eines Einzelnen an den Ausgaben der Casse für $A_{m+n}$ Ueberlebende, und ist demnach gleich der Einlage $y$:

$$(5)\qquad y=\alpha.\frac{D_{m+n}}{D_m}.$$

Nun folgt aber aus der Diction unseres Vertrages, dass das im zweiten Falle versicherte Capital $\alpha$ gleich der Gesammteinlage $x+y$ sei:

(6) $$x+y=\alpha.$$

Substituiren wir in diese Gleichung die Werthe für $x$ und $y$ aus (4) und (5), so ist

$$\alpha=\frac{\gamma}{r.D_m}.M+\alpha.\frac{D_{m+n}}{D_m},\quad \alpha.(1-\frac{D_{m+n}}{D_m})=\frac{\gamma}{r.D_m}.M,$$

$$\alpha(D_m-D_{m+n})=\frac{\gamma}{r}.M,\quad \alpha=\frac{\gamma}{r}.\frac{M}{D_m-D_{m+n}},$$

die gesuchte Bedingungsgleichung ist also:

(7) $$\alpha=\frac{\gamma}{r}.\frac{(E_m-r.E_{m+1})-(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})}{D_m-D_{m+n}};$$

Für $m=30$, $n=20$, $\gamma=100$ hat man nach Hilfstafel I:

$$\alpha=\frac{100}{1.04}.\frac{53.68-23.98}{93.14}=30.66,$$

$$x=\frac{100}{1.04.135.35}.[53{,}68-23.98]=21.10,$$

und zur Controlle

$$y=30.66.\frac{42.21}{135.35}=9.56=30.66-21.10.$$

Auf diese Art wurde die folgende kleine Tafel gerechnet.

Tafel I.

| $m$ | $n=5$ | | | | $n=20$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $y$ | $\alpha$ | $100.\frac{y}{x}$ | $x$ | $y$ | $\alpha$ | $100.\frac{y}{x}$ |
| 0 | 39.38 | 35.75 | 75.13 | 91 | 45.11 | 13.03 | 58.14 | 29 |
| 5 | 7.31 | 22.54 | 29.85 | 309 | 14.18 | 8.24 | 22.42 | 58 |
| 10 | 3.53 | 13.23 | 16.76 | 375 | 11.61 | 7.01 | 18.62 | 60 |
| 20 | 4.54 | 16.08 | 20.62 | 354 | 15.74 | 8.39 | 24.13 | 53 |
| 30 | 6.08 | 19.88 | 25.96 | 327 | 21.10 | 9.56 | 30.66 | 45 |
| 40 | 8.33 | 24.36 | 32.69 | 292 | 29.02 | 9.99 | 39.01 | 34 |
| 50 | 13.35 | 30.94 | 44.29 | 232 | 42.16 | 8.66 | 50.82 | 21 |
| 60 | 20.76 | 36.02 | 56.78 | 174 | 58.09 | 5.10 | 63.19 | 9 |
| 70 | 34.37 | 35.24 | 69.61 | 103 | 71.01 | 1.83 | 72.84 | 2,6 |

### Aufgabe 2.

$A_m$ erlegt zu Anfang eines jeden Jahres die Prämie $\beta$, um nach seinem Ableben, wenn dasselbe innerhalb der nächstfolgenden $n$ Jahre erfolgt, das Capital $\gamma$ zu hinterlassen; überlebt jedoch $A_m$ diese Zeit, so sollen ihm am Ende des $n$ten Jahres die $n$ eingezahlten Prämien wieder zurückerstattet werden. Es soll $\beta$ als Function von $m$, $n$ und $\gamma$ dargestellt werden.

### Auflösung.

Wird auch dieser Vertrag in zwei gleichzeitig bestehende Versicherungen zerlegt, so lautet die eine auf das Capital $\gamma$, zahlbar im Todesfalle innerhalb $n$ Jahren, die jährliche Prämie hierfür sei $x$; die andere lautet auf das Capital $n\beta$, zahlbar im Lebensfalle am Ende des $n$ten Jahres, die entsprechende jährliche Prämie sei $y$.

Setzt man in der Gleichung (1) $\alpha=0$, $b=0$, $c=n$, so erhält man

$$(8)\qquad x=\frac{\gamma}{r}\cdot\frac{(E_m-r.E_{m+1})-(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})}{E_m-E_{m+n}}=\frac{\gamma}{r}.N$$

zur Abkürzung.

Würde die Versicherung des Capitals $n\beta$ durch eine einmalige Einlage gemacht, so wäre diese, wie in der vorigen Aufgabe gezeigt wurde,

$$n\beta\cdot\frac{D_{m+n}}{D_m};$$

um diese in eine $n$jährige, anfangs jedes Jahres zu entrichtende Prämie $y$ zu verwandeln, muss sie durch den Ausdruck

$$(\Delta)\qquad \frac{E_m-E_{m+n}}{D_m}$$

dividirt werden; also ist

$$(9)\qquad y=n\beta.\frac{D_{m+n}}{E_m-E_{m+n}}.$$

Berücksichtiget man auch hier wieder die aus der Natur des Vertrages entspringende Gleichung:

$$(10)\qquad x+y=\beta,$$

so hat man zur Bestimmung von $\beta$ folgende Rechnung: (8) und (9) addirt gibt

$$\beta = \frac{\gamma}{r} . N + n\beta . \frac{D_{m+n}}{E_m - E_{m+n}}$$

oder

$$\beta . (E_m - E_{m+n}) = \frac{\gamma}{r} . N . (E_m - E_{m+n}) + n\beta . D_{m+n},$$

$$\beta . (E_m - E_{m+n} - n . D_{m+n}) = \frac{\gamma}{r} . N . (E_m - E_{m+n}),$$

mithin

$$\text{(11)} \qquad \beta = \frac{\gamma}{r} . \frac{(E_m - r . E_{m+1}) - (E_{m+n} - r . E_{m+n+1})}{E_m - E_{m+n} - n . D_{m+n}}.$$

Ist $m = 30$, $n = 20$, $\gamma = 100$, so wird

$$x = \frac{100}{1.04} . \frac{53.68 - 23.98}{1679.11} = 1.701,$$

$$\beta = \frac{100}{1.04} . \frac{53.68 - 23.98}{1679.11 - 20.42.21} = 3.420$$

und

$$y = 20.3.420 . \frac{42.21}{1679.11} = 1.719 = 3.420 - 1.701$$

Zur vergleichenden Uebersicht folgen in Tafel 2. solcher Beispiele mehr.

Tafel 2.

| $m$ | $n=5$ | | | | $n=20$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $y$ | $\beta$ | $100.\frac{y}{x}$ | $x$ | $y$ | $\beta$ | $100.\frac{y}{x}$ |
| 0 | 11.621 | 27.402 | 39.023 | 236 | 5.342 | 6.041 | 11.383 | 113 |
| 5 | 1.636 | 8.967 | 10.603 | 548 | 1.111 | 1.508 | 2.619 | 136 |
| 10 | 0.775 | 5.022 | 5.797 | 648 | 0.880 | 1.171 | 2.051 | 133 |
| 20 | 0.999 | 6.098 | 7.097 | 610 | 1.223 | 1.438 | 2.661 | 118 |
| 30 | 1.349 | 7.602 | 8.951 | 564 | 1.701 | 1.719 | 3.420 | 101 |
| 40 | 1.864 | 9.409 | 11.273 | 505 | 2.466 | 1.905 | 4.371 | 77 |
| 50 | 3.059 | 12.285 | 15.344 | 402 | 3.976 | 1.881 | 5.857 | 47 |
| 60 | 4.895 | 14.511 | 19.406 | 296 | 6.506 | 1.434 | 7.940 | 22 |
| 70 | 8.759 | 15.929 | 24.688 | 182 | 10.273 | 0.803 | 11.076 | 7.8 |

### Aufgabe 3.

$A_m$ zahlt ein für alle Mal die Summe $\alpha$ und will bei seinem Ableben das Capital $\gamma$ hinterlassen, wenn er die nächstfolgenden $n$ Jahre überlebt. Stirbt $A_m$ innerhalb dieser Zeit, so soll die Einlage $\alpha$ wieder zurückgegeben werden. Welcher Zusammenhang besteht zwischen $m$, $\alpha$, $\gamma$ und $n$?

### Auflösung.

Der erste Theil der Versicherung lautet auf die Summe $\gamma$, zahlbar nach Ableben des $A_m$, wenn dasselbe nach dem Ende des $n$ten Jahres erfolgt, und die entsprechende Einlage $x$ ergibt sich aus der Gleichung (1), wenn $\beta=0$, $b=n$ und $c=$ der Zeit des Ausgestorbenseins gesetzt wird, so dass $A_{m+c}=0$, also auch $D_{m+c}=0$, $E_{m+c}=0$, $E_{m+c+1}=0$, also Alle, welche die $n$ ersten Jahre überleben, das Capital $\gamma$ erhalten:

$$(12) \qquad x=\frac{\gamma}{r.D_m}.[E_{m+n}-r.E_{m+n+1}]=\frac{\gamma}{r.D_m}.P.$$

Der zweite Theil entspricht einer Capital-Versicherung $\alpha$, zahlbar nach Ableben, wenn dasselbe innerhalb der nächsten $n$ Jahre erfolgt und die Einlage $y$ gibt die Formel (4), wenn $\alpha$ an die Stelle von $\gamma$ gesetzt wird:

$$(13) \qquad y=\frac{\alpha}{r.D_m}.[(E_m-r.E_{m+1})-(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})]$$

$$=\frac{\alpha}{r.D_m}.M;$$

da auch die Gleichung gilt:

$$(6) \qquad x+y=\alpha,$$

so erhält man nach Addition von (12) und (13):

$$\alpha=\frac{\alpha}{r.D_m}.M+\frac{\gamma}{r.D_m}.P, \quad \alpha.r.D_m=\alpha M+\gamma P,$$

also

$$\alpha(r.D_m-M)=\gamma.P$$

und

$$\alpha=\gamma.\frac{E_{m+n}-r.E_{m+n+1}}{r.D_m-[(E_m-r.E_{m+1})-(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})]}.$$

In dieser Gestalt ist die Formel zur numerischen Berechnung von $\alpha$ am zweckmässigsten, da ihre Bestandtheile in den vorhergehenden Formeln bereits vorkommen. Sonst liesse sich der Nenner auf $(r-1)E_m + (E_{m+n} - r.E_{m+n+1})$ zusammenziehen, wo aber immer $(r-1)E_m$ neu gerechnet werden müsste, ohne dieser Grösse später weiter zu bedürfen.

$\gamma = 100$, $m = 30$, $n = 20$ gesetzt gibt:

$$x = \frac{100}{1.04 \,.\, 135.35} \,.\, 23.98 = 17.036,$$

$$\alpha = 100 \,.\, \frac{23.98}{1.04 \,.\, 135.35 - [53.68 - 23.98]} = 21.592,$$

und zur Controlle:

$$y = 21.592 \,.\, \frac{21.10}{100} = 4.556 = 21.592 - 17.036;$$

die Zahl 21.10 in $y$ ist aus der Tafel 1. genommen.

Tafel 3.

| $m$ | $n=5$ | | | | $n=20$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $y$ | $\alpha$ | $100.\frac{y}{x}$ | $x$ | $y$ | $\alpha$ | $100.\frac{y}{x}$ |
| 0 | 12.81 | 8.32 | 21.13 | 65.— | 7.08 | 5.81 | 12.89 | 82 |
| 5 | 19.61 | 1.55 | 21.16 | 7.9 | 12.73 | 2.11 | 14.84 | 17 |
| 10 | 22.44 | 0.82 | 23.26 | 3.7 | 14.36 | 1.89 | 16.25 | 13 |
| 20 | 27.04 | 1.29 | 28.33 | 4.8 | 15.83 | 2.96 | 18.79 | 19 |
| 30 | 32.05 | 2.08 | 34.13 | 6.5 | 17.04 | 4.55 | 21.59 | 27 |
| 40 | 37.23 | 3.38 | 40.61 | 9.1 | 16.54 | 6.[illegible]6 | 23.30 | 41 |
| 50 | 41.28 | 6.35 | 47.63 | 15.— | 12.46 | 9.08 | 21.54 | 73 |
| 60 | 43.79 | 11.47 | 55.26 | 26.— | 6.45 | 8.95 | 15.40 | 139 |
| 70 | 38.77 | 20.29 | 59.06 | 52.— | 2.14 | 5.22 | 7.36 | 244 |

Aufgabe 4.

$A_m$ erlegt durch $n$ Jahre, im Falle des Lebens, am Anfange eines jeden Jahres die Prämie $\beta$. Erfolgt das Ableben des $A_m$ nach Ablauf des $n$ten Jahres, so zahlt die Anstalt am Ende des

Todesjahres die Summe $\gamma$. Stirbt $A_m$ innerhalb der $n$ Jahre, so sollen die bereits eingezahlten Prämien wieder zurückerstattet werden. Es soll $\beta$ bestimmt werden, wenn $m$, $n$ und $\gamma$ gegeben ist.

Auflösung.

Der erste Theil der Versicherung ist eine bedingte Anwartschaft mit $n$jähriger Prämie $x$, welche letztere aus der Gleichung (2) hervorgeht, wenn $a=0$, $b=n$ und $c=$ der Zeit des Ausgestorbenseins gesetzt wird, so dass $A_{m+c}=0$, mithin auch $D_{m+c}=0$, $E_{m+c}=0$, $E_{m+c+1}=0$.

$$(15)\qquad x=\frac{\gamma}{r}\cdot\frac{E_{m+n}-r.E_{m+n+1}}{E_m-E_{m+n}}=\frac{\gamma}{r}.Q.$$

Die Prämie $y$, welche dem zweiten Theile des Vertrages entspricht, wird durch die Formel (3) gegeben, wenn $\beta$ an die Stelle von $\gamma$ gesetzt wird, d. h. es ist

$$(16)\qquad y=\frac{\beta}{r}\cdot\frac{(E'_m-r.E'_{m+1})-(E'_{m+n}-r.E'_{m+n+1})-n.(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})}{E_m-E_{m+n}}$$

$$=\frac{\beta}{r}.R;$$

dem Inhalte unserer Aufgabe nach muss

$$(10)\qquad x+y=\beta$$

werden, also die Gleichungen (15) und (16) addirt, so ist

$$\beta=\frac{\gamma}{r}.Q+\frac{\beta}{r}.R,\quad \beta=\gamma.\frac{Q}{r-R}=\gamma.\frac{Q.(E_m-E_{m+n})}{r(E_m-E_{m+n})-R(E_m-E_{m+n})},$$

mithin

$$(17)\qquad \beta=\gamma.\frac{E_{m+n}-r.E_{m+n+1}}{\left\{\begin{array}{c}r.(E_m-E_{m+n})-[(E'_m-r.E'_{m+1})-(E'_{m+n}-r.E'_{m+n+1})\\ -n.(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})]\end{array}\right\}}.$$

Für das gewählte Zahlenbeispiel $\gamma=100$, $m=30$, $n=20$ ist

$$x=\frac{100}{1.04}\cdot\frac{23.98}{1679.11}=1.373,$$

$$\beta=100.\frac{23.98}{1.04.1679.11-[1092.25-324.36-20.23.98]}=1.645,$$

und zur Sicherstellung der Rechnung:

$$y = \frac{16.51}{100} . 1.645 = 0.272 = 1.645 - 1.373;$$

der Zahlwerth 16.51 in $y$ wurde mit den Argumenten $m = 30$ und $n = 20$ der Tafel A. entnommen.

Auf dieselbe Art wurden die Prämien der folgenden kleinen Tafel gerechnet.

Tafel 4.

| $m$ | $n=5$ | | | | $n=20$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $y$ | $\beta$ | $100.\frac{y}{x}$ | $x$ | $y$ | $\beta$ | $100.\frac{y}{x}$ |
| 0 | 3.780 | 0.919 | 4.699 | 24.— | 0.838 | 0.148 | 0.986 | 18.— |
| 5 | 4.392 | 0.199 | 4.591 | 4.5 | 0.998 | 0.089 | 1.087 | 9.0 |
| 10 | 4.925 | 0.110 | 5.035 | 2.2 | 1.089 | 0.102 | 1.191 | 9.4 |
| 20 | 5.957 | 0.179 | 6.136 | 3.0 | 1.230 | 0.170 | 1.400 | 14.— |
| 30 | 7.110 | 0.292 | 7.402 | 4.1 | 1.373 | 0.272 | 1.645 | 20.— |
| 40 | 8.341 | 0.480 | 8.821 | 5.8 | 1.406 | 0.445 | 1.851 | 32.— |
| 50 | 9.460 | 0.929 | 10.389 | 9.8 | 1.175 | 0.706 | 1.881 | 60.— |
| 60 | 10.324 | 1.733 | 12.057 | 17.— | 0.723 | 0.888 | 1.611 | 123.— |
| 70 | 9.884 | 3.298 | 13.182 | 33.— | 0.310 | 0.736 | 1.046 | 238.— |

Aufgabe 5.

$A_m$ zahlt durch $n$ Jahre die Prämie $\beta$, um nach Abfluss dieser Zeit die jährliche, zu Ende jeden Jahres fällige Lebensrente $\gamma$ zu geniessen. Stirbt jedoch $A_m$ innerhalb der $n$ Jahre, so sollen die bereits gezahlten Prämien wieder zurückerstattet werden. Es soll die Prämie $\beta$ bestimmt werden, wenn $m$, $n$ und $\gamma$ gegeben ist.

Auflösung.

Für eine um $n$ Jahre aufgeschobene Leibrente $\gamma$ ist die jährliche Prämie für diesen Zeitraum

$$(18) \qquad x = \gamma \cdot \frac{E_{m+n+1}}{E_m - E_{m+n}} = \gamma . S$$

zur Abkürzung.

Was den Theil $y$ wegen Rückzahlung der Prämien betrifft, so wird auch dieser durch Formel (3) bestimmt, da er der Versicherung eines mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3 .... $n$ steigenden Capitals $\beta$ entspricht:

(16)

$$y=\frac{\beta}{r}\cdot\frac{(E'_m-r.E'_{m+1})-(E'_{m+n}-r.E'_{m+n+1})-n.(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})}{E_m-E_{m+n}}$$

$$=\frac{\beta}{r}.R.$$

Werden die Gleichungen (18) und (16) addirt, so ist laut des Vertrages

(10) $$x+y=\beta,$$

also

$$\beta=\frac{\beta}{r}.R+\gamma.S,$$

mithin

$$\beta=\gamma.\frac{r.S}{r-R}=\gamma.\frac{rS.(E_m-E_{m+n})}{r.(E_m-E_{m+n})-R.(E_m-E_{m+n})},$$

nun statt $R$ und $S$ ihre Werthe substituirt:

(19)

$$\beta=\gamma.\frac{r.E_{m+n+1}}{\left\{\begin{array}{c} r.(E_m-E_{m+n})-[(E'_m-r.E'_{m+1})-(E'_{m+n}-r.E'_{m+n+1}) \\ -n.(E_{m+n}-r.E_{m+n+1})]\end{array}\right\}}.$$

Die Hilfstafel I. gibt für $\gamma=10$, $m=30$, $n=20$:

$$x=\gamma\cdot\frac{r.E_{m+n+1}}{r.(E_m-E_{m+n})}=10.\frac{473.97}{1.04.1679.11}=2.714,$$

$$\beta=10.\frac{473.97}{1.04.1679.11-[1092.25-324.36-20.23.98]}=3.251,$$

$$y=3.251.\frac{16.51}{100}=0.537=3.251-2.714.$$

Hierzu gehört die folgende

und zur Sicherstellung der Rechnung:

$$y = \frac{16.51}{100} \cdot 1.645 = 0.272 = 1.645 - 1.373;$$

der Zahlwerth 16.51 in $y$ wurde mit den Argumente[illegible] $n = 20$ der Tafel A. entnommen.

Auf dieselbe Art wurden die Prämien der [illegible] Tafel gerechnet.

Tafel 4.

| m | $n=5$ x | y | β | $100.\frac{y}{x}$ | x | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | 14.— |
| | | | | | | | | .51 | 20.— |
| | | | | | | | | 2.393 | 32.— |
| | | | | | | | .80 | 1.542 | 60.— |
| 0 | 3.780 | 0.919 | 4.699 | 24.— | 0.[illegible] | | 0.465 | 0.844 | 123.— |
| 5 | 4.392 | 0.199 | 4.591 | 4.5 | [illegible] | .081 | 0.194 | 0.275 | 238.— |
| 10 | 4.925 | 0.110 | 5.035 | 2.2 | | | | | |
| 20 | 5.957 | 0.179 | 6.136 | 3.0 | | | | | |
| 30 | 7.110 | 0.292 | 7.402 | [illegible] | | | | | |
| 40 | 8.341 | 0.480 | 8.821 | | | | | | |
| 50 | 9.460 | 0.929 | 10.3[illegible] | | | | | | |
| 60 | 10.324 | 1.733 | 12[illegible] | | | | | | |
| 70 | 9.884 | 3.298 | [illegible] | | | | | | |

[illegible] ferner [illegible] $=1+\frac{y}{x}$, also $\frac{y}{x} = \frac{R}{r-R}$.

[illegible] die analogen Stücke der Aufgabe 4.,

[illegible] auch $\frac{y_1}{x_1} = \frac{R}{r-R}$, also $\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1}$;

[illegible] die mit $100.\frac{y}{x}$ überschriebenen Spalten in [illegible] einerlei Zahlen aufweisen. Es gilt demnach

$A_m$ zahlt d[illegible] ser Zeit die jä[illegible] $y$ zu geniesse[illegible] sollen die be[illegible] den. Es so[illegible] gegeben ist [illegible]

Lehrsatz.

[illegible] jährige Prämie $\beta$, für den Fall des [illegible] $n$ Jahre, eine Anwartschaft oder eine [illegible] die der Rückzahlung entsprechende [illegible] Prämie $x$ in demselben Verhältniss.

---

Für[illegible] liche Pr[illegible] [illegible] auch einige Versicherungsarten betrachten, [illegible] Verbindung zweier Personen abhangen und zu [illegible] nothwendige Bemerkungen vorausschicken:

(18) [illegible] die Alter zweier Individuen, so ist der ge-

zur A[illegible] [illegible] ihrer mit Ende jeden Jahres fälligen Ver-

[illegible] durch die Gleichung gegeben:

$$\left[\frac{A_{n+1}\cdot A_{n+\nu+1}}{r^{n+1}}+\frac{A_{n+2}\cdot A_{n+\nu+2}}{r^{n+2}}+\frac{A_{n+3}\cdot A_{n+\nu+3}}{r^{n+3}}+\dots\right].$$

...en natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...., so ist

$$\dots_{\nu} =$$

$$\dots + 3\cdot\frac{A_{n+3}\cdot A_{n+\nu+3}}{r^{n+3}}+\dots\Big].$$

...artigen Werthe aller einfachen ...en Altersdifferenz $\nu$ durch eine

...scontirten Zahlen der Lebenden

$$D_2, \dots\; D_n,\; D_{n+1}\dots$$

$$A_{\nu+1},\; A_{\nu+2}, \dots\; A_{n+\nu},\; A_{n+\nu+1}\dots$$

...analog mit der Bildung von $E_m$) die Summen dieser ...von unten nach oben. In diesen zwei neuen Spalten ...nn bei dem Argumente

$$\dots_n\cdot A_{n+\nu}=\frac{A_n\cdot A_{n+\nu}}{r^n} \text{ und } \frac{A_n\cdot A_{n+\nu}}{r^n}+\frac{A_{n+1}\cdot A_{n+\nu+1}}{r^{n+1}}+\frac{A_{n+2}\cdot A_{n+\nu+2}}{r^{n+2}}+\dots,$$

$$n+1,\quad D_{n+1}\cdot A_{n+\nu+1}=\frac{A_{n+1}\cdot A_{n+\nu+1}}{r^{n+1}}$$

und

$$\frac{A_{n+1}\cdot A_{n+\nu+1}}{r^{n+1}}+\frac{A_{n+2}\cdot A_{n+\nu+2}}{r^{n+2}}+\frac{A_{n+3}\cdot A_{n+\nu+3}}{r^{n+3}}+\dots.$$

Bezeichnet man diese Summen mit $E_n''$ und jene Producte mit $D_n'$, so ist allgemein

$$J_n^{n+\nu}=\frac{E''_{n+1}}{D'_n}.$$

Werden die Hilfszahlen $E_n''$ von Neuem in demselben Sinne addirt, so steht in dieser dritten Spalte bei dem Alter

$$n,\quad \frac{A_n\cdot A_{n+\nu}}{r^n}+2\cdot\frac{A_{n+1}\cdot A_{n+\nu+1}}{r^{n+1}}+3\cdot\frac{A_{n+2}\cdot A_{n+\nu+2}}{r^{n+2}}+\dots,$$

diese Summe heisse $E_n'''$;

$$n+1,\quad \frac{A_{n+1}\cdot A_{n+\nu+1}}{r^{n+1}}+2\cdot\frac{A_{n+2}\cdot A_{n+\nu+2}}{r^{n+2}}+3\cdot\frac{A_{n+3}\cdot A_{n+\nu+3}}{r^{n+3}}+\dots,$$

diese Summe heisse $E'''_{n+1}$;

Tafel 5.

| $m$ | $n=5$ | | | | $n=20$ | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x$ | $y$ | $\beta$ | $100.\frac{y}{x}$ | $x$ | $y$ | $\beta$ | $100.\frac{y}{x}$ |
| 0 | 25.282 | 6.146 | 31.428 | 24.— | 4.455 | 0.788 | 5.243 | 18.— |
| 5 | 30.865 | 1.398 | 32.263 | 4.5 | 4.601 | 0.414 | 5.015 | 9.0 |
| 10 | 30.515 | 0.682 | 31.197 | 2.2 | 4.307 | 0.404 | 4.711 | 9.4 |
| 20 | 27.473 | 0.826 | 28.299 | 3.0 | 3.554 | 0.491 | 4.045 | 14.— |
| 30 | 23.979 | 0.984 | 24.963 | 4.1 | 2.714 | 0.537 | 3.251 | 20.— |
| 40 | 20.048 | 1.154 | 21.202 | 5.8 | 1.818 | 0.575 | 2.393 | 32.— |
| 50 | 15.436 | 1.515 | 16.951 | 9.8 | 0.962 | 0.580 | 1.542 | 60.— |
| 60 | 10.545 | 1.771 | 12.316 | 17.— | 0.379 | 0.465 | 0.844 | 123.— |
| 70 | 6.534 | 2.180 | 8.714 | 33.— | 0.081 | 0.194 | 0.275 | 238.— |

Aus obigen Gleichungen folgt ferner

$$\frac{\beta}{x}=\frac{r}{r-R}=\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x}, \text{ also } \frac{y}{x}=\frac{R}{r-R}.$$

Bezeichnen wir mit $x_1$, $y_1$, $\beta_1$ die analogen Stücke der Aufgabe 4., so ist auch dort

$$\frac{\beta_1}{x_1}=\frac{r}{r-R}, \text{ mithin auch } \frac{y_1}{x_1}=\frac{R}{r-R}, \text{ also } \frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1};$$

daher kommt es, dass die mit $100.\frac{y}{x}$ überschriebenen Spalten in den Tafeln 4. und 5. einerlei Zahlen aufweisen. Es gilt demnach folgender

1. Lehrsatz.

*$A_m$ mag durch eine $n$jährige Prämie $\beta$, für den Fall des Ueberlebens der nächsten $n$ Jahre, eine Anwartschaft oder eine Rente versichern, so steht die der Rückzahlung entsprechende Zusatzprämie $y$ zur primitiven Prämie $x$ in demselben Verhältniss.*

---

Jetzt wollen wir auch einige Versicherungsarten betrachten, welche von der Verbindung zweier Personen abhangen und zu diesem Zwecke folgende nothwendige Bemerkungen vorausschicken:

Sind $n$ und $n+\nu$ die Alter zweier Individuen, so ist der gegenwärtige Werth $J_n^{n+\nu}$ ihrer mit Ende jeden Jahres fälligen *Verbindungsrente* 1 durch die Gleichung gegeben:

$$J^{n+v}_{n} = \frac{r^n}{A_n \cdot A_{n+v}} \cdot \left[ \frac{A_{n+1} \cdot A_{n+v+1}}{r^{n+1}} + \frac{A_{n+2} \cdot A_{n+v+2}}{r^{n+2}} + \frac{A_{n+3} \cdot A_{n+v+3}}{r^{n+3}} + \ldots \right].$$

Wächst die Rente mit den natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ...., so ist ihr reducirter Werth:

$$K^{n+v}_{n} =$$

$$\frac{r^n}{A_n \cdot A_{n+v}} \cdot \left[ \frac{A_{n+1} \cdot A_{n+v+1}}{r^{n+1}} + 2 \cdot \frac{A_{n+2} \cdot A_{n+v+2}}{r^{n+2}} + 3 \cdot \frac{A_{n+3} \cdot A_{n+v+3}}{r^{n+3}} + \ldots \right],$$

Bekanntlich findet man die gegenwärtigen Werthe aller einfachen Verbindungsrenten $J^{n+v}_{n}$ derselben Altersdifferenz $v$ durch eine einzige Operation:

Man multiplicirt die discontirten Zahlen der Lebenden

$$D_0, D_1, \quad D_2, \ldots \quad D_n, \quad D_{n+1} \ldots$$

mit

$$A_v, \; A_{v+1}, \; A_{v+2}, \ldots \; A_{n+v}, \; A_{n+v+1} \ldots$$

und bildet (analog mit der Bildung von $E_m$) die Summen dieser Producte von unten nach oben. In diesen zwei neuen Spalten steht dann bei dem Argumente

$$n, \; D_n . A_{n+v} = \frac{A_n . A_{n+v}}{r^n} \text{ und } \frac{A_n . A_{n+v}}{r^n} + \frac{A_{n+1} . A_{n+v+1}}{r^{n+1}} + \frac{A_{n+2} . A_{n+v+2}}{r^{n+2}} + \ldots,$$

$$n+1, \; D_{n+1} . A_{n+v+1} = \frac{A_{n+1} . A_{n+v+1}}{r^{n+1}}$$

und

$$\frac{A_{n+1} . A_{n+v+1}}{r^{n+1}} + \frac{A_{n+2} . A_{n+v+2}}{r^{n+2}} + \frac{A_{n+3} . A_{n+v+3}}{r^{n+3}} + \ldots$$

Bezeichnet man diese Summen mit $E_n''$ und jene Producte mit $D_n'$, so ist allgemein

$$J^{n+v}_{n} = \frac{E''_{n+1}}{D'_n}.$$

Werden die Hilfszahlen $E_n''$ von Neuem in demselben Sinne addirt, so steht in dieser dritten Spalte bei dem Alter

$$n, \quad \frac{A_n . A_{n+v}}{r^n} + 2 . \frac{A_{n+1} . A_{n+v+1}}{r^{n+1}} + 3 . \frac{A_{n+2} . A_{n+v+2}}{r^{n+2}} + \ldots,$$

diese Summe heisse $E_n'''$;

$$n+1, \quad \frac{A_{n+1} . A_{n+v+1}}{r^{n+1}} + 2 . \frac{A_{n+2} . A_{n+v+2}}{r^{n+2}} + 3 . \frac{A_{n+3} . A_{n+v+3}}{r^{n+3}} + \ldots,$$

diese Summe heisse $E'''_{n+1}$;

und man sieht leicht, dass

$$\frac{E'''_{n+1}}{D_n} = K_n^{n+\nu}.$$

Hiermit ist die ziemlich einfache Methode angedeutet, um aus dem, was bereits vorhanden und zu anderen Zwecken nothwendig ist, die reducirten Werthe der steigenden Verbindungsrenten zu rechnen, und die folgende Tafel, welche die genannten Hilfszahlen von $n=50$ an für $\nu=10$ enthält, soll derselben zur numerischen Erläuterung dienen.

Hilfstafel 2.

| $n$ | $D_n . A_{n+10}$ | $E''_n$ | $E'''_n$ |
|---|---|---|---|
| 50 | 8864.1 | 65839.9 | 417114.7 |
| 51 | 7913.4 | 56975.8 | 351274.8 |
| 52 | 7044.5 | 49062.4 | 294299.0 |
| 53 | 6215.3 | 42017.9 | 245236.6 |
| 54 | 5461.0 | 35802.6 | 203218.7 |
| 55 | 4777.4 | 30341.6 | 167416.1 |
| 56 | 4158.7 | 25564.2 | 137074.5 |
| 57 | 3598.3 | 21405.5 | 111510.3 |
| 58 | 3094.1 | 17807.2 | 90104.8 |
| 59 | 2641.3 | 14713.1 | 72297.6 |
| 60 | 2235.5 | 12071.8 | 57584.5 |
| 61 | 1892.1 | 9836.3 | 45512.7 |
| 62 | 1585.8 | 7944.2 | 35676.4 |
| 63 | 1307.3 | 6358.4 | 27732.2 |
| 64 | 1076.5 | 5051.1 | 21373.8 |
| 65 | 873.5 | 3974.6 | 16322.7 |
| 66 | 708.0 | 3101.1 | 12348.1 |
| 67 | 564.3 | 2393.1 | 9247.0 |
| 68 | 449.3 | 1828.8 | 6853.9 |
| 69 | 350.4 | 1379.5 | 5025.1 |
| 70 | 266.0 | 1029.1 | 3645.6 |
| 71 | 203.5 | 763.1 | 2616.5 |
| 72 | 156.2 | 559.6 | 1853.4 |
| 73 | 116.4 | 403.4 | 1293.8 |
| 74 | 84.6 | 287.0 | 890.4 |
| 75 | 61.9 | 202.4 | 603.4 |
| 76 | 44.1 | 140.5 | 401.0 |
| 77 | 32.2 | 96.4 | 260.5 |
| 78 | 23.0 | 64.2 | 164.1 |
| 79 | 15.5 | 41.2 | 99.9 |
| 80 | 9.7 | 25.7 | 58.7 |
| 81 | 6.6 | 16.0 | 33.0 |
| 82 | 4.5 | 9.4 | 17.0 |
| 83 | 2.8 | 4.9 | 7.6 |
| 84 | 1.5 | 2.1 | 2.7 |
| 85 | 0.6 | 0.6 | 0.6 |
| 86 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Hieraus ergibt sich z. B.

$$J_{50}^{60}=\frac{56975.8}{8864.1}=6.43,\quad K_{50}^{60}=\frac{351274.8}{8864.1}=39.63,$$

wie die nachfolgende kleine Tafel aufweiset. Nach derselben Methode wurden auch die Zahlwerthe von $J_n^{m-1}$, $K_n^{m-1}$, $J_{n-1}^m$, $K_{n-1}^m$ berechnet, welche in den letzten vier Spalten angesetzt sind, um sie später benützen zu können.

| $m$ | $n$ | $J_n^m$ | $K_n^m$ | $m-1$ | $n$ | $J_n^{m-1}$ | $K_n^{m-1}$ | $m$ | $n-1$ | $J_{n-1}^m$ | $K_{n-1}^m$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 50 | 6.43 | 39.63 | 59 | 50 | 6.59 | 41.35 | 60 | 49 | 6.51 | 40.47 |
| 65 | 55 | 5.35 | 28.69 | 64 | 55 | 5.49 | 29.95 | 65 | 54 | 5.41 | 29.35 |
| 70 | 60 | 4.40 | 20.36 | 69 | 60 | 4.49 | 21.15 | 70 | 59 | 4.48 | 20.97 |
| 75 | 65 | 3.55 | 14.14 | 74 | 65 | 3.62 | 14.71 | 75 | 64 | 3.62 | 14.56 |
| 80 | 70 | 2.87 | 9.84 | 79 | 70 | 2.90 | 10.15 | 80 | 69 | 2.91 | 10.07 |
| 85 | 75 | 2.27 | 6.48 | 84 | 75 | 2.36 | 6.97 | 85 | 74 | 2.29 | 6.61 |
| 90 | 80 | 1.66 | 3.42 | 89 | 80 | 1.64 | 3.73 | 90 | 79 | 1.66 | 3.43 |
| 91 | 81 | 1.41 | 2.56 | 90 | 81 | 1.65 | 3.36 | 91 | 80 | 1.40 | 2.56 |
| 92 | 82 | 1.09 | 1.70 | 91 | 82 | 1.36 | 2.45 | 92 | 81 | 1.12 | 1.75 |
| 93 | 83 | 0.75 | 0.97 | 92 | 83 | 1.05 | 1.65 | 93 | 82 | 0.77 | 0.99 |
| 94 | 84 | 0.41 | 0.41 | 93 | 84 | 0.77 | 1.00 | 94 | 83 | 0.40 | 0.40 |
| 95 | 85 | 0.00 | 0.00 | 94 | 85 | 0 42 | 0.42 | 95 | 84 | 0.00 | 0.00 |
| | | | | 95 | 86 | 0.00 | 0.00 | | | | |

Nehmen wir an, $A_m$ erlegt ein für alle Mal die Summe $\alpha$, um nach seinem Ableben dem $B_n$ das Capital $\gamma$, $2\gamma$, $3\gamma$, .... $x\gamma$ zu hinterlassen, je nachdem der Tod im Laufe des 1., 2., 3. .... $x$. Jahres nach Abschluss der Versicherung erfolgt. Es soll die Einlage $\alpha$ aus $m$, $n$ und $\gamma$ bestimmt werden.

Sind $N$ Paare, je vom Alter $m$ und $n$ in der bezeichneten Art versichert, so werden im Laufe des $x$ten Jahres $N_1$ Paare durch den Tod des $A_m$ aufgelöst, wenn

$$N_1=N.\frac{A_{m+x-1}-A_{m+x}}{A_m}.\frac{A_{n+x}}{A_n}=\frac{N}{A_m.A_n}.(A_{m+x-1}.A_{n+x}-A_{m+x}.A_{n+x}).$$

$N_1$ bezeichnet also die Anzahl der am Ende des $x$ten Jahres

vorkommenden Zahlfälle. Wird nun $N_1$ mit $x\gamma$ multiplicirt, das Product um $x$ Jahre discontirt und durch $N$ dividirt, so ist

$$\frac{N_1 . x\gamma}{N . r^x} = \gamma . \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} . x \frac{A_{m+x-1} . A_{n+x}}{A_{m-1} . A_n . r^x} - x \frac{A_{m+x} . A_{n+x}}{A_m . A_n . r^x}\right]$$

der gegenwärtige Werth des Antheils eines einzelnen Paares an den, am Ende des $x$ten Jahres nothwendigen Ausgaben der Casse.

Setzt man in dieser Formel nach und nach $x = 1, 2, 3..$ und summirt, so erhält man den gegenwärtigen Werth des Gesammtantheils eines einzelnen Paares an allen von der Casse der Gesellschaft zu leistenden Zahlungen, d. i. die einmalige Einlage. Weil nun

$$\frac{1}{A_{m-1} . A_n} . \overset{\infty}{\underset{1}{S}} x . \frac{A_{m+x-1} . A_{n+x}}{r^x} = K_n^{m-1}$$

und

$$\frac{1}{A_m . A_n} . \overset{\infty}{\underset{1}{S}} x . \frac{A_{m+x} . A_{n+x}}{r^x} = K_n^m,$$

so gibt die Ausführung dieses Manövers die Endformel:

$$\alpha = \gamma . \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} . K_n^{m-1} - K_n^m\right]. \tag{22}$$

Aus dieser wird die jährliche, auf die Dauer des Zusammenlebens anfangs jedes Jahres zu entrichtende Prämie $\beta$ gefunden, wenn man mit $1 + J_n^m$ dividirt:

$$\beta = \frac{\gamma}{1 + J_n^m} . \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} . K_n^{m-1} - K_n^m\right]. \tag{23}$$

Hiernach findet man z. B. für $\gamma = 100$, $m = 60$, $n = 50$:

$$\alpha = 100 . \left[\frac{219}{210} . 41.35 - 39.63\right] = 349 \text{ und } \beta = \frac{349}{1 + 6.43} = 46.97;$$

auf diese Art ist die folgende Tafel B. gerechnet.

Soll in jedem Falle nur das einfache Capital $\gamma$ ausgezahlt werden, so verwandelt sich $K$ in $J$ und man hat die bekannten Formeln:

$$\alpha = \gamma . \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} . J_n^{m-1} - J_n^m\right] \tag{24}$$

und

$$\beta = \frac{\gamma}{1 + J_n^m} . \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} . J_n^{m-1} - J_n^m\right]. \tag{25}$$

Tafel B.

| $m$ | $n$ | $\alpha$ | $\beta$ |
|---|---|---|---|
| 60 | 50 | 349 | 46.97 |
| 65 | 55 | 311 | 48.98 |
| 70 | 60 | 268 | 49.63 |
| 75 | 65 | 228 | 50.11 |
| 80 | 70 | 196 | 50.65 |
| 85 | 75 | 172 | 52.60 |
| 90 | 80 | 155 | 58.27 |
| 91 | 81 | 147 | 61.00 |
| 92 | 82 | 136 | 65.07 |
| 93 | 83 | 123 | 70.28 |
| 94 | 84 | 109 | 77.30 |
| 95 | 85 | 84 | 84.00 |

## Aufgabe 6.

$A_m$ zahlt in die Casse der Gesellschaft die Summe $\alpha$. Für den Fall, dass $A_m$ **vor** $B_n$ stirbt, soll der Ueberlebende $B_n$ das Capital $\gamma$ erhalten; erfolgt aber das Ableben des $B_n$ **vor** dem des $A_m$, so soll dem $A_m$ die Einlage $\alpha$ zurückgezahlt werden. Es soll die Bedingungsgleichung der vier Grössen $m$, $n$, $\alpha$ und $\gamma$ aufgestellt werden.

## Auflösung.

Auch hier haben wir wieder zwei Versicherungen in Verbindung: $A_m$ versichert die Summe $\gamma$ zu Gunsten des $B_n$ und die dafür zu entrichtende Einlage sei $x$, und wir können nun sagen, $B_n$ macht zu Gunsten des $A_m$ eine solche Einlage $y$, dass das entsprechende Capital $\alpha$ gleich der Gesammteinlage $x+y$ sei.

Für die erste Versicherung gilt die Gleichung (24):

$$(24) \qquad x = \gamma \cdot \left[\frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot J_n^{m-1} - J_n^m\right] = \gamma \cdot T$$

der Kürze wegen; hierin die Alter $m$ und $n$ mit einander vertauscht und $\alpha$ an die Stelle gesetzt, gibt

$$(26) \qquad y = \alpha \cdot \left[\frac{A_{n-1}}{A_n} . J^m_{n-1} - J^m_n\right] = \alpha . U$$

als die der zweiten Versicherung entsprechende Bestimmungsgleichung. Mit Hilfe der, auch hier nothwendig stattfindenden Relation

$$(6) \qquad x + y = \alpha$$

findet man $\alpha = \gamma . T + \alpha . U$, und hieraus $\alpha = \gamma . \frac{T}{1 - U}$, nun statt $T$ und $U$ die Werthe aus (24) und (26) gesetzt, so wird

$$(27) \qquad \alpha = \gamma . \frac{\frac{A_{m-1}}{A_m} . J^{m-1}_n - J^m_n}{1 - \frac{A_{n-1}}{A_n} . J^m_{n-1} + J^m_n}.$$

Setzen wir $\gamma = 100$, $m = 60$, $n = 50$, so geben die Formeln (24), (27), (26):

$$x = 100 . \left[\frac{219}{210} . 6.59 - 6.43\right] = 44, \quad \alpha = \frac{44}{1 - \left[\frac{308}{300} . 6.51 - 6.43\right]} = 58.7$$

und

$$y = 58.7 . \left[\frac{308}{300} . 6.51 - 6.43\right] = 14.7 = 58.7 - 44.0;$$

die Tafel 6. gibt zur vergleichenden Uebersicht mehrere solcher Beispiele.

Tafel 6.

| $m$ | $n$ | $x$ | $y$ | $\alpha$ | $100.\frac{y}{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 50 | 44 | 14.7 | 58.7 | 33 |
| 65 | 55 | 48 | 16.0 | 64.0 | 33 |
| 70 | 60 | 49 | 18.1 | 67.1 | 37 |
| 75 | 65 | 49 | 20.0 | 69.0 | 41 |
| 80 | 70 | 50 | 21.4 | 71.4 | 43 |
| 85 | 75 | 51 | 20.8 | 71.8 | 41 |
| 90 | 80 | 53 | 19.6 | 72.6 | 37 |
| 91 | 81 | 57 | 15.2 | 72.2 | 27 |
| 92 | 82 | 61 | 14.3 | 75.3 | 23 |
| 93 | 83 | 65 | 11.5 | 76.5 | 18 |
| 94 | 84 | 74 | 5.6 | 79.6 | 8 |
| 95 | 85 | 84 | 0.0 | 84.0 | 0 |

### Aufgabe 7.

$A_m$ und $B_n$ erlegen auf die Dauer ihres Zusammenlebens die jährliche Prämie $\beta$ am Anfange jedes Jahres. Stirbt $A_m$ vor $B_n$, so zahlt die Gesellschaft dem $B$ das Capital $\gamma$ aus. Ist aber $A_m$ der Ueberlebende, so erhält dieser am Ende des Todesjahres von $B_n$ die eingezahlten Prämien zurück. Es soll $\beta$ bestimmt werden, wenn $m$, $n$ und $\gamma$ gegeben ist.

### Auflösung.

Zerlegen wir die gesuchte jährliche Prämie $\beta$ in zwei Theile $x$ und $y$, so dass

$$x+y=\beta; \tag{10}$$

der erste Theil soll für die Versicherung des Capitals $\gamma$ ausreichen, welches nach dem Tode des $A_m$ im Lebensfalle des $B_n$ zahlbar wird. Der zweite Theil $y$ soll so gewählt werden, dass der Ueberlebende $A_m$ das Capital

$$\beta,\quad 2\beta,\quad 3\beta,\ldots.$$

erhält, je nachdem $B_n$ im

$$1.,\quad 2.,\quad 3.,\ldots.$$

Jahre nach Abschluss der Versicherung stirbt.

$x$ wird durch die Gleichung (25) bestimmt, man hat also

$$x=\frac{\gamma}{1+J_n^m}\cdot\left[\frac{A_{m-1}}{A_m}\cdot J_n^{m-1}-J_n^m\right]=\gamma\cdot V; \tag{25}$$

der Theil $y$ ergibt sich aus der Gleichung (23), wenn $\beta$ an die Stelle von $\gamma$ tritt und $m$ mit $n$ vertauscht wird:

$$y=\frac{\beta}{1+J_n^m}\cdot\left[\frac{A_{n-1}}{A_n}\cdot K_{n-1}^m-K_n^m\right]=\beta\cdot W. \tag{28}$$

Wird $x$ und $y$ aus den drei Gleichungen (10), (25), (28) eliminirt, so findet man

$$\beta=\gamma\cdot V+\beta\cdot W,\quad \beta=\gamma\cdot\frac{V}{1-W}=\gamma\cdot\frac{V.(1+J_n^m)}{1+J_n^m-W.(1+J_n^m)}.$$

oder endlich

$$(29) \qquad \beta = \gamma \cdot \frac{\frac{A_{m-1}}{A_m} \cdot J_n^{m-1} - J_n^m}{1 + J_n^m - \frac{A_{n-1}}{A_n} \cdot K_{n-1}^m + K_n^m}.$$

Für $\gamma = 100$, $m = 60$, $n = 50$ wird

$$x = \frac{44}{1+6.43} = 5.922, \quad \beta = \frac{44}{1+6.43-\left[\frac{308}{300} \cdot 40.47 - 39.63\right]} = 7.985$$

und

$$y = \frac{7.985}{1+6.43} \cdot \left[\frac{308}{300} \cdot 40.47 - 39.63\right] = 2.063 = 7.985 - 5.922.$$

Hierzu gehört die

Tafel 7.

| $m$ | $n$ | $x$ | $y$ | $\beta$ | $100 \cdot \frac{y}{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 50 | 5.92 | 2.07 | 7.99 | 35 |
| 65 | 55 | 7.56 | 2.74 | 10.30 | 36 |
| 70 | 60 | 9.07 | 3.53 | 12.60 | 39 |
| 75 | 65 | 10.77 | 4.40 | 15.17 | 41 |
| 80 | 70 | 12.92 | 5.33 | 18.25 | 41 |
| 85 | 75 | 15.59 | 5.93 | 21.52 | 38 |
| 90 | 80 | 19.93 | 5.43 | 25.36 | 27 |
| 91 | 81 | 23.65 | 4.71 | 28.36 | 20 |
| 92 | 82 | 29.19 | 4.89 | 34.08 | 17 |
| 93 | 83 | 37.14 | 4.53 | 41.67 | 12 |
| 94 | 84 | 52.48 | 2.74 | 55.22 | 5 |
| 95 | 85 | 84.00 | 0.00 | 84.00 | 0 |

Aufgabe 8.

$A_m$ und $B_n$ erlegen ein für alle Mal das Capital $\alpha$. Stirbt $A_m$ vor $B_n$, so soll dem Ueberlebenden $B_n$ von da ab Ende jeden Jahres die Lebensrente $\gamma$ ausgezahlt werden. Stirbt $B_n$ vor $A_m$, so soll diesem die Einlage $\alpha$ wieder zurückerstattet werden. Wie berechnet man $\alpha$, wenn $m$, $n$ und $\gamma$ gegeben ist?

A u f l ö s u n g.

Sei wieder

$$(6)\qquad \alpha = x + y$$

und $x$ die nöthige Einlage, um dem $B_n$ die Ueberlebensrente $\gamma$ zu versichern, also

$$(30)\qquad x = \gamma.(L_n - J^m_n) = \gamma.X,$$

wenn $L_n$ den gegenwärtigen Werth der Lebensrente 1 für ein $n$jähriges Individuum bezeichnet.

$y$ ist die Einlage zur Versicherung des Capitals $\alpha$, zahlbar nach Ableben des $B_n$ zu Gunsten des Ueberlebenden $A_m$, wird also nach Formel (24) bestimmt, indem man $m$ mit $n$ und $\alpha$ mit $\gamma$ vertauscht:

$$(26)\qquad y = \alpha.\left[\frac{A_{n-1}}{A_n}.J^m_{n-1} - J^m_n\right] = \alpha.U.$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt:

$$\alpha = \gamma.X + \alpha.U,\quad \alpha = \gamma.\frac{X}{1-U}$$

oder

$$(31)\qquad \alpha = \gamma.\frac{L_n - J^m_n}{1 - \frac{A_{n-1}}{A_n}.J^m_{n-1} + J^m_n}.$$

Hiernach erhält man für $\gamma = 10$, $m = 60$, $n = 50$:

$$x = 43.7,\quad \alpha = \frac{43.7}{1 - \left[\frac{308}{300}.6.51 - 6.43\right]} = 58.3,$$

$$y = 58.3.\left[\frac{308}{300}.6.51 - 6.43\right] = 14.6.$$

Auf diese Art entstand die folgende

Tafel 8.

| $m$ | $n$ | $x$ | $y$ | $\alpha$ | $100.\frac{y}{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 50 | 43.7 | 14.6 | 58.3 | 33 |
| 65 | 55 | 42.9 | 14.3 | 57.2 | 33 |
| 70 | 60 | 39.4 | 14.6 | 54.0 | 37 |
| 75 | 65 | 35.0 | 14.3 | 49.3 | 41 |
| 80 | 70 | 31.2 | 13.4 | 44.6 | 43 |
| 85 | 75 | 27.9 | 11.4 | 39.3 | 41 |
| 90 | 80 | 25.4 | 9.4 | 34.8 | 37 |
| 91 | 81 | 26.4 | 7.0 | 33.4 | 27 |
| 92 | 82 | 27.3 | 6.4 | 33.7 | 23 |
| 93 | 83 | 28.8 | 5.1 | 33.9 | 18 |
| 94 | 84 | 31.2 | 2.4 | 33.6 | 8 |
| 95 | 85 | 33.2 | 0.0 | 33.2 | 0 |

Weil

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{1}{1-U}=\frac{x+y}{x}=1+\frac{y}{x},$$

so wird:

$$\frac{y}{x}=\frac{U}{1-U};$$

sind $x_1$, $y_1$, $\alpha_1$ die analogen Stücke der Aufgabe 6., so findet sich auch dort:

$$\frac{\alpha_1}{x_1}=\frac{1}{1-U}, \text{ mithin auch } \frac{y_1}{x_1}=\frac{U}{1-U}, \text{ also } \frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1};$$

in der That sind auch die Zahlwerthe von $100.\frac{y}{x}$ in den Tafeln 6. und 8. einander gleich und es besteht folgender

## 2. Lehrsatz.

*$A_m$ mag durch die Einlage $\alpha$ für $B_n$ im Ueberlebensfalle ein Capital oder eine Rente versichern, so steht die der Rückzahlung entsprechende Erhöhung $y$ zur primitiven Prämie $x$ in demselben Verhältniss.*

## Aufgabe 9.

$A_m$ und $B_n$ erlegen zu Anfang jedes Jahres auf die Dauer

ihres Zusammenlebens die Prämie $\beta$. Stirbt $A_m$ vor $B_n$, so soll dem Ueberlebenden $B_n$ von da ab Ende jedes Jahres die Rente $\gamma$ ausgezahlt werden; erfolgt aber das Ableben des $B_n$ vor dem des $A_m$, so erhält dieser die eingezahlten Prämien zurück. Es soll $\beta$ als Function von $m$, $n$ und $\gamma$ dargestellt werden.

Auflösung.

Zur Versicherung der Ueberlebensrente $\gamma$ zu Gunsten des $B_n$ ist eine jährliche Prämie $x$ nothwendig, welche die Gleichung erfüllt:

$$x = \frac{\gamma}{1+J^m_n} . [L_n - J^m_n] = \gamma . Y. \tag{32}$$

Für die zweite Gleichung

$$x + y = \beta \tag{10}$$

muss dann die Zusatzprämie $y$ so gewählt werden, dass $A_m$ nach Ableben des $B_n$ die Summe $\beta$, $2\beta$, $3\beta$.... erhält, je nachdem dasselbe im Laufe des 1., 2., 3.,.... Jahres nach Abschluss der Versicherung erfolgt. Diese Bedingungen involvirt die Formel (23), wonach man findet, indem $\gamma$ mit $\beta$ und $m$ mit $n$ vertauscht wird:

$$y = \frac{\beta}{1+J^m_n} \cdot \left[\frac{A_{n-1}}{A_n} . K^m_{n-1} - K^m_n\right] = \beta . W. \tag{28}$$

Also ist

$$\beta = x + y = \gamma . Y + \beta . W, \quad \beta = \frac{Y}{1-W},$$

$$\beta = \gamma . \frac{L_n - J^m_n}{1 + J^m_n - \frac{A_{n-1}}{A_n} . K^m_{n-1} + K^m_n}. \tag{33}$$

Wird $\gamma = 10$, $m = 60$, $n = 50$ gesetzt, so ist

$$x = \frac{43.72}{1+6.43} = 5.88,$$

$$\beta = \frac{43.72}{1 + 6.43 - \left[\frac{308}{300} . 40.47 - 39.63\right]} = 7.93,$$

$$y = \frac{7.93}{1+6.43} \cdot \left[\frac{308}{300} . 40.47 - 39.63\right] = 2.05.$$

Tafel 9.

| $m$ | $n$ | $x$ | $y$ | $\beta$ | $100.\frac{y}{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 60 | 50 | 5.88 | 2.05 | 7.93 | 35 |
| 65 | 55 | 6.76 | 2.45 | 9.21 | 36 |
| 70 | 60 | 7.30 | 2.83 | 10.13 | 39 |
| 75 | 65 | 7.69 | 3.15 | 10.84 | 41 |
| 80 | 70 | 8.06 | 3.33 | 11.39 | 41 |
| 85 | 75 | 8.53 | 3.24 | 11.77 | 38 |
| 90 | 80 | 9.55 | 2.60 | 12.15 | 27 |
| 91 | 81 | 10.95 | 2.18 | 13.13 | 20 |
| 92 | 82 | 13.06 | 2.19 | 15.25 | 17 |
| 93 | 83 | 16.46 | 2.00 | 18.46 | 12 |
| 94 | 84 | 22.12 | 1.16 | 23.28 | 5 |
| 95 | 85 | 33.20 | 0.00 | 33.20 | 0 |

Der Vergleich der Ausdrücke für $x$, $y$ und $\beta$ mit jenen der Aufgabe 7., welche wir durch $x_1$, $y_1$, $\beta_1$ ausdrücken wollen, zeigt:

$$\frac{\beta}{x}=\frac{1}{1-W}=1+\frac{y}{x} \text{ und } \frac{\beta_1}{x_1}=\frac{1}{1-W}=1+\frac{y_1}{x_1},$$

also ist auch

$$\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1},$$

wie auch aus den letzten Spalten der Tafeln 7. und 9. ersichtlich ist. Diese Gleichung in die gewöhnliche Wortsprache übersetzt, gibt folgenden

3. Lehrsatz.

Die der Rückzahlung entsprechende Zusatzprämie $y$ hat zur primitiven Prämie $x$ dasselbe Verhältniss, ob nun $A_m$ zu Gunsten des $B_n$ eine Anwartschaft oder eine Rente versichert.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass die aufgeführten drei Lehrsätze allgemein gelten, also vom Zinsfuss sowohl, als von der Sterbensordnung unabhängig sind; übrigens ist das Verhältniss $\frac{y}{x}$ eine Function der Bedingungen des Vertrages und in demselben Vertrage jederzeit eine Function des Alters.

Die in diesem Aufgaben-Cyclus behandelten Versicherungsverträge sind durch die Bedingung der Rückzahlung von der Art, dass der versicherte Betrag ein anderer ist, je nachdem eines von zwei möglichen Ereignissen zutrifft: er ist entweder veränderlich

a) mit dem Todesfall einer Person vor oder nach einer bestimmten Epoche (Aufgabe 1. bis incl. 5.)

oder

b) mit dem Todesfall einer Person vor oder nach dem Ableben einer bestimmten zweiten Person (Aufgabe 6. bis incl. 9.).

Soll der Versicherung durch eine jährliche Prämie entsprochen werden, so ist einer dieser Beträge meist veränderlich mit der Zahl des Jahres, in welchem ein bestimmtes Ereigniss erfolgt (Aufgabe 4., 5., 7. und 9.), und dieses hat uns veranlasst, einleitungsweise die Formel (3) und später jene (23) aufzustellen zur Berechnung der Prämie für Anwartschaften, welche mit den natürlichen Zahlen steigen.

Soll jedoch die Versicherung eines Capitals oder einer Rente durch eine einmalige Einlage erreicht werden, so ist das Versicherte zwar mit den zwei zu erwartenden Ereignissen verschieden, bleibt aber constant, ob nun eines dieser Ereignisse im 1., 2., 3.,.... oder $x$. Jahre nach Abschluss der Versicherung erfolgt.

In beiden Fällen lässt sich der Vertrag in zweie zerlegen, wovon jeder einem der beiden Ereignisse entspricht, und die Berechnung erfolgt dann entweder nach den Gleichungen (1), (3), (23) oder nach anderen bekannten Formeln. Durch die stete Anwendung endlich der aus der Diction solcher Verträge entspringenden Gleichung (6) $x+y=\alpha$ oder jener (10) $x+y=\beta$ completirt man die Anzahl der Gleichungen auf drei, welche zur Bestimmung der Einlage $\alpha$ oder der Prämie $\beta$ und ihrer unbekannten Bestandtheile $\alpha$ und $y$ nothwendig und ausreichend sind.

Unter der Leitung dieser allgemeinen Gesichtspunkte trifft man bei der Auflösung ähnlicher Aufgaben auf keinerlei Hinderniss mehr.

---

# XXVII.

## Ueber die Ableitung der Formeln der sphärischen Trigonometrie aus einer Figur in der Ebene.

Von

Herrn *Franz Unferdinger,*

Lebensversicherungs-Calculator der k. k. p. Azienda Assicuratrice zu Triest.

---

In Theil XXV. S. 225. des Archivs wurde aus der, zur Bestimmung der Flächenwinkel aus den Kantenwinkeln eines Trieders nöthigen Construction in der Ebene die Grundformel der sphärischen Trigonometrie abgeleitet. Dieselbe Construction soll nun benutzt werden zur Ableitung einiger anderer Formeln.

Man beschreibe (Taf. IX. Fig. 5.) noch von $o$ als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $oC_3 = 0C_4 = 1$ die Kreislinie $C_3pqC_4$, verlängere die Geraden $C_3o'$ und $C_4o'$ bis zu ihren Durchschnitten $p$ und $q$ mit derselben, so ist offenbar $C_3A = Aq$ und $C_4B = Bp$, also geht die verlängerte Kreislinie $C_3C_1$ durch $q$ und jene $C_4C_2$ durch $p$. Verbindet man nun $C_3$ mit $C_4$ und $p$, $C_4$ mit $q$, ferner $o$ mit $p$ und $q$ durch gerade Linien, so ersieht man leicht aus der Figur, dass

$$x = \tfrac{1}{2}(b + c - a), \qquad C_3C_4 = 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a + b + c),$$

$$y = \tfrac{1}{2}(a + c - b), \qquad C_3p = 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(b + c - a),$$

$$z = \tfrac{1}{2}(a + b - c), \qquad C_4q = 2\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a + c - b),$$

$$\angle o'pC_3 = \angle o'qC_4 = 180 - \tfrac{1}{2}(a + b + c),$$

$$\operatorname{Sin} o'pC_3 = \operatorname{Sin} o'qC_4 = \operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a + b + c).$$

Nun ist

$$C_3o'=AC_1.\mathrm{Sin}A,\quad \mathrm{Sin}A=\frac{C_1o'}{\mathrm{Sin}b},\quad \overline{C_1o'^2}=o'C_3.o'q$$

und im

$$\Delta\, o'pC_3:\ \frac{o'C_3}{pC_3}=\frac{\mathrm{Sin}\,o'pC_3}{\mathrm{Sin}\,c}=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\mathrm{Sin}\,c}=\frac{o'C_3}{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)},$$

$$\Delta\, o'qC_4:\ \frac{o'q}{qC_4}=\frac{\mathrm{Sin}\,z}{\mathrm{Sin}\,c}=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}\,c}=\frac{o'q}{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)};$$

also

$$o'C_3=\frac{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{Sin}\,c},$$

$$o'q\ =\frac{2\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}\,c}$$

und

$$\mathrm{Sin}^2A=\frac{o'C_3.o'q}{\mathrm{Sin}^2b}$$

$$=\frac{4\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}^2b.\mathrm{Sin}^2c}.$$

Nun ist nach der Figur

$$oC_3=C_3A+Ao'=\mathrm{Sin}\,b+\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Cos}\,A=\mathrm{Sin}\,b.(1+\mathrm{Cos}\,A)$$

$$=2.\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2},$$

$$o'q=C_3q-C_3o'=2\mathrm{Sin}\,b-2\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2}=2\mathrm{Sin}\,b.(1-\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2})$$

$$=2\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Sin}^2\frac{A}{2};$$

mithin

$$\mathrm{Cos}^2\frac{A}{2}=\frac{oC_3}{2\mathrm{Sin}\,b}=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}{\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Sin}\,c},$$

$$\mathrm{Sin}^2\frac{A}{2}=\frac{o'q}{2\mathrm{Sin}\,b}=\frac{\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)\,\mathrm{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\mathrm{Sin}\,b.\mathrm{Sin}\,c};$$

ebenso ist

$$o'C_4=C_4B+Bo'=\mathrm{Sin}\,a+\mathrm{Sin}\,a.\mathrm{Cos}\,B=\mathrm{Sin}\,a.(1+\mathrm{Cos}\,B)$$

$$=2\mathrm{Sin}\,a.\mathrm{Cos}^2\frac{B}{2},$$

$$o'p = C_4p - C_4o' = 2\operatorname{Sin} a - 2\operatorname{Sin} a . \operatorname{Cos}^2\frac{B}{2} = 2\operatorname{Sin} a\left(1 - \operatorname{Cos}^2\frac{B}{2}\right)$$

$$= 2\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin}^2\frac{B}{2}.$$

Nun ist im

$$\Delta\, o'qC_4:\ \frac{o'C_4}{qC_4} = \frac{\operatorname{Sin} o'qC_4}{\operatorname{Sin} c} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin} c} = \frac{2\operatorname{Sin} a . \operatorname{Cos}^2\frac{B}{2}}{2\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)},$$

$$\Delta\, o'pC_3:\ \frac{o'p}{C_3p} = \frac{\operatorname{Sin} z}{\operatorname{Sin} c} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin} c} = \frac{2\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin}^2\frac{B}{2}}{2\sin\frac{1}{2}(b+c-a)};$$

mithin

$$\operatorname{Cos}^2\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} c},$$

$$\operatorname{Sin}^2\frac{B}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} c}.$$

Demnach ist nun

$$(1)\quad \operatorname{Cos}^2\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b} = \frac{2C_3C_4 . \operatorname{Sin} z}{C_4p . C_3q},$$

$$(2)\quad \operatorname{Sin}^2\frac{C}{2} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} a . \operatorname{Sin} b} = \frac{C_3p . C_4q}{C_4p . C_3q}.$$

Es wird sich alsbald Gelegenheit darbieten, die beiden letzten Formeln zu benutzen. Es ist nach dem Obigen

$$\operatorname{Cos}^2\frac{A}{2} = \frac{C_3o'}{2\operatorname{Sin} b} = \frac{C_3o'}{C_3q},\quad \operatorname{Cos}^2\frac{B}{2} = \frac{C_4o'}{2\operatorname{Sin} a} = \frac{C_4o'}{C_4p},$$

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b+c) = \frac{\overline{C_3C_4}^2}{4},$$

$$\operatorname{Sin}^2\frac{A}{2} = \frac{o'q}{2\operatorname{Sin} b} = \frac{o'q}{C_3q},\quad \operatorname{Sin}^2\frac{B}{2} = \frac{o'p}{2\operatorname{Sin} a} = \frac{o'p}{C_4p},$$

$$\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+b-c) = \operatorname{Sin}^2 z;$$

also ist

$$(3)\quad \left[\frac{\operatorname{Cos}\frac{A}{2} . \operatorname{Cos}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b+c)}\right]^2 = \frac{C_3o' . C_4o'}{C_3q . C_4p} . \frac{4}{\overline{C_3C_4}^2},$$

$$(4) \qquad \left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{A}{2}.\operatorname{Sin}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}\right]^2 = \frac{o'q.o'p}{C_3q.C_4p}.\frac{1}{\operatorname{Sin}^2 z}.$$

In Bezug auf das $\Delta\, o'pC_3$ gilt folgende Proportion:

$$o'p:o'C_3 = \operatorname{Sin} z : \operatorname{Sin} o'pC_3 = \operatorname{Sin} z : \frac{C_3C_4}{2}, \quad \text{also} \quad \frac{o'p}{2\operatorname{Sin} z} = \frac{C_3o'}{C_3C_4}$$

oder

$$\frac{\overline{o'p}^2.(C_4o'.o'q)}{4\operatorname{Sin}^2 z} = \frac{\overline{C_3o}^2.(C_4o'.o'q)}{\overline{C_3C_4}^2}.$$

Wegen $\Delta\, o'pC_3 \sim \Delta\, o'qC_4$ hat man aber $C_3o':o'p = C_4o':o'q$ oder

$$o'p.C_4o' = C_3o'.o'q;$$

wird also durch diese Factoren abgekürzt, so zeigt sich

$$\frac{o'p.o'q}{4\operatorname{Sin}^2 z} = \frac{C_3o'.C_4o'}{\overline{C_3C_4}^2},$$

also sind die Ausdrücke (3) und (4) einander gleich. Die Aehnlichkeit der genannten Dreiecke $o'pC_3$ und $o'qC_4$ gibt auch folgende Proportion:

$$C_3p:C_4q = C_3o':C_4o',$$

$$(5) \qquad C_4q = \frac{C_4o'}{C_3o'}.C_3p,$$

und, im $\Delta\, o'pC_3$, $C_3o':C_3p = \operatorname{Sin} o'pC_3 : \operatorname{Sin} c = \frac{C_3C_4}{2} : \operatorname{Sin} c$, also

$$C_3p = 2.C_3o'.\frac{\operatorname{Sin} c}{C_3C_4},$$

$$(6) \qquad \overline{C_3p}^2 = 4.\overline{C_3o'}^2.\frac{\operatorname{Sin}^2 c}{\overline{C_3C_4}^2}.$$

Werden nun die beiden Gleichungen mit einander multiplicirt und das Product durch die gleichen Factoren abgekürzt, so erhält man

$$C_3p.C_4q = 4.C_3o'.C_4o'.\frac{\operatorname{Sin}^2 c}{\overline{C_3C_4}^2}$$

oder

$$\frac{C_3p.C_4q}{C_3q.C_4p} = 4.\frac{C_3o'.C_4o'}{C_3q.C_4p}.\frac{\operatorname{Sin}^2 c}{\overline{C_3C_4}^2} = \operatorname{Sin}^2\frac{C}{2},$$

$$\frac{C_3o'.C_4o'}{C_3q.C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{C_3C_4}^2}=\frac{\operatorname{Sin}^2\frac{C}{2}}{\sin^2 c}.$$

Der erste Theil dieser Gleichung ist gleich dem zweiten Theile in (3), und es ist daher

$$(I)\qquad \frac{\operatorname{Cos}\frac{A}{2}.\operatorname{Cos}\frac{B}{2}}{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{A}{2}.\operatorname{Sin}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b-c)}=\frac{\operatorname{Sin}\frac{C}{2}}{\operatorname{Sin} c}.$$

Weil

$$\operatorname{Sin}^2\frac{A}{2}=\frac{o'q}{C_3q},\quad \operatorname{Cos}^2\frac{B}{2}=\frac{C_4o'}{C_4p},\quad \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(a+c-b)=\frac{\overline{C_4q}^2}{4}$$

und

$$\operatorname{Sin}^2\frac{B}{2}=\frac{o'p}{C_4p},\quad \operatorname{Cos}^2\frac{A}{2}=\frac{C_3o'}{C_3q},\quad \operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}(b+c-a)=\frac{\overline{C_3p}^2}{4},$$

so ist

$$(7)\qquad \left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{A}{2}.\operatorname{Cos}\frac{B}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+c-b)}\right]^2=\frac{o'q.C_4o'}{C_3q.C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{C_4q}^2},$$

$$(8)\qquad \left[\frac{\operatorname{Sin}\frac{B}{2}.\operatorname{Cos}\frac{A}{2}}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(b+c-a)}\right]^2=\frac{o'p.C_3o'}{C_3q.C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{C_3p}^2}.$$

$\Delta\, o'pC_4 \sim \Delta\, o'qC_4$, mithin

$$\frac{o'q}{C_4q}=\frac{o'p}{C_3p}\quad\text{oder}\quad \frac{\overline{o'q}^2.(C_3o'.C_4o')}{\overline{C_4q}^2}=\frac{\overline{o'p}^2.(C_3o'.C_4o')}{\overline{C_3p}^2},$$

$$\frac{o'q}{C_4o'}=\frac{o'p}{C_3o'}\quad\text{oder}\quad o'q.C_3o'=o'p.C_4o';$$

aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Division:

$$\frac{o'q.C_4o'}{\overline{C_4q}^2}=\frac{o'p.C_3o'}{\overline{C_3p}^2}\quad\text{oder}\quad \frac{o'q.C_4o'}{C_3q.C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{C_4q}^2}=\frac{o'p.C_3o'}{C_3q.C_4p}\cdot\frac{4}{\overline{C_3p}^2};$$

die Ausdrücke (7) und (8) sind also einander gleich.

Für das $\Delta\, o'qC_4$ hat man die Proportion: $o'q:C_4q=\operatorname{Sin} z.\operatorname{Sin} c$, also ist:

$$\frac{\operatorname{Sin}^2 c}{\overline{C_4 q}^2} = \frac{\operatorname{Sin}^2 z}{\overline{o'q}^2} \quad \text{oder} \quad o'q \, . \, C_4 o' \, . \, \frac{2 \operatorname{Sin}^2 c}{\overline{C_4 q}^2} = 2 \, . \, \frac{\operatorname{Sin}^2 z}{o'q} \, . \, C_4 o' \, ;$$

nun ist in demselben Dreiecke $o'qC_4$:

$$o'q : C_4 o' = \frac{C_3 C_4}{2} : \operatorname{Sin} z, \quad \text{mithin} \quad 2 \frac{\operatorname{Sin} z}{o'q} \, . \, C_4 o' = C_3 C_4 ;$$

also

$$o'q \, . \, C_4 o' \, . \, \frac{2 \operatorname{Sin}^2 c}{\overline{C_4 q}^2} = C_3 C_4 \, . \operatorname{Sin} z,$$

$$\frac{o'q \, . \, C_4 o'}{C_4 p \, . \, C_3 q} \, . \, \frac{4}{\overline{C_4 q}^2} = \frac{2 C_3 C_4 . \operatorname{Sin} z}{C_4 p \, . \, C_3 q} \, . \, \frac{1}{\operatorname{Sin}^2 c} = \frac{\operatorname{Cos}^2 \frac{C}{2}}{\operatorname{Sin}^2 c} \, .$$

Der erste Theil dieser Gleichung entspricht genau dem zweiten Theile in (7), und es ist demnach

$$\text{(II)} \qquad \frac{\operatorname{Sin} \frac{A}{2} . \operatorname{Cos} \frac{B}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+c-b)} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{B}{2} . \operatorname{Cos} \frac{A}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c-a)} = \frac{\operatorname{Cos} \frac{C}{2}}{\operatorname{Sin}^2 c} \, .$$

Die Gleichungen (I) und (II) geben nun folgende:

$$\text{a)} \quad \frac{\operatorname{Cos} \frac{A}{2} . \operatorname{Cos} \frac{B}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b+c)}{\operatorname{Sin} c} \, ,$$

$$\text{b)} \quad \frac{\operatorname{Sin} \frac{A}{2} . \operatorname{Sin} \frac{B}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+b-c)}{\operatorname{Sin} c} \, ,$$

$$\text{c)} \quad \frac{\operatorname{Sin} \frac{A}{2} . \operatorname{Cos} \frac{B}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(a+c-b)}{\operatorname{Sin} c} \, ,$$

$$\text{d)} \quad \frac{\operatorname{Sin} \frac{B}{2} . \operatorname{Cos} \frac{A}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{C}{2}} = \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}(b+c-a)}{\operatorname{Sin} c} \, .$$

Werden die Gleichungen a) und b) einmal addirt, einmal subtrahirt und macht man dasselbe Manöver mit c) und d) bei gleichzeitiger Anwendung der bekannten goniometrischen Formeln:

$$\operatorname{Sin}(x \pm y) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y \pm \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y,$$

$$\operatorname{Cos}(x \pm y) = \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y \mp \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y,$$

$$\operatorname{Sin} x \pm \operatorname{Sin} y = 2.\operatorname{Sin}\frac{x \pm y}{2}.\operatorname{Cos}\frac{x \mp y}{2} \text{ und } \operatorname{Sin} 2x = 2 \operatorname{Sin} x.\operatorname{Cos} x;$$

so erhält man die Gauss'schen Formeln:

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Sin}\frac{c}{2}}, \qquad \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Cos}\frac{c}{2}}$$

$$\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(a+b)}{\operatorname{Cos}\frac{c}{2}}, \qquad \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}C} = \frac{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}(a-b)}{\operatorname{Sin}\frac{c}{2}}.$$

---

## Nachschrift des Herausgebers.

Da der geehrte Herr Verfasser des vorstehenden Aufsatzes auf eine so sinnreiche Weise zu den Gauss'schen Gleichungen gelangt ist, aus denen sich bekanntlich auch durch Division unmittelbar die Neper'schen Analogien ergeben, so scheint es der Vollständigkeit wegen nun auch noch zweckmässig, die Relationen zwischen den drei Winkeln und einer Seite des sphärischen Dreiecks daraus abzuleiten, was leicht auf folgende Weise geschehen kann.

Nach dem Obigen ist

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c,$$

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}\frac{1}{2}C}\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c;$$

also, wenn man quadrirt und addirt:

$$\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c + \frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = 1,$$

folglich:

$$\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A-B)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C} - \frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A-B) - \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = 1,$$

$$\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C} + \frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A-B) - \operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}\operatorname{Sin}^2\tfrac{1}{2}c = 1;$$

also:

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)},$$

$$\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c = -\frac{\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)};$$

und folglich, wie sogleich erhellet:

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B},$$

$$\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c = -\frac{\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C}{\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B}.$$

Es ist aber

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C = \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A-B)-\mathrm{Cos}^2(90^0-\tfrac{1}{2}C)$$

$$=\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-B)+\mathrm{Cos}(90^0-\tfrac{1}{2}C)\}\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A-B)-\mathrm{Cos}(90^0-\tfrac{1}{2}C)\}$$

$$= 2\,\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}\,\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}$$

$$\times 2\,\mathrm{Sin}\{45^0-\tfrac{1}{4}(B+C-A)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+C-B)\}$$

$$=\mathrm{Sin}\{90^0-\tfrac{1}{2}(B+C-A)\}\,\mathrm{Sin}\{90^0-\tfrac{1}{2}(A+C-B)\}$$

$$=\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)$$

und

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}C = \mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Cos}^2(90^0-\tfrac{1}{2}C)$$

$$=\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)+\mathrm{Cos}(90^0-\tfrac{1}{2}C)\}\{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B)-\mathrm{Cos}(90^0-\tfrac{1}{2}C)\}$$

$$= 2\,\mathrm{Cos}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\,\mathrm{Cos}\{45^0+\tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$

$$\times 2\,\mathrm{Sin}\{45^0-\tfrac{1}{4}(A+B+C)\}\,\mathrm{Sin}\{45^0+\tfrac{1}{4}(A+B-C)\}$$

$$=\mathrm{Sin}\{90^0-\tfrac{1}{2}(A+B+C)\}\,\mathrm{Sin}\{90^0+\tfrac{1}{2}(A+B-C)\}$$

$$=\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C);$$

also nach dem Obigen:

$$\mathrm{Cos}^2\tfrac{1}{2}c = \frac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(B+C-A)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+C-B)}{\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B},$$

$$\mathrm{Sin}^2\tfrac{1}{2}c = -\frac{\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B+C)\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(A+B-C)}{\mathrm{Sin}\,A\,\mathrm{Sin}\,B};$$

oder

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(B+C-A)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+C-B)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}},$$

$$\operatorname{Sin}\tfrac{1}{2}c=\sqrt{-\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B+C)\operatorname{Cos}\frac{1}{2}(A+B-C)}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}}.$$

Aus der oben gefundenen Formel

$$\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c=\frac{\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A-B)-\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}$$

folgt, weil

$$\operatorname{Cos}c=2\operatorname{Cos}^2\tfrac{1}{2}c-1$$

ist, auch

$$\operatorname{Cos}c=\frac{2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A-B)-2\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C-\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}$$

$$=\frac{\{2\operatorname{Cos}^2\frac{1}{2}(A-B)-1\}+\{1-2\operatorname{Sin}^2\frac{1}{2}C\}-\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}$$

$$=\frac{\operatorname{Cos}(A-B)+\operatorname{Cos}C-\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B},$$

also, wenn man $\operatorname{Cos}(A-B)$ entwickelt:

$$\operatorname{Cos}c=\frac{\operatorname{Cos}C+\operatorname{Cos}A\operatorname{Cos}B}{\operatorname{Sin}A\operatorname{Sin}B},$$

woraus man $\operatorname{Cos}\frac{1}{2}c$ und $\operatorname{Sin}\frac{1}{2}c$ auf bekannte Weise entwickeln kann.

Aus dem schönen Aufsatze des Herrn Unferdinger, der sich an meinen Aufsatz im Archiv. Thl. XXV. S. 225. anschliesst, und meinen vorstehenden Bemerkungen sieht man, dass sich aus der ganz in einer Ebene verzeichneten Figur Thl. XXV. Taf. III. Fig. 5. die ganze sphärische Trigonometrie mit Leichtigkeit ableiten lässt. Eine solche streng systematisch geordnete möglichst einfache Ableitung, wozu das Material vollständig in Herrn Unferdinger's und meinen Aufsätzen enthalten ist, möchte ich für zweckmässig halten und würde einem derartigen Aufsatze gern eine Stelle im Archiv einräumen. Eine solche Ableitung dürfte nützlich für den Unterricht sein, wie sie auch Herr Unferdinger nach seinen mir gütigst brieflich gemachten Mittheilungen praktisch bei'm Unterrichte schon erprobt hat. G.

# XXVIII.

# Einige Sätze über die Zahlen.

Von

Herrn Hofrath *L. Oettinger*,

Professor an der Universität zu Freiburg i. B.

---

## §. 1.

Bezeichnet man die Anzahl aller ein-, zwei-, drei- u. s. w. bis $m$stelligen Zahlen durch $A_{1,m}$, so hat man

(1) $$A_{1,m} = 10^m - 1,$$

denn die Zahlen unseres Zahlensystems sind die Versetzungen mit Wiederholungen zu den verschiedenen Classen oder Dimensionen aus den Elementen

$$0, \ 1, \ 2, \ 3, \ldots . 9,$$

d. i. aus den zehn Zahlzeichen. Alle Gruppen, worin das Zeichen 0 als Anfangselement ein oder mehrere Male wiederholt erscheint, bilden Zahlen von niederen Stellen, da die 0 in diesem Falle nicht geschrieben wird. Eine Gruppe entsteht, worin die 0 ausschliesslich vorkommt. Sie fällt aus der Reihe der Zahlen weg. Es ist daher

(2) $$A_{1,m} = P'[0, 1, 2, \ldots . 9]^m - 1 = 10^m - 1.$$

Bezeichnet man nun die Anzahl aller $m$zifferigen Zahlen durch $A_m$, so hat man hieraus

(3) $$A_m = A_{1,m} - A_{1,m-1} = 10^m - 10^{m-1} = 9.10^{m-1}.$$

## §. 2.

Dieser Satz schliesst eine Zerlegung ein, aus welcher weitere Anwendungen geschöpft werden können.

Die 0 spielt nämlich bei Bildung der Zahlen des Decimalsystems dadurch eine besondere Rolle, dass sie durch den Vorauštritt keine neue Zahl erzeugt, sondern nur durch ihr Erscheinen auf einer der nachfolgenden Stellen. Bei einer *m*zifferigen Zahl kann sie also nur auf einer der $(m-1)$ letzten Stellen in allen möglichen Zusammenstellungen und Wiederholungen erscheinen.

Zerlegt man nun die *m*zifferigen Zahlen in Rücksicht auf 0, so hat man folgende Fälle:

a) Zahlen, die keine 0 enthalten;

b) „ welche 0 einmal enthalten;

c) „ welche 0 zweimal enthalten;

. . . . . . . . . . . . . . . .

m) Zahlen, welche 0 $(m-1)$mal oder als ein $(m-1)$faches enthalten.

Tritt die 0 als Einfaches, Zweifaches, Dreifaches u. s. w. auf, so ist die Folge, dass die Classe der Versetzungen mit Wiederholungen, worin die übrigen Ziffern erscheinen, um ein, zwei, drei Einheiten u. s. w. sich verringert. Bringt man das Gesagte in Rechnung und wendet hierauf §. 41. meiner Combinationslehre an, so hat man der Reihe nach für die oben angedeuteten Fälle Folgendes:

a) $P'[1, 2, 3, \ldots . 9]^m = 9^m,$

b) $P'[1, 2, 3, \ldots . 9]^{m-1} . Z[m-1, 0]' = \frac{m-1}{1} 9^{m-1},$

c) $P'[1, 2, 3, \ldots . 9]^{m-2} Z[m-1, 0]^2 = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} 9^{m-2},$

d) $P'[1, 2, 3, \ldots . 9]^{m-3} Z[m-1, 0]^3 = \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} 9^{m-3},$

. . . . . . . . . . . . . . . .

m) $P'[1, 2, \ldots . 9]^1 Z[m-1, 0]^{m-1} = \frac{(m-1)(m-2) \ldots . 3.2.1}{1.2.3 \ldots . m-1} 9.$

Hiernach ist die Anzahl aller *m*zifferigen Zahlen mit und ohne 0:

$$(4) \qquad A_m =$$

$$9[9^{m-1} + \frac{m-1}{1} 9^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} 9^{m-3} \ldots . \frac{(m-1)(m-2) \ldots . 3.2.1}{1.2 \ldots . (m-1)}]$$

$$= 9.(9+1)^{m-1} = 9.10^{m-1},$$

wie vorhin.

## §. 3.

Aus der Zerlegung in §. 2. ergibt sich eine Methode, die Anzahl aller $m$zifferigen Zahlen zu bestimmen, die sich durch die in ihnen vorkommenden verschiedenen Zahlzeichen (nicht durch verschiedene Stellung derselben) von einander unterscheiden. Hierzu wird nur nöthig, dass man die Zahl der unter sich verschiedenen Gruppen in den unter a) bis m) aufgeführten Symbolen

$$(5)\ P'[1,2,....9]^m,\ P'[1,2,....9]^{m-1},\ P'[1,2,....9]^{m-2},$$
$$....\ P'[1,2,....9]^2,\ P'[1,2,....9]^1$$

bestimmt.

Es zeigt sich nämlich leicht, dass durch den Zutritt von 0 als Ein- oder Mehrfaches in eine Gruppenreihe die Anzahl der unter sich verschiedenen Gruppen (hier Zahlen) weder vermindert, noch vermehrt wird, sondern ganz unberührt bleibt.

Untersucht man nämlich, um dieses darzuthun, zwei verschiedene fünfzifferige Zahlen, etwa 58780 und 58760, worin die 0 einmal erscheint, so hat man

| | |
|---|---|
| 58780 | 58760 |
| 58708 | 58706 |
| 58078 | 58076 |
| 50878 | 50876. |

Die Verschiedenheit beider Zahlengruppen führt auf folgende zwei Fälle zurück:

58780 und 58760;

der Zutritt der 0 ist gleichgültig und die Verschiedenheit beider Zahlen beruht auf der Verschiedenheit der übrigen Zahlzeichen, und ist dasselbe, als wenn die zwei vierzifferigen Zahlen

5878 und 5876

unter einander hinsichtlich der Ziffern verglichen worden wären.

Dasselbe gilt von jeder andern denkbaren Zahl, und hierdurch ist der Satz gerechtfertigt, dass der Zutritt der 0 als ein Ein- oder Mehrfaches auf die Verschiedenheit der Zahlen keinen Einfluss übt und daher bei Erörterung der vorliegenden Frage nicht in Betrachtung kommt.

Hiernach fällt die Bestimmung der Anzahl aller unter sich verschiedenen $m$zifferigen Zahlen mit Bestimmung der Anzahl der

Gruppen zusammen, welche entstehen, wenn die Verbindungen mit Wiederholungen aus den neun Zahlzeichen 1, 2, 3, 4, .... 9 zur 1sten, 2ten, 3ten, .... $m$ten Classe gebildet werden.

Bezeichnet man nun die Anzahl aller unter sich verschiedenen $m$zifferigen Zahlen durch $B_m$, so erhält man aus der unter (5) angegebenen Schematisirung hierfür:

$$(6)\quad B_m = \frac{9.10....(9+m-1)}{1.2....m} + \frac{9.10....(9+m-2)}{1.2....(m-1)} + ....$$

$$.... \frac{9.10.11}{1.2.3} + \frac{9.10}{1.2} + \frac{9}{1}.$$

Diese Reihe lässt sich so umformen:

$$(7)\quad B_m = \frac{1.2....8}{1.2....8} + \frac{1.2.3....9}{1.1.2....8}$$

$$+ \frac{1.2.3.4....10}{1.2.1.2....8} + \frac{1.2.3....11}{1.2.3.1.2....8} .... \frac{1.2.3....8.9.10....(9+m-1)}{1.2.3....8.1.2....m} - 1$$

$$= [1]_8 + [2]_8 + [3]_8 + [4]_8 .... + [m+1]_8 - 1$$

$$= [m+1]_9 - 1,$$

wenn $[r]_x = \frac{r(r+1)(r+2)....(r+x-1)}{1.2.3....x}$ bedeutet.

Nun ist

$$[m+1]_9 = \frac{1.2.3....m(m+1)....(m+9)}{1.2.3....m.1.2.3....9} = \frac{10.11....(m+9)}{1.2....m}$$

$$= [10]_9.$$

Hiernach bestimmt sich die Anzahl der unter sich, durch die darin vorkommenden Ziffern verschiedenen $m$stelligen Zahlen durch folgenden einfachen Ausdruck:

$$(8)\quad B_m = \frac{(m+1)(m+2)....(m+9)}{1.2....9} - 1 = \frac{10.11.12....(m+9)}{1.2.3....m} - 1$$

$$= [m+1]_9 - 1 = [10]_m - 1;$$

die erste Form ist bequem wenn $m > 9$, die zweite wenn $m < 9$ ist. So hat man der Reihe nach für die Anzahl aller unter sich verschiedenzifferigen Zahlen in den Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern:

$$B_1 = \frac{10}{1} - 1 = 9,$$

$$B_2 = \frac{10.11}{1.2} - 1 = 54,$$

$$B_3 = \frac{10.11.12}{1.2.3} - 1 = 219,$$

$$B_4 = \frac{10.11.12.13}{1.2.3.4} - 1 = 714,$$

$$B_5 = \frac{10.11.12.13.14}{1.2.3.4.5} - 1 = 2001,$$

$$B_6 = \frac{10.11.12.13.14.15}{1.2.3.4.5.6} - 1 = 5004,$$

u. s. w., während die Anzahl aller möglichen, durch Stellung der Ziffern und dem Werthe nach verschiedenen Zahlen in den Einern, Zehnern, Hundertern, Tausendern u. s. w.

$$A_1 = 9, \quad A_2 = 90, \quad A_3 = 900, \quad A_4 = 9000, \quad A_5 = 90000$$

u. s. w. beträgt. Diese Zahlen sind sehr klein, denn unter den 9 000 000 siebenstelligen Zahlen (Millionen) befinden sich nur 11439 und unter den 9 000 000 000 000 dreizehnstelligen Zahlen (Billionen) nur 497419 Zahlen, die sich von einander durch verschiedene Ziffern unterscheiden.

## §. 4.

Mit Hülfe von (8) §. 3. lässt sich nun die Anzahl aller unter sich verschiedenen ein-, zwei-, drei- u. s. w. $m$zifferigen Zahlen auf ganz einfache Weise bestimmen. Setzt man nämlich $1, 2, 3 \ldots . m$ statt $m$ in (8) und bezeichnet die Summe dieser Zahlen durch $B_{1,m}$, so hat man:

$$B_{1,m} = [2]_9 + [3]_9 + [4]_9 + \ldots . [m+1]_9 - m$$
$$= [1]_9 + [2]_9 + [3]_9 + [4]_9 \ldots . + [m+1]_9 - (m+1),$$

und hieraus:

$$(9) \qquad B_{1,m} = [m+1]_{10} - (m+1),$$

oder da

$$[m+1]_{10} = \frac{1.2.3 \ldots . m(m+1) \ldots . (m+10)}{1.2.3 \ldots . m.1.2 \ldots . 10} = \frac{11.12.13 \ldots . (m+10)}{1.2.3 \ldots . m}$$

ist:

$$(10) \qquad B_{1,m} = [m+1]_{10} - (m+1) = [11]_m - (m+1).$$

Wendet man diesen Ausdruck auf das Zahlensystem an, so ist die Anzahl aller Zahlen, die sich durch verschiedene Ziffern von einander unterscheiden:

von 1 bis 9: $\quad B_{1,1} = \frac{11}{1} - 2 = 9,$

„ 1 „ 99: $\quad B_{1,2} = \frac{11.12}{1.2} - 3 = 63,$

„ 1 „ 999: $\quad B_{1,3} = \frac{11.12.13}{1.2.3} - 4 = 282,$

„ 1 „ 9999: $\quad B_{1,4} = \frac{11.12.13.14}{1.2.3.4} - 5 = 996,$

„ 1 „ 99999: $\quad B_{1,5} = \frac{11.12.13.14.15}{1.2.3.4.5} - 6 = 2997,$

„ 1 „ 999999: $\quad B_{1,6} = \frac{11.12 \ldots . 16}{1.2 \ldots . 6} - 7 = 8001,$

„ 1 „ 9999999: $\quad B_{1,7} = \frac{11.12 \ldots . 17}{1.2 \ldots . 7} - 8 = 19440,$

u. s. w.

Auch diese Anzahlen sind sehr klein, denn unter allen Zahlen, die 6 Stellen und weniger haben, befinden sich nur 8001, und unter allen Zahlen, die 12 Stellen und weniger haben, nur 646633 Zahlen, die sich von einander durch verschiedene Ziffern unterscheiden. Alle übrigen Zahlen werden durch Versetzung dieser Ziffern erzeugt.

## §. 5.

Die Zahlen zerfallen hinsichtlich der Art ihrer Erzeugung durch Ziffern in solche, worin einzelne Ziffern wiederholt, und in solche, worin keine Ziffer wiederholt vorkommt. Hält man diesen Unterschied fest, so fragt es sich

a) wie gross ist die Anzahl aller $m$stelligen Zahlen, worin keine Ziffer wiederholt vorkommt?

b) wie gross ist die Anzahl der $m$stelligen Zahlen, worin eine Ziffer wenigstens wiederholt (zwei oder mehrere Male) vorkommt?

Die Beantwortung der ersten Frage fällt mit der Gruppenzahl

der Versetzungen ohne Wiederholungen zusammen, wenn man die Zahlzeichen als Elemente nimmt und dabei die Natur der 0 in Rücksicht zieht.

Die Anzahl der *m*stelligen Zahlen, worin keine 0 und keine wiederholte Ziffer vorkommt, ist

$$M = P[1,\ 2,\ 3, \ldots .\ 9]^m = 9^{m|-1} = 9.8.7 \ldots .\ (9-m+1).$$

Tritt die 0 zu, so kann sie nur als Einfaches in den $(m-1)$ letzten Stellen erscheinen. Die hierdurch bedingte Zahl ist

$$N = P[1, 2, \ldots .\ 9]^{m-1} \times Z[m-1, 0]^1 = \frac{m-1}{1} 9^{m-1|-1}$$

$$= \frac{m-1}{1} 9.8 \ldots . (9-m+2).$$

Bezeichnet man nun die fragliche Anzahl durch $C_m$, so hat man:

$$(11) \quad C_m = 9^{m|-1} + \frac{m-1}{1} 9^{m-1|-1} = 9.9^{m-1|-1} = 9 \times 9.8 \ldots . (9-m+2).$$

Man sieht hieraus, dass *m* nicht grösser als 10 werden kann, wie das sein muss.

Die Anzahl aller *m*stelligen Zahlen, worin wenigstens eine Ziffer zwei oder mehrere Male wiederholt vorkommt, ist sofort:

$$(12) \qquad D_m = 9.10^{m-1} - 9.9^{m-1|-1}.$$

Hieraus folgt, dass die Menge der Zahlen, worin keine Ziffer wiederholt vorkommt, beschränkt; die Menge derjenigen aber, worin Wiederholungen vorkommen, unbeschränkt ist. Die erste Art von Zahlen reichen nur bis in die Zehntausend Millionen. Man hat hiernach der Reihe nach unter den ein-, zwei-, drei- bis zehnstelligen Zahlen folgende Mengen für Zahlen, die keine wiederholte Ziffern führen:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Anzahl | der | 1stelligen | Zahlen: | $C_1$ | $= 9$ | $= 9,$ |
| „ | „ | 2 „ | „ | $C_2$ | $= 9.9$ | $= 81,$ |
| „ | „ | 3 „ | „ | $C_3$ | $= 9.9.8$ | $= 648,$ |
| „ | „ | 4 „ | „ | $C_4$ | $= 9.9.8.7$ | $= 4536,$ |
| „ | „ | 5 „ | „ | $C_5$ | $= 9.9 \ldots .6$ | $= 27216,$ |
| „ | „ | 6 „ | „ | $C_6$ | $= 9.9 \ldots .5$ | $= 136080,$ |
| „ | „ | 7 „ | „ | $C_7$ | $= 9.9 \ldots .4$ | $= 544320,$ |
| „ | „ | 8 „ | „ | $C_8$ | $= 9.9 \ldots .3$ | $= 1632960,$ |
| „ | „ | 9 „ | „ | $C_9$ | $= 9.9 \ldots .2$ | $= 3265920,$ |
| „ | „ | 10 „ | „ | $C_{10}$ | $= 9.9 \ldots .2.1$ | $= 3265920.$ |

Es gibt also im ganzen Zahlensystem nicht mehr als 8877690 Zahlen, worin jede Ziffer nur als Einfaches oder nicht wiederholt vorkommt.

Dagegen ist die Menge der Zahlen, worin wenigstens eine Ziffer zwei- oder mehreremal wiederholt vorkommt, nach (12):

bei den 1stelligen Zahlen $D_1 = 0$,
„ „ 2 „ „ $D_2 = 9$,
„ „ 3 „ „ $D_3 = 252$,
„ „ 4 „ „ $D_4 = 4464$,
„ „ 5 „ „ $D_5 = 62784$,
„ „ 6 „ „ $D_6 = 763920$,
„ „ 7 „ „ $D_7 = 8455680$,
„ „ 8 „ „ $D_8 = 88367040$,
„ „ 9 „ „ $D_9 = 896734080$,
„ „ 10 „ „ $D_{10} = 8996734080$.

Alle späteren Zahlen (11-, 12stellige u. s. w.) enthalten wiederholte Ziffern. Die Menge der 1, 2, 3.... bis 10stelligen Zahlen, die wiederholte Ziffern führen, ist 1125mal grösser als die Menge derer, welche keine wiederholte Ziffern führen, und die Menge der erstern ist 9991122309.

## §. 6.

Ehe noch weitere Fragen über die Natur der Zahlen, worin wiederholte Ziffern vorkommen, beantwortet werden können, ist noch Einiges über die Zahlen zu bemerken, worin 0 mehreremal wiederholt vorkommt.

Die Menge der $m$stelligen Zahlen, worin 0 gerade $r$mal wiederholt, nicht mehr, nicht weniger, vorkommt, ist nach den Bemerkungen des §. 2.:

$$(13)\quad F_r = P'[1, 2, \ldots. 9]^{m-r}.\, Z[m-1, 0]^r = (m-1)_r.9^{m-r}$$

$$= \frac{(m-1)(m-2)\ldots.(m-r)}{1.2\ldots.r}9^{m-r}.$$

Hiernach kann man die Menge aller Zahlen, welche $m$ und weniger Stellen führen, angeben, worin die 0 gerade $r$mal wiederholt erscheint. Man hat zu dem Ende statt $m$ allmälig die Werthe $r+1$, $r+2$, $r+3$, .... $m$ zu setzen. Bezeichnet man diese Menge durch $F_{r,m}$, so gewinnt man:

$$(14)\quad F_{r,m} = (r)_r 9^1 + (r+1)_r 9^2 + (r+2)_r 9^3 + \ldots (m-1)_r 9^{m-r}$$
$$= [1]_r 9^1 + [2]_r 9^2 + [3]_r 9^3 \ldots [m-r]_r 9^{m-r},$$

oder wenn man No. 304. p. 167. meines Differenzialcalculs anwendet, $m-r$ statt $r$, $r$ statt $p$, $q$ statt $x$ schreibt:

$$(15)\quad F_{r,m} = \frac{9^{m-r+1}}{1.2.3\ldots r.8^{r+1}}[(m-r)^{r|1}9^r$$
$$-r.(m-r)^{r-1|1}.m.9^{r-1} + (r)_2(m-r)^{r-2|1}m^{2|-1}9^{r-2}$$
$$-(r)_3(m-r)^{r-3|1}m^{3|-1}9^{r-3}\ldots(-)^r(r)_r m^{r|-1}](-)^{r+1}(r)_r\frac{9}{8^{r+1}}.$$

Die erste Darstellung wird anwendbar sein, wenn $r$ eine grosse Zahl und $(m-r)$ nicht gross ist, die zweite, wenn $(m-r)$ gross und $r$ nicht gross ist.

Die Menge aller sechsstelligen Zahlen, worin 0 gerade dreimal wiederholt erscheint, ist sofort aus (13):

$$F_3 = \frac{5.4.3}{1.2.3}.9^3 = 7290.$$

Die Menge aller Zahlen, welche sechs Stellen und weniger führen und worin die 0 gerade dreimal wiederholt erscheint, ist aus (14):

$$F_{3,6} = [1]_3 9 + [2]_3 9^2 + [3]_3 9^3 = 7623.$$

Die Menge aller Zahlen, welche zehn Stellen und weniger haben und worin die 0 gerade dreimal wiederholt erscheint, ist aus (14) und (15):

$$F_{3,10} = [1]_3 9 + [2]_3 9^2 + [3]_3 9^3 + \ldots [7]_3 9^7$$
$$= \frac{9^8}{1.2.3.8^4}[7.8.9.9^3 - 3.7.8.10.9 + 3.7.10.9.9 - 10.9.8] + \frac{9}{8^4} = 433735650.$$

## §. 7.

Da jede Ziffer in den einzelnen Zahlen wiederholt vorkommen kann, so entsteht die Frage:

**Wie gross ist die Anzahl der $m$stelligen Zahlen, worin eine Ziffer gerade $n$mal, eine zweite gerade $p$mal, eine dritte gerade $q$mal wiederholt u. s. f. erscheint?**

Bezeichnet man die $x$fache Wiederholung einer Ziffer durch

das Symbol $e^s$ und die fragliche Anzahl durch $A(e^n, e^p, e^q \ldots)$, so hat man zur Beantwortung dieser Frage zwischen Zahlen, die keine 0, und solchen, die 0 enthalten, zu unterscheiden. Im ersten Falle kommen 9, im zweiten 10 Elemente in Betrachtung, das Letztere jedoch in der Weise, dass die 0 nicht auf der ersten Stelle erscheinen kann. Hier kommen die Gesetze des 5. und 7. Abschnittes meiner Combinations-Lehre in Betrachtung, womit auch eine Abhandlung in diesem Archiv (XV. Bd. 3. Hft. S. 261. §. 7.) zu vergleichen ist, und man hat zu bestimmen, wie viele Versetzungen die in einer Zahl vorkommenden gleichen und ungleichen Ziffern unter einander eingehen können.

Bei Zahlen, welche keine 0 enthalten, wird diese Menge durch den Ausdruck:

$$(16)\qquad A(e^n, e^p, e^q \ldots) = \frac{1^{n+p+q \ldots|1}}{1^{n|1}.1^{p|1}.1^{q|1} \ldots} \times 9^{x|-1}$$

bestimmt. $x$ enthält hier so viele Einheiten, als Exponenten auftreten. Man findet also $x$, wenn man die vorkommenden Exponenten selbst als Einheiten betrachtet und in eine Summe vereinigt. Kommt in (16) ein oder mehrere Exponenten wiederholt vor, so wird das Verfahren in Nichts geändert und jede Wiederholung auch als Einheit gezählt. Dabei ist jedoch zu bemerken, dass in diesem Falle die Fakultät $9^{x|-1}$ durch die Fakultät 1 in der so vielten Dimension getheilt werden muss, als derselbe Exponent wiederholt erscheint. Hiernach wird sein:

$$(17)\quad \left\{ \begin{aligned} A(e^n, e^n, e^n, e^p, e^q \ldots) &= \frac{1^{3n+p+q \ldots|1}}{1^{n|1}.1^{n|1}.1^{n|1}.1^{p|1} \ldots} \times \frac{9^{x|-1}}{1^{3|1}}, \\ A(e^n, e^n, e^p, e^p, e^q \ldots) &= \frac{1^{2n+2p+q \ldots|1}}{1^{n|1}.1^{n|1}.1^{p|1}.1^{p|1} \ldots} \times \frac{9^{x|-1}}{1^{2|1}.1^{2|1}}, \end{aligned} \right.$$

u. s. w.

Tritt nun die 0 als Ziffer in die fraglichen Zahlen ein, so muss der Ausdruck (16) für jeden Exponenten $n$, $p$, $q$ in Beziehung auf 0 besonders in Rechnung gezogen werden. Hiernach hat man für die 0 als $n$faches:

$$(18)\quad A(e^p, e^q, e^r \ldots 0^n) = \frac{1^{p+q+r \ldots|1}}{1^{p|1}1^{q|1}1^{r|1} \ldots} . 9^{x|-1} . \frac{(n+p+q \ldots -1)^{n|-1}}{1^{n|1}},$$

für die 0 als $r$faches:

$$(19)\qquad A(e^n, e^p, e^q \ldots 0^r) = \frac{1^{n+p+q \ldots|1}}{1^{n|1}.1^{p|1}.1^{q|1}} \times 9^{x|-1} \frac{(n+p+q \ldots -1)^{r|-1}}{1^{r|1}}$$

u. s. w. Dasselbe gilt für den Ausdruck (17).

Bei der Werthbestimmung von $x$ in (18) und (19) darf der Exponent der 0 als Einfaches nicht gezählt werden, denn sie tritt in diesem Falle für sich als ein besonderes Element in den Calcul. Kommen gleiche Exponenten vor, so tritt 0 nach der Natur der Aufgabe nur für einen von ihnen ein. Im Uebrigen bleibt die Behandlung unverändert.

Das Gesagte wird sich in Beantwortung der Frage: Wie gross ist die Anzahl der sechsstelligen Zahlen, worin eine Ziffer gerade dreimal, eine zweite zweimal, eine dritte einmal erscheint? verdeutlichen.

Hier sind folgende Fälle möglich:

a) die Zahlen führen keine 0. Es ist $n=3$, $p=2$, $q=1$, $x=1+1+1=3$, und man erhält:

$$A(e^3, e^2, e^1) = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2.1}.9.8.7 = 30240.$$

b) Die 0 erscheint als Dreifaches. Es ist $x=1+1=2$, $n=3$, $p=2$, $q=1$, und es entsteht aus (18):

$$A(e^2, e^1, 0^3) = \frac{3.2.1}{1.2.1}.9.8\,\frac{5.4.3}{1.2.3} = 2160.$$

c) Die 0 erscheint als Zweifaches:

$$A(e^3, e^1, 0^2) = \frac{4.3.2.1}{1.2.3.1}.9.8\,\frac{5.4}{1.2} = 2880.$$

d) Die 0 erscheint als Einfaches:

$$A(e^3, e^2, 0^1) = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.1.2}.9.8 \times \frac{5}{1} = 3600.$$

Hiernach ist die Anzahl aller sechsstelligen Zahlen, welche den oben genannten Bedingungen genügen:

$$A = 30240 + 2160 + 2880 + 3600 = 38880.$$

Wie gross ist die Menge aller sechsstelligen Zahlen, worin zwei verschiedene Ziffern gerade je zweimal und zwei andere gerade je einmal vorkommen?

Hier hat man

a) ohne 0, $n=2$, $p=2$, $q=1$, $r=1$, $x=1+1+1+1=4$, und es wird:

$$A(e^2, e^2, e^1, e^1) = \frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.1.2.1.1} \times \frac{9.8.7.6}{1.2.1.2} = 136080;$$

b) mit der 0 (als Zweifaches und Einfaches):

$$A(e^2, e^1, e^1, 0^2) = \frac{4.3.2.1}{1.2.1.1} \times \frac{9.8.7}{1.2} \times \frac{5.4}{1.2} = 30240,$$

$$A(e^2, e^2, e^1, 0^1) = \frac{5.4.3.2.1}{1.2.1.2.1} \times \frac{9.8.7}{1.2} \cdot \frac{5}{1} = 37800;$$

die gesuchte Anzahl ist

$$A = 204120.$$

§. 8.

In §. 7. wurden die Zahlen betrachtet, insoferne die darin vorkommenden Ziffern alle möglichen Stellungen unter einander einnehmen. Schliesst man nun die unter sich möglichen Versetzungen aus und betrachtet die Zahlen nur insoferne, als sie sich durch die darin vorkommenden Ziffern von einander unterscheiden, so wird man zu folgender Frage geführt:

Wie gross ist die Anzahl aller *m*stelligen Zahlen, worin eine Ziffer *n*mal, eine zweite *p*mal, eine dritte *q*mal vorkommt, u. s. w., die sich durch Verschiedenheit der in ihnen vorkommenden Ziffern unterscheiden?

Die fragliche Anzahl wird ganz auf die in §. 7. angegebene Weise ermittelt, jedoch mit dem Unterschiede, dass in den Ausdrücken (16) bis (19) §. 7. die Vorzahlen, welche durch die Versetzungen und Zerstreuungen bedingt werden, wegfallen. Hiernach ist für Zahlen, worin 0 nicht erscheint:

$$(20) \quad B(e^n, e^p, e^q \ldots) = 9^{x|-1} = 9.8.7 \ldots (9-x+1),$$

$$(21) \quad B(e^n, e^n, e^n, e^p \ldots) = \frac{9^{x|-1}}{1^{3|1}} = \frac{9.8.7 \ldots (9-x+1)}{1.2.3},$$

u. s. w. Für Zahlen, worin 0 als *n*-, *r*faches u. s. w. erscheint:

$$(22) \quad B(e^p, e^q \ldots 0^n) = 9^{x|-1},$$

$$(23) \quad B(e^n, e^p \ldots 0^r) = 9^{x|-1},$$

u. s. w. Die Werthbestimmung von $x$ unterliegt den oben angegebenen Bedingungen.

Hiernach ist die Menge der sechsstelligen Zahlen, worin eine Ziffer gerade dreimal, eine zweite zweimal, eine dritte einmal erscheint, und die sich durch die vorkommenden Ziffern unterscheiden:

$$B = B(e^3, e^2, e^1) + B(e^2, e^1, 0^3) + B(e^3, e^1, 0^2) + B(e^3, e^2, 0^1)$$
$$= 9.8.7 + 9.8 + 9.8 + 9.8 = 720.$$

Die Menge aller sechsstelligen Zahlen, worin zwei verschiedene Ziffern je zweimal und zwei andere je einmal erscheinen und die sich durch die vorkommenden Ziffern unterscheiden:

$$B = B(e^2, e^2, e^1, e^1) + B(e^2, e^1, e^1, 0^2) + B(e^2, e^2, e^1, 0^1)$$
$$= \frac{9.8.7.6}{1.2.1.2} + \frac{9.8.7}{1.2} + \frac{9.8.7}{1.2} = 1260,$$

während die Anzahl der hierdurch bedingten wirklich vorkommenden Zahlen im ersten Falle 38880 und im zweiten Falle 204120 beträgt. Man sieht, mit welch geringen Mitteln eine ungewöhnlich grosse Wirkung im Zahlensystem hervorgebracht wird.

Die Anzahl aller sechsstelligen Zahlen, worin unter diesen Bedingungen sechs verschiedene Ziffern (als einfache) vorkommen, ist sofort:

$$B = \frac{9.8....5.4}{1.2....6} + \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5} = 210.$$

Für den speciellen Fall, wenn die Menge aller $m$stelligen Zahlen, worin lauter verschiedene Ziffern als einfache vorkommen, bestimmt werden soll, hat man:

$$B = (10)_m = \frac{10.9.8....(10-m+1)}{1.2.3....m}.$$

## §. 9.

Die in §. 7. und §. 8. gefundenen Sätze können zu weiteren Anwendungen benutzt werden:

a) man soll die Menge aller $m$stelligen Zahlen bestimmen, worin irgend eine Ziffer wenigstens $r$mal wiederholt erscheint;

b) man soll die Menge aller $m$stelligen Zahlen bestimmen, die sich durch verschiedene Ziffern unterscheiden und worin eine Ziffer wenigstens $r$mal wiederholt erscheint.

Um diese Fragen zu beantworten, hat man die Exponenten der nachstehenden Symbole

$$A(e^r, e^n, e^p \ldots.), \quad A(e^{r+1}, e^n, e^p \ldots.), \quad A(e^{r+2}, e^n, e^p \ldots.),$$
$$A(e^{r+3}, e^n, e^p \ldots.) \ldots. A(e^{m-1}, e^1), \quad A(e^m)$$

und

$$B(e^r, e^n, e^p \ldots.), \quad B(e^{r+1}, e^n, e^p \ldots.), \quad B(e^{r+2}, e^n, e^p \ldots.) \ldots.$$
$$\ldots. B(e^{m-1}, e^1), \quad B(e^m)$$

so zu behandeln, dass jede Exponentensumme für sich die Zahl $m$ in den verschiedenen Classen erzeugt oder, was dasselbe ist, die Verbindungen mit Wiederholungen zur Summe $m$ aus den entsprechenden Classen zu bilden und dann die einzelnen Symbole nach (16)—(19), §. 7., und (20) — (23), §. 8., zu untersuchen.

Soll hiernach die Menge aller möglichen **sechsstelligen** Zahlen bestimmt werden, worin eine Ziffer wenigstens dreimal wiederholt erscheint, so hat man folgende Symbole:

$$A(e^3, e^2, e^1), \quad A(e^3, e^3), \quad A(e^3, e^1, e^1, e^1), \quad A(e^4, e^2), \quad A(e^4, e^1, e^1),$$
$$A(e^5, e^1), \quad A(e^6)$$

nach (16) — (19), §. 7. zu behandeln. Aus dem ersten Ausdrucke ergibt sich, wie in §. 7. gezeigt wurde, folgende Menge:

$$A_1 = A(e^3, e^2, e^1) + A(e^3, e^2, 0^1) + A(e^3, e^1, 0^2) + A(e^2, e^1, 0^3) = 38880.$$

Aus den folgenden entstehen der Reihe nach folgende Mengen:

$$A_2 = A(e^3, e^3) + A(e^3, 0^3) = \frac{6^{5|-1}}{1^{3|1}\,1^{3|1}} \cdot \frac{9.8}{1.2} + \frac{3.2.1}{1.2.3} \cdot 9 \cdot \frac{5.4.3}{1.23} = 810,$$

$$A_3 = A(e^3, e^1, e^1, e^1) + A(e^3, e^1, e^1, 0^1) + A(e^1, e^1, e^1, 0^3)$$
$$= \frac{6^{6|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{9.8.7.6}{1.2.3} + \frac{5^{5|-1}}{1^{3|1}} \cdot \frac{9.8.7}{1.2} . 5 + 3.2.1 \cdot \frac{9.8.7}{1.2.3} \cdot \frac{5.4.3}{1.2.3}$$
$$= 60480 + 25200 + 5040 = 90720,$$

$$A_4 = A(e^4, e^2) + A(e^4, 0^2) + A(e^2, 0^4) = \frac{6^{6|-1}}{1^{2|1}\,1^{4|1}} . 9.8 + 9 . \frac{5.4}{1.2} + 9 . \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}$$
$$= 1080 + 90 + 45 = 1215,$$

$$A_5 = A(e^4, e^1, e^1) + A(e^4, e^1, 0^1) + A(e^1, e^1, 0^4) = \frac{6^{6|-1}}{1^{4|1}} \cdot \frac{9.8.7}{1.2}$$
$$+ \frac{5^{5|-1}}{1^{4|1}} . 9.8.5 + 2 . \frac{9.8}{1.2} \cdot \frac{5}{1} = 7560 + 1800 + 360 = 9720,$$

$$A_6 = A(e^5, e^1) + A(e^5, 0^1) + A(e^1, 0^5) = \frac{6^{6|-1}}{1^{5|1}}.9.8 + \frac{5^{5|-1}}{1^{5|1}}.5.9 + 9$$
$$= 432 + 45 + 9 = 486,$$

$$A_7 = A(e^6) = \frac{6^{6|-1}}{1^{6|1}}.9 = 9;$$

die gesuchte Anzahl ist hiernach:

$$A = 141840.$$

Untersucht man nun dieselben Symbole nach (20) — (23), §. 8., so erhält man die Menge aller sechsstelligen Zahlen, die sich durch verschiedene Ziffern unterscheiden und worin eine Ziffer wenigstens dreimal wiederholt enthalten. Es entsteht der Reihe nach

$$B_1 = B(e^3, e^2, e^1) + B(e^3, e^2, 0^1) + B(e^3, e^1, 0^2) + B(e^2, e^1, 0^3)$$
$$= 9.8.7 + 9.8 + 9.8 + 9.8 = 720,$$

$$B_2 = B(e^3, e^3) + B(e^3, 0^3) = \frac{9.8}{1.2} + 9 = 45,$$

$$B_3 = B(e^3, e^1, e^1, e^1) + B(e^3, e^1, e^1, 0^1) + B(e^1, e^1, e^1, 0^3)$$
$$= \frac{9.8.7.6}{1.2.3} + \frac{9.8.7}{1.2} + \frac{9.8.7}{1.2.3} = 840,$$

$$B_4 = B(e^4, e^2) + B(e^4, 0^2) + B(e^2, 0^4) = 9.8 + 9 + 9 = 90,$$

$$B_5 = B(e^4, e^1, e^1) + B(e^4, e^1, 0^1) + B(e^1, e^1, 0^4) = \frac{9.8.7}{1.2} + 9.8 + \frac{9.8}{1.2} = 360,$$

$$B_6 = B(e^5, e^1) + B(e^5, 0^1) + B(e^1, 0^5) = 9.8 + 9 + 9 = 90,$$

$$B_7 = B(e^6) = 9;$$

die fragliche Anzahl ist hiernach

$$B = 2154.$$

## §. 10.

Einfacher als in §. 9. geschah, lassen sich die gesuchten Anzahlen finden, wenn man die in §. 2. und §. 3. aufgestellte Zerlegungsweise anwendet.

Um die unter a) §. 9. gestellte Aufgabe zu lösen, hat man alle Glieder des in §. 2. gegebenen Schemas in Calcul zu ziehen, worin 0 in der $r$ten und in einer höheren Dimension vorkommt. Diess führt zu folgender Darstellung:

$$(24)\qquad M=(m-1)_r 9^{m-r}+(m-1)_{r+1}9^{m-r-1}$$
$$+(m-1)_{r+2}9^{m-r-2}+\ldots.(m-1)_{m-1}9^1.$$

Ausserdem müssen noch folgende Ausdrücke:

$$P'(1,2,\ldots.9)^m,\quad P'(1,2,\ldots.9)^{m-1}Z[m-1,0^1]^1,$$
$$P'(1,2,\ldots.9)^{m-1}Z[m-1,0^2]^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P'(1,2,\ldots.9)^{m-r+1}Z[m-1,0^{r-1}]^{r-1},$$

oder vielmehr die Ausdrücke:

$$P'(1,2,\ldots.9)^m,\ P'(1,2,\ldots.9)^{m-1},\ P'(1,2,\ldots9)^{m-2}\ldots.P'(1,2,\ldots9)^{m-r+1}$$

in so weit untersucht werden, als in denselben eine Ziffer wenigstens $r$mal vorkommt und die hieraus fliessenden Gruppenzahlen der Reihe nach mit 1, $(m-1)_1$, $(m-1)_2$, $(m-1)_3\ldots.(m-1)_{r-1}$ vervielfacht werden.

Diess kann durch folgende Formel geschehen, die ich in diesem Archiv (XV. Theil. S. 296.) entwickelt habe:

$$(25)\qquad {}'P[1^r,2^r,3^r\ldots.9^r]^q=9.\Sigma_0^x[r]_x 8^x.9^{q-r-x}$$
$$-9.8\Sigma_0^y[r]_y.7^y(\Sigma_0^x[r]_{r+x+y}8^x.9^{q-2r-y-x})$$
$$+9.8.7\Sigma_0^z[r]_z 6^z(\Sigma_0^y[r]_{r+z+y}8^y(\Sigma_0^x[r]_{2r+z+y+x}.8^x.9^{q-3r-z-y-x})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Hierin ist $r$ zu belassen und statt $q$ allmälig $m-r+1$, $m-r+2,\ldots.m$ zu setzen. Die Exponenten von $x$ im ersten Gliede, von $x$ und $y$ im zweiten Gliede, von $x$, $y$, $z$ im dritten Gliede u. s. f. bilden die Gruppen der Versetzungen mit Wiederholungen aus den Elementen 0, 1, 2, .... $q-r$ zur ersten Classe im ersten Gliede, aus den Elementen 0, 1, 2, .... $q-2r$ zur zweiten Classe im zweiten Gliede, aus den Elementen 0, 1, 2, .... $q-3r$ zur dritten Classe im dritten Gliede u. s. w. Die Reihe bricht ab, wenn der Exponent von 9 negativ werden sollte.

Bestimmt man hiernach die Anzahl der sechsstelligen Zahlen, worin eine Ziffer wenigstens dreimal vorkommt, so hat man aus (24) für $m=6$ und $r=3$:

$$M=\frac{5.4.3}{1.2.3}9^3+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}9^2+\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}9=7290+405+9=7704.$$

Aus (25), wenn man der Reihe nach $q=4, 5, 6$, dann $r=3$ und für $x$ und $y$ die oben angegebenen Werthe setzt:

$$'P[1^3, 2^3, \ldots. 9^3]^4.\frac{5.4}{1.2}=10(9.9+9.3.8)=2970,$$

$$'P[1^3, 2^3, \ldots. 9^3]^5.\frac{5}{1}=5.(9.9^2+9.3.8.9+9.6.8^2]=30645,$$

$$'P[1^3, 2^3, \ldots. 9^3]^6=9^4+9.3.8.9^2+9.6.8^2.9+9.10.8^3-9.8.\frac{3.4.5}{1.2.3}$$
$$=100521.$$

Hiernach ist die fragliche Anzahl

$$A=7704+2970+30645+100521=141840,$$

wie oben §. 9. angegeben wurde.

Untersucht man nach dieser Methode die Zahlen, die einer bestimmten Classe zugehören, z. B. die **siebenstelligen** Zahlen, so erhält man Folgendes:

Die Anzahl aller siebenstelligen Zahlen, worin eine Ziffer wenigstens **zweimal** erscheint, ist nach §. 5.

$$D_{7,2}=8455680;$$

die Anzahl aller siebenstelligen Zahlen, worin eine Ziffer wenigstens dreimal wiederholt erscheint, ist nach (24) und (25) für $m=7$, $r=3$:

$$M=(6)_3 9^4+(6)_4 9^3+(6)_5 9^2+(6)_6 9=142650,$$

$$A_1=\frac{6.5}{1.2}{}'P[1^3, 2^3, \ldots. 9^3]^5=15[9.9^2+9.3.8.9+9.6.8^2]=91935,$$

$$A_2=\frac{6}{1}{}'P[1^3, 2^3, \ldots. 9^3]^6=6[9.9^3+9.3.8.9^2+9.6.8^2.9+9.10.8^3-9.8.10]$$
$$=603126,$$

$$A_3={}'P[1^3, 2^3, \ldots. 9^3]^7=9.9^4+9.3.8.9^3+9.6.8^2.9^2+9.10.8^3.9$$
$$+9.15.8^4-9.8.[10.9+15.8+3.7.15]$$
$$=1426329,$$

$$D_{7,3}=2264040.$$

Die Anzahl aller siebenzifferigen Zahlen, worin eine Ziffer wenigstens viermal erscheint, ist aus (24) und (25) für $m=7$, $r=3$:

$$M=(6)_4 9^3+(6)_5 9^2+(6)_6 9=11430,$$

$$A_1=\frac{6.5.4}{1.2.3}{}'P[1^4, 2^4, \ldots. 9^4]^4=20.9=180,$$

$$A_2=\frac{6.5}{1.2}{}'P[1^4, 2^4, \ldots. 9^4]^5=15[9.9+9.4.8]=5535,$$

$$A_3=\frac{6}{1}{}'P[1^4, 2^4, \ldots. 9^4]^6=6[9.9^2+9.4.8.9+9.10.8^2]=54486,$$

$$A_4={}'P[1^4, 2^4, \ldots. 9^4]^7=9.9^3+9.4.8.9^2+9.10.8^2.9+9.20.8^3$$
$$=173889,$$

$$D_{7,4}=245520.$$

Die Anzahl aller siebenstelligen Zahlen, worin eine Ziffer wenigstens fünfmal erscheint, ist für $m=7$, $r=5$:

$$M=(6)_5 9^2+(6)_6 .9=495,$$

$$A_1=\frac{6.5}{1.2}{}'P[1^5, 2^5, \ldots. 9^5]^5=15.9=135,$$

$$A_2=6.{}'P[1^5, 2^5, \ldots. 9^5]^6=6[9.9+9.5.8]=2646,$$

$$A_3={}'P[1^5, 2^5, \ldots. 9^5]^7=9.9^2+9.5.8.9+9.15.8^2=12609,$$

$$D_{7,5}=15885.$$

Die Anzahl aller siebenstelligen Zahlen, worin eine Ziffer wenigstens sechsmal erscheint, ist:

$$M=(6)_6 .9=9,$$

$$A_1=6.{}'P[1^6, 2^6, \ldots. 9^6]^6=6.9=54,$$

$$A_2={}'P[1^6, 2^6, \ldots. 9^6]^7=9.9+9.6.8=513,$$

$$D_{7,6}=576.$$

Die Anzahl aller siebenstelligen Zahlen, worin eine Ziffer siebenmal wiederholt erscheint, ist

$$D_{7,7}=9.$$

Hieraus bestimmen sich nun die Anzahlen aller siebenstelligen Ziffern, worin eine Ziffer gerade ein-, zwei-, drei-,.... siebenmal erscheint (nicht mehr, nicht weniger), und man erhält:

$E_1 = 544320,$

$E_2 = D_{7,2} - D_{7,3} = 8455680 - 2264040 = 6191640,$

$E_3 = D_{7,3} - D_{7,4} = 2264040 - 245520 = 2018520,$

$E_4 = D_{7,4} - D_{7,5} = 245520 - 15885 = 229635,$

$E_5 = D_{7,5} - D_{7,6} = 15885 - 576 = 15309,$

$E_6 = D_{7,6} - D_{7,7} = 576 - 9 = 576,$

$E_7 = D_{7,7} - 0 = 9 - 0 = 9.$

Die Summe sämmtlicher Anzahlen gibt

$$S = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots. + E_7 = 9000000,$$

wie diess sein muss, und es bestätigt sich hierdurch die Richtigkeit der gemachten Schlüsse.

## §. 11.

Um die unter b) §. 9. gestellte Aufgabe zu lösen, hat man, da die 0 als r- und Mehrfaches keine neue Gruppen zuführt, die Symbole

$$P'(1, 2, \ldots. 9)^{m-r}, \quad P'(1, 2, \ldots. 9)^{m-r-1}, \ldots. P'(1, 2, \ldots. 9)^1$$

nach §. 3. und §. 4. in Bezug auf die darin vorkommenden verschiedenen Ziffern zu untersuchen. Man erhält, wenn man $m-r$ statt $m$ in (7) setzt:

$$(26) \qquad B_{m-r} = [m-r+1]_9 - 1 = [10]_{m-r} - 1.$$

Ferner hat man die Symbole

$$P'(1, 2, \ldots. 9)^m, \; P'(1, 2, \ldots. 9)^{m-1}, \; P'(1, 2, \ldots. 9)^{m-2} \ldots.$$
$$\ldots. P'(1, 2, \ldots. 9)^{m-r+1}$$

auf die unter sich verschiedenen Gruppen, worin irgend ein Element wenigstens $r$mal wiederholt erscheint, zu untersuchen.

Diess geschieht durch die in diesem Archive (XV. Theil. S. 287.) angegebene Formel, und man hat:

$$(27) \quad {}'C[1^r, 2^r, 3^r, \ldots. 9^r]^q = [9]_{q-r+1} + [q-r]_1 [8]_{q-r+1}$$
$$- [q-2r+1]_1 [8]_{q-2r+2} - [q-2r]_2 [7]_{q-2r+2}$$
$$+ [q-3r+1]_2 [7]_{q-3r+3} + [q-3r]_3 [6]_{q-3r+3}$$

. . . . . . . . . .

Hierin hat man bei der Anwendung $r$ zu belassen und statt $q$ die Werthe $m-r+1$, $m-r+2$, $m-r+3 \ldots m$ zu setzen.

Soll die Anzahl der sechsstelligen Zahlen bestimmt werden, welche sich durch verschiedene Ziffern unterscheiden und worin eine Ziffer wenigstens dreimal erscheint, so hat man $m=6$ und $r=3$ zu setzen, und erhält aus (26):

$$B_3 = \frac{10.11.12}{1.2.3} - 1 = 219.$$

Aus (27) entsteht, wenn man $r=3$ und folglich $q=4, 5, 6$ schreibt:

$$A_1 = {}'C[1^3, 2^3, \ldots 9^3]^4 = \frac{9.10}{1.2} + \frac{8.9}{1.2} = 81,$$

$$A_2 = {}'C[1^3, 2^3, \ldots 9^3]^5 = \frac{9.10.11}{1.2.3} + 2.\frac{8.9.10}{1.2.3} = 405,$$

$$A_3 = {}'C[1^3, 2^3, \ldots 9^3]^6 = \frac{9.10.11.12}{1.2.3.4} + 3.\frac{8.9.10.11}{1.2.3.4} - 1.\frac{8.9}{1.2} = 1449.$$

Die gesuchte Anzahl ist

$$B_{6,3} = 2154.$$

Untersucht man auch hier nach dieser Methode die Zahlen, welche einer bestimmten Classe zugehören, z. B. die siebenstelligen, so erhält man für die Anzahl der unter sich verschiedenen Zahlen, worin eine Ziffer siebenmal vorkommt ($q=7$, $r=7$):

$$B_{7,7} = {}'C[1^7, 2^7, \ldots 9^7]^7 = 9;$$

worin eine Ziffer wenigstens sechsmal erscheint ($m=7$, $q=6, 7$ und $r=6$), aus (26) und (27):

$$B = \frac{10}{1} - 1 = 9,$$

$$A_1 = {}'C[1^6, 2^6, \ldots 9^6]^6 = \frac{9}{1} = 9,$$

$$A_2 = {}'C[1^6, 2^6, \ldots 9^6]^7 = \frac{9.10}{1.2} + 1.\frac{8.9}{1.2} = 81,$$

$$B_{7,6} = 99;$$

worin eine Ziffer wenigstens fünfmal wiederholt erscheint ($m=7$, $r=5$, $q=5, 6, 7$):

$$B=\frac{10.11}{1.2}-1=54,$$

$$A_1='C[1^5, 2^5, \ldots. 9^5]^5=9,$$

$$A_2='C[1^5, 2^5, \ldots. 9^5]^6=\frac{9.10}{1.2}+\frac{8.9}{1.2}=81,$$

$$A_3='C[1^5, 2^5, \ldots. 9^5]^7=\frac{9.10.11}{1.2.3}+2.\frac{8.9.10}{1.2.3}=405,$$

$$B_{7,5}=549.$$

Fährt man auf diese Weise fort, so erhält man:

$$B_{7,4}=219+9+81+405+1485=2199,$$
$$B_{7,3}=714+405+1449+4131=6699,$$
$$B_{7,2}=2001+2919+6399=11319,$$
$$B_{7,1}=11439.$$

Hieraus ergeben sich die Anzahlen aller siebenstelligen Zahlen, worin eine Ziffer gerade sieben-, sechs-, fünf-, .... einmal erscheint und die sich durch verschiedene Ziffern unterscheiden. Sie sind

$$G_7=9,$$
$$G_6=B_{7,6}-B_{7,7}=90,$$
$$G_5=B_{7,5}-B_{7,6}=450,$$
$$G_4=B_{7,4}-B_{7,5}=1650,$$
$$G_3=B_{7,3}-B_{7,4}=4500,$$
$$G_2=B_{7,2}-B_{7,3}=4620,$$
$$G_1=B_{7,1}-B_{7,2}=120.$$

Ihre Summe ist 11439, wie diess sein muss.

## §. 12.

Die unter b) §. 9. aufgestellte Aufgabe kann noch auf eine einfachere und folgende Weise gelöst werden.

Bemerkt man nämlich, dass bei Darstellung der Gruppen der Verbindungen mit und ohne Wiederholungen die Anordnung der Elemente bei der Anschrift keinen Einfluss auf die Gruppen und ihre Anzahl übt und dass sofort

$C'(a_1, a_2, \ldots a_n)^m = C'(a_2, a_3, \ldots a_n, a_1)^m \ldots = C'(a_n, a_{n-1}, \ldots a_2, a_1)^m$
ist, weil immer dieselben Gruppen nur mit anderer Anordnung der Elemente herausfliessen, so kann man diese Bemerkung auf die zehn Zahlzeichen anwenden und folgende Anordnung:

$$C'(1, 2, 3, \ldots 9, 0)^m$$

wählen.

Werden nun unter der verstehenden Elementenanordnung die Gruppen (hier $m$stellige Zahlen, die sich durch verschiedene Ziffern unterscheiden) gebildet, so entstehen alle möglichen Gruppen mit Wiederholungen, von denen nur eine, nämlich diejenige, welche 0 in der $m$ten Dimension führt, als nicht zulässig auszuschliessen ist. Hiernach hat man die Gleichung:

$$(28) \qquad C'[1, 2, 3, \ldots 9, 0]^m = [10]_m - 1,$$

welche schon oben, (8) §. 3., auf anderem Wege aufgefunden wurde und die Menge der $m$stelligen Zahlen angibt, die sich durch verschiedene Ziffern unterscheiden.

Wendet man nun das Gesagte auf Bestimmung der Anzahl aller $m$stelligen Zahlen an, die sich durch verschiedene Ziffern unterscheiden und worin eine Ziffer wenigstens $r$mal wiederholt erscheint, so leitet sich aus der in diesem Archiv (XV. Theil. S. 287.) angegebenen Formel folgende ab:

$$(29) \quad 'C[1^r, 2^r, 3^r, \ldots 9^r, 0^r]^m = [10]_{m-r+1} + [m-r][9]_{m-r+1} - 1$$
$$- [m-2r+1][9]_{m-2r+2} - [m-2r]_2 [8]_{m-2r+2}$$
$$+ [m-3r+1]_2 [8]_{m-3r+3} + [m-3r]_3 [7]_{m-3r+3}$$

. . . . . . . . . . .

Für $r=1$ geht (29) in (28) über, wie diess sein muss.

Bestimmt man nun aus (29) die im vorigen Paragraphen genannten Mengen der siebenstelligen Zahlen, die sich durch verschiedene Ziffern unterscheiden und worin eine Ziffer wenigstens einmal, zweimal, .... siebenmal vorkommt, so ist:

$B_{7,1} = 'C[1^1, 2^1, \ldots 9^1, 0^1]^7 = [10]_7 - 1 = 11439,$
$B_{7,2} = 'C[1^2, 2^2, \ldots 9^2, 0^2]^7 = [10]_6 + 5[9]_6 - 4[9]_5 - 6[8]_5$
$\qquad + 3[8]_4 + 1.[7]_4 - 1 = 11319,$
$B_{7,3} = 'C[1^3, 2^3, \ldots 9^3, 0^3]^7 = [10]_5 + 4[9]_5 - 2[9]_3 - [8]_3 - 1 = 6699,$
$B_{7,4} = 'C[1^4, 2^4, \ldots 9^4, 0^4]^7 = [10]_4 + 3[9]_4 - 1 = 2199,$
$B_{7,5} = 'C[1^5, 2^5, \ldots 9^5, 0^5]^7 = [10]_3 + 2[9]_3 - 1 = 549,$
$B_{7,6} = 'C[1^6, 2^6, \ldots 9^6, 0^6]^7 = [10]_2 + 1[9]_2 - 1 = 99,$
$B_{7,7} = 'C[1^7, 2^7, \ldots 9^7, 0^7]^7 = 10 - 1 = 9.$

Es sind dieselben Mengen, die in §. 11. gefunden wurden.

Die in §. 9. angegebene Methode wurde schon im XV. Bande des Archivs mitgetheilt und ist hier nur der Vollständigkeit wegen aufgenommen worden.

Mit den hier angegebenen Sätzen lassen sich nun auch die Mengen der *m*stelligen Zahlen angeben, worin eine Ziffer höchstens *r*mal wiederholt erscheint.

Die hier aufgeführten Gesetze finden unmittelbar ihre Anwendung auf Decimalbrüche, denn die Einreihung der 0 geschieht bei diesen auf die umgekehrte Weise, wie bei den ganzen Zahlen, und verliert ihre Bedeutung, wenn sie den Schluss der übrigen Ziffern bilden sollte.

---

## XXIX.

# De indiciis, quibus dijudicari possit, num sit 7 aut 13 factor numeri integri dati.

Auctore

Dre. *Christiano Fr. Lindman,*

Lect. Strengn.

---

Tomo XXV. pag. 176. seqq. hujus Archivi Dom. Reyer de divisione numerorum per septem disputavit, in quam rem ego quoque olim inquisivi. Aliam ac Dus Reyer regulam inveni, quam hic profero, non quod regulam divisione ipsa commodiorem dari posse existimem, sed quia via, qua inventa est, attentione non prorsus indigna videtur.

Sit igitur

$$T = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

Constat, hoc polynomium, per $x - k$ divisum, suppeditare residuum

$$R_k = a_n k^n + a_{n-1} k^{n-1} + a_{n-2} k^{n-2} + \dots + a_1 k + a_0$$

et quantitatem $x - k$ factorem polynomii $T$ esse non posse, nisi est $R_k = 0$. Quod si $x$ et $k$ specialem valorem accipiunt, necesse non est, sit $R_k = 0$, dummodo $R_k$ factorem $x - k$ habeat. Posito igitur $x = 10$, manifestum est, numerum quemcunque, cujus notae sunt $a_n$, $a_{n-1}$ cett. (atque ideo $a_n, a_{n-1} \dots < 10$), polynomio $T$ exhiberi. Jam posito $k = 1$ aut $k = -1$, inveniuntur regulae cognitae, quarum beneficio cognoscere licet, sitne 9 aut 11 factor numeri dati

$$10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + \dots + 10 a_1 + a_0$$

necne. Sin autem $k = 3$ et $k = -3$ constituitur, regulae inveniuntur factorem 7 et factorem 13 dignoscendi, quae tamen, ut nunc sunt, manifesto nulli sunt usui. Itaque aliae quaerendae sunt.

Positis radicibus cubicis imaginariis unitatis negativae $= \alpha, \beta$ atque ideo $\alpha = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$, quum sit

$$7 = 3^2 - 3 + 1, \quad 13 = 3^2 + 3 + 1,$$

liquet esse

$$7 = (3 - \alpha)(3 - \beta), \quad 13 = (3 + \alpha)(3 + \beta) = (-3 - \alpha)(-3 - \beta).$$

Ut ambae regulae simul reperiantur, residuum $R_k$ prius per $k - \alpha$, deinde per $k - \beta$ dividatur, ubi, divisione facta, littera $k$ prius aequalis 3, tum aequalis $-3$ ponatur. Prior divisio dat

$$\frac{R_k}{k - \alpha} = a_n k^{n-1} + (a_n \alpha + a_{n-1}) k^{n-2} + (a_n \alpha^2 + a_{n-1} \alpha + a_{n-2}) k^{n-3} + \dots$$
$$+ (a_n \alpha^{n-2} + a_{n-1} \alpha^{n-3} + \dots + a_2) k + a_n \alpha^{n-1} + a_{n-1} \alpha^{n-2} + \dots + a_2 \alpha + a_1$$
$$+ \frac{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0}{k - \alpha}.$$

Si haec expressio ulterius per $k - \beta$ dividitur et ea pars quoti, quae est numerus integer, per $Q$ designatur, reperimus

$$\frac{R_k}{(k - \alpha)(k - \beta)} = Q + \frac{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \dots + a_1 \alpha + a_0}{(k - \alpha)(k - \beta)}$$
$$+ \frac{a_n \beta^{n-1} + (a_n \alpha + a_{n-1}) \beta^{n-2} + \dots + (a_n \alpha^{n-2} + \dots + a_2) \beta + a_n \alpha^{n-1} + \dots + a_1}{k - \beta}.$$

Hae fractiones $= r_k$ ponantur et ad eundem denominatorem reducantur. Congestis deinde terminis, in quibus $\alpha$ eundem habet indicem, beneficio theorematis cogniti

$$\alpha^{p-1}+\alpha^{p-2}\beta+\alpha^{p-3}\beta^2+\ldots.\alpha\beta^{p-2}+\beta^{p-1}=\frac{\alpha^p-\beta^p}{\alpha-\beta}$$

reperitur

$$r_k=\frac{1}{(k-\alpha)(k-\beta)}\left[a_0+k\sum_{p=1}^{p=n}a_p\frac{\alpha^p-\beta^p}{\alpha-\beta}-\alpha\beta\sum_{p=1}^{p=n}a_p\frac{\alpha^{p-1}-\beta^{p-1}}{\alpha-\beta}\right].$$

Quum vero sit

$$\alpha=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3}+i\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3},\quad \beta=\frac{1-i\sqrt{3}}{2}=\mathrm{Cos}\frac{\pi}{3}-i\,\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3},$$

liquet esse

$$\frac{\alpha^p-\beta^p}{\alpha-\beta}=\frac{\mathrm{Sin}\,p\frac{\pi}{3}}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}},\quad \alpha\beta=1,$$

quamobrem invenitur

$$r_k=\frac{1}{k^2-k+1}\left[a_0+\sum_{p=1}^{p=n}a_p\frac{k\,\mathrm{Sin}\,p\frac{\pi}{3}-\mathrm{Sin}(p-1)\frac{\pi}{3}}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}}\right],$$

vel, quia est

$$a_p.\frac{k\,\mathrm{Sin}\,p\frac{\pi}{3}-\mathrm{Sin}(p-1)\frac{\pi}{3}}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}}=a_0,\quad \text{si est } p=0,$$

$$r_k=\frac{1}{k^2-k+1}\sum_{p=0}^{p=n}a_p.\frac{k\,\mathrm{Sin}\,p\frac{\pi}{3}-\mathrm{Sin}(p-1)\frac{\pi}{3}}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}}.$$

Manifestum est, valorem absolutum quantitatis $r_k$ numerum integrum esse oportere, si $k^2-k+1$ factor numeri $T$ esse poterit. Functiones goniometricae, quae in formula inventa insunt, eam paene inutilem reddere videntur. Quum vero consideramus, esse

$$\frac{k\,\mathrm{Sin}\,p\frac{\pi}{3}-\mathrm{Sin}(p-1)\frac{\pi}{3}}{\mathrm{Sin}\frac{\pi}{3}}=1(-1)^m,\qquad \text{si est } p=3m,$$

$$\text{„}\qquad =k(-1)^m,\qquad \text{„ „ „}=3m+1,$$

$$\text{„}\qquad =(k-1)(-1)^m,\quad \text{„ „ „}=3m+2,$$

melior regula reperitur. Posito jam $k=3$, evadit $k^2-k+1=7$ et

$$\overset{p=n}{\underset{p=0}{S}} \frac{3\operatorname{Sin} p\frac{\pi}{3}-\operatorname{Sin}(p-1)\frac{\pi}{3}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}} = 1.(a_0-a_3+a_6-\text{etc.})$$

$$+3.(a_1-a_4+a_7-\text{etc.})$$

$$+2.(a_2-a_5+a_8-\text{etc.}).$$

Itaque numerus datus a dextra parte ad sinistram in classes trium notarum dispertiatur. Ultima classis unam, duas vel tres notas habere potest. Sit

$$T=|331|719|157|035.$$

Summa nuper allata fit

$$=1.(5-7+9-1)+3.(3-5+1-3)+2.(0-1+7-3)$$

$$=1.6-3.4+2.3=0$$

atque ideo est numerus datus per septem sine residuo divisibilis.

Posito denique $k=-3$, fit $k^2-k+1=13$ et

$$\overset{p=n}{\underset{p=0}{S}} a_p \frac{-3\operatorname{Sin} p\frac{\pi}{3}-\operatorname{Sin}(p-1)\frac{\pi}{3}}{\operatorname{Sin}\frac{\pi}{3}} = 1.a_0-3.(a_1-a_4+a_7-\text{etc.})$$

$$-4.(a_2-a_5+a_8-\text{etc.})$$

$$-1.(a_3-a_6+a_9-\text{etc.}).$$

Nunc numerus datus in classes quoque dispertiatur eodem modo atque antea, nisi quod nota penultima fit prima nota classis primae. Sit numerus datus

$$=|119|010|695|564|8.$$

Summa, de qua nunc agitur, est

$$=1.8-3.(4-5+0-9)-4.(6-9+1-1)-1.(5-6+0-1)$$

$$=1.8+3.10+4.3+1.2=52.$$

Sequitur, ut 13 sit factor numeri dati.

# XXX.

## De usu coordinatarum polarium in quadratura curvarum. Supplementum quoddam librorum de calculo integrali.

Auctore

Dre. *Christiano Fr. Lindman,*

Lect. Strengn.

---

Quamquam multa genera coordinatarum excogitari possunt, rectilinearum tamen, interque eas orthogonalium, atque polarium usus est frequentissimus. Utrumque genus sua habet commoda, ita ut propositum quoddam nunc hoc, nunc illo genere utendo facilius assequi liceat. In planis curvis quadrandis utrumque saepe genus aeque commode potest adhiberi, interdum vero usus alterius commodior est. Verum quidem est, superficiem sectoris ope coordinatarum polarium inveniri, segmenti autem coordinatis orthogonalibus, qua tamen sola re decernendum non est, utrum genus coordinatarum praecipue adhibendum sit, quia saepe usu venit, ut coordinatae polares superficiem segmenti commodius exhibeant, dummodo triangulum addatur vel subtrahatur. Quum vero utraque ratio eandem affert utilitatem, ea nimirum eligenda est, cujus usus minimum affert laborem, id quod ex aequatione curvae pendet. Omnes scriptores de calculo integrali docent, quae formulae hac in re adhibendae sint, sed coordinatas orthogonales eatenus anteferre videntur, quoad iis saepius utantur earumque usum pluribus exemplis illustrent. Quae quum ita sint, quidquam neque iis prorsus inutile, qui calculum integralem discere velint, neque praeceptoribus ingratum, qui exempla qualiacumque accipiant, facturus mihi visus sum, si usum utriusque generis coordinatarum in curvis quibusdam algebraicis quadrandis inter se conferam, praesertim quum occasio ita praebeatur agendi de integralibus quibusdam, quorum mentio jam antea (Tom. XXIII. pag. 446.) facta est.

I. Si quis eam curvam, quam Folium Cartesii vocant, quadrare vult, magna inde exsistit molestia, quod aequatio hujus curvae

$$x^3 + y^3 = axy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

tertii est gradus. Facile intelligitur, formulam usitatam sine idonea substitutione adhiberi non posse. Quum vero meliorem reperire non possum, quam qua usus est Mollweide in Lexico Klügeliano (Tom. IV. pag. 123.), ad hoc opus lectorem delegans usum tantum coordinatarum in hac curva quadranda ostendere conabor. Positis igitur

$$y = r \sin\varphi, \quad x = r \cos\varphi,$$

aequatio (1) in aequationem simplicem

$$r = \frac{a \sin\varphi \cos\varphi}{\sin^3\varphi + \cos^3\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

mutatur. Sector igitur quidam ($= S_\varphi$) aequatione

$$S_\varphi = \tfrac{1}{2}\int_0^\varphi r^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi \cos^2\varphi d\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2}$$

datur. Divisione per $\cos^6\varphi$ supra et infra facta, evadit

$$S_\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^\varphi \frac{\operatorname{tg}^2\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3\varphi)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi},$$

positaque $\operatorname{tg}^3\varphi = z$,

$$S_\varphi = \frac{a^2}{6}\int_0^{\operatorname{tg}^3\varphi} \frac{dz}{(1+z)^2} = \frac{a^2}{6} \cdot \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{1 + \operatorname{tg}^3\varphi} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Superficies totius ovalis ponendo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ reperitur $= \frac{a^2}{6}$. Sin autem superficies a curva et ordinata quadam et axi abscissarum terminata quaeritur, sector a triangulo

$$= \frac{r^2}{2} \sin\varphi \cos\varphi = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\sin^3\varphi \cos^3\varphi}{(\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)^2} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{(1 + \operatorname{tg}^3\varphi)^2}$$

tantisper subtrahatur, dum sit $\operatorname{tg}\varphi \leqq \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}}$ vel de parte curvae in axin abscissarum convexa agatur. Quod si quaeritur segmentum a parte concava terminatum, ponendum est $\frac{\pi}{2} - \varphi$ pro $\varphi$ vel anguli numerandi sunt ab axi ordinatarum, quo fit

$$S_{\frac{\pi}{2}-\varphi}=\frac{a^2}{6}\cdot\frac{\operatorname{Cot}^3\varphi}{1+\operatorname{Cot}^3\varphi}=\frac{a^2}{6}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^3\varphi},$$

cui denique addendum est triangulum. Facillime perspicitur, quomodo sumendus sit angulus $\varphi$, quando segmenta ab infinitis curvae ramis terminata quaeruntur.

II. Apud Moigno *) proponitur curva, cujus aequatio est

$$y^4-96a^2y^2+100a^2x^2-x^4=0. \quad \ldots \quad (4)$$

Positis

$$y=r\operatorname{Sin}\varphi,\quad x=r\operatorname{Cos}\varphi,$$

prodit aequatio

$$r^2(\operatorname{Cos}^4\varphi-\operatorname{Sin}^4\varphi)=4a^2(25\operatorname{Cos}^2\varphi-24\operatorname{Sin}^2\varphi)$$

vel formulis goniometricis notissimis

$$r^2=98a^2+\frac{2a^2}{\operatorname{Cos}2\varphi}. \quad \ldots \quad (5)$$

Itaque invenitur

$$S=49a^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi+a^2\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}2\varphi}$$

$$=49a^2(\varphi_2-\varphi_1)+\frac{a^2}{4}\,\mathrm{l}\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi_2\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi_1\right)}\right)^2 \quad \ldots \quad (6)$$

E figura (vide Moigno) patet, superficiem partis finitae inveniri, si in integrali per 4 multiplicato ponitur $\varphi_2=\frac{\pi}{2}$ et arcui $\varphi_1$ datur is valor, quem habet $\varphi$, quando est $r=0$. Posito igitur in aequatione (5) $r=0$, habebimus

$$\operatorname{Cos}2\varphi=-\frac{1}{49},\quad \operatorname{Cos}\varphi=\pm\frac{2}{7}\sqrt{6},$$

ubi signum superius adhibendum est. Itaque est

$$\varphi_1=\operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\frac{2}{7}\sqrt{6},$$

ubi ArcCos solito modo designat arcum minimum, cujus Cosinus sit $=\frac{2}{7}\sqrt{6}$. Ita invenitur superficies ($A$) totius partis finitae

$$A=4a^2[49\operatorname{Arc}\operatorname{Sin}\frac{2}{7}\sqrt{6}+\mathrm{l}(5-2\sqrt{6})]$$

$$=4a^2[49\operatorname{Arc}\operatorname{Cos}\frac{5}{7}+\mathrm{l}(5-2\sqrt{6})].$$

*) Leçons de Calc. Diff. et Integr. Paris 1840. Tom. I. p. 222.

Segmenta partis finitae ut exemplo priore reperiuntur. Si sectores ab infinitis ramis terminati quaeruntur, angulus $\varphi$ intra limites 0 et $\operatorname{Arc Cos} \frac{2}{7}\sqrt{6}$ sumatur. Segmenta facile inveniri possunt.

Eandem superficiem coordinatis rectilineis utentes determinare conabimur. Ex aequatione (4) invenitur

$$y = \pm\sqrt{48a^2 \pm \sqrt{2304a^4 - x^2(100a^2 - x^2)}},$$

quae tamen expressio usu formulae cognitae

$$\pm\sqrt{\alpha \pm \sqrt{\beta}} = \pm\left[\sqrt{\frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta}}{2}}\right]$$

in formam concinniorem redigi non potest, quia $\alpha^2 - \beta$ non est quadratum. Nihilosecius formula illa eo utilis est, quod ope ejus quantitas sub signo radicali simplicior fit. Enimvero habebimus

$$y = \pm\left\{\sqrt{24a^2 + \frac{x}{2}\sqrt{100a^2 - x^2}} \pm \sqrt{24a^2 - \frac{x}{2}\sqrt{100a^2 - x^2}}\right\}.$$

Primum omnium dijudicandum, quomodo signa sumere oporteat. Quoniam superficies quaesita respectu axium aequalis est et congruens, satis est positivos tantum coordinatarum valores considerare. Sequitur ut signum superius extra uncos adhibendum sit. De signis inter radicales nunc decernendum est. Aequatione (4) differentianda reperitur

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(x^2 - 50a^2)}{y(y^2 - 48a^2)},$$

unde patet, tangentem curvae esse horizontalem in duobus punctis, quorum coordinatae sunt $x = 0$, $y = \pm 4a\sqrt{6}$, et verticalem in octo punctis, quorum coordinatas dedit Moigno, praetereaque in duobus punctis, quae Moigno oblitus est et quorum coordinatae sunt $x = \pm 10a$, $y = 0$. Ex his decem punctis quattuor, quorum coordinatae sunt $x = 6a$, $y = \pm 4a\sqrt{3}$, $x = -6a$, $y = \pm 4a\sqrt{3}$, sita sunt in ea curvae parte, de qua nunc agitur. Hinc intelligitur, valores ipsius $y$ intra limites 0 et $4a\sqrt{6}$ (inclus.) et valores ipsius $x$ intra limites 0 et $6a$ (inclus.) contineri. Jam facile perspicitur, omnes valores ipsius $y$ a nihilo usque ad $4a\sqrt{3}$ expressione

$$y_1 = \sqrt{24a^2 + \frac{x}{2}\sqrt{100a^2 - x^2}} - \sqrt{24a^2 - \frac{x}{2}\sqrt{100a^2 - x^2}}$$

exhiberi, omnes autem valores a $4a\sqrt{3}$ usque ad $4a\sqrt{6}$ expressione

$$y_2 = \sqrt{24a^2 + \frac{x}{2}\sqrt{100a^2 - x^2}} + \sqrt{24a^2 - \frac{x}{2}\sqrt{100a^2 - x^2}}.$$

Si quaeritur eadem superficies ($= A$) atque antea, invenitur

$$A = 4\int_0^{6a} (y_2 - y_1)\,dx = 8\int_0^{6a} dx \sqrt{24a^2 - \frac{x}{2}\sqrt{100a^2 - x^2}}. \quad (7)$$

Posito jam

$$\frac{x}{2}\sqrt{100a^2 - x^2} = 2az,$$

prodit

$$x = \sqrt{25a^2 + 2az} \pm \sqrt{25a^2 - 2az},$$

quia positivorum tantum valorum ratio habenda est. Etiamnunc ambigitur, utrum signum inter radicales sumendum sit. Maximum functionis $x\sqrt{100a^2 - x^2}$ est $= 50a^2$ et locum habet, quando est $x = 5a\sqrt{2}$ vel $x = \sqrt{100a^2 - x^2}$. Limites autem integralis (7) sunt $x = 0$, $x = 6a$, quorum uterque minor est quam $5a\sqrt{2}$. Valor igitur factoris alterius semper est major quam $5a\sqrt{2}$. Jam si factores $x$ et $\sqrt{100a^2 - x^2}$ erunt permutati, iidem valores atque antea invenientur. Quoniam vero est $\sqrt{100a^2 - x^2} > x$ pro omnibus valoribus, quibus nunc utendum est, sequitur, ut sumi debeat

$$x = \sqrt{25a^2 + 2az} - \sqrt{25a^2 - 2az}.$$

Limites fiunt $z = 0$, $z = 12a$ et

$$dx = \frac{a\,dz}{\sqrt{25a^2 + 2az}} + \frac{a\,dz}{\sqrt{25a^2 - 2az}}.$$

His in aequatione (7) substitutis evadit

$$A = 8a\left[\int_0^{12a} dz \sqrt{\frac{24a - 2z}{25a + 2z}} + \int_0^{12a} dz \sqrt{\frac{24a - 2z}{25a - 2z}}\right].$$

Posito

$$\sqrt{\frac{24a - 2z}{25a + 2z}} = u,$$

habebimus

$$z = \frac{a}{2}\cdot\frac{24 - 25u^2}{1 + u^2}, \quad dz = -\frac{49a\,u\,du}{(1 + u^2)^2}.$$

Limites $z = 0$, $z = 12a$ transeunt in $u = \frac{2}{5}\sqrt{6}$, $u = 0$ resp., quibus permutatis evadit

$$\int_0^{12a} dz \sqrt{\frac{24a - 2z}{25a + 2z}} = 49a\int_0^{\frac{2}{5}\sqrt{6}} \frac{u^2\,du}{(1 + u^2)^2} = -5a\sqrt{6} + \frac{49a}{2}\,\mathrm{Arctg}\,\frac{2}{5}\sqrt{6}.$$

Eodem modo reperitur

$$\int_0^{12a} dz\sqrt{\frac{24a-2z}{25a-2z}} = a\int_0^{\frac{1}{5}\sqrt{6}} \frac{t^2dt}{(1-t^2)^2} = 5a\sqrt{6}+\frac{a}{2}\,l(5-2\sqrt{6}).$$

Summa horum integralium per $8a$ multiplicata dat

$$A = 4a^2\{49\,\mathrm{Arctg}\frac{2}{5}\sqrt{6}+l(5-2\sqrt{6})\}.$$

Quum vero sit $\mathrm{Arctg}\frac{2}{5}\sqrt{6} = \mathrm{Arc\,Cos}\frac{5}{7}$, valor superficiei idem est atque antea, sed multo majore labore inventus.

Sin autem quaereretur superficies ($=B$) a parte curvae concava et ordinata quadam et axi abscissarum terminata, haberemus

$$B = \pm\int_0^{x_1} dx\sqrt{24a^2+\frac{x}{2}\sqrt{100a^2-x^2}}+\int_0^{x_1} dx\sqrt{24a^2-\frac{x}{2}\sqrt{100a^2-x^2}}$$

ubi est $x_1 \leqq 6a$. Facile apparet, quam lata et molesta computatio inde sit oritura. Hic tamen spatium non detur huic computationi, quippe quam parvi referat ulterius persequi.

III. Alia apud Moigno *) occurrit curva, cujus aequatio est

$$y^4+2x^2y^2+x^4-6axy^2-2ax^3+a^2x^2=0. \quad . \quad . \quad (8)$$

Ut haec curva ope coordinatarum polarium quadretur, ponatur $y = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi$, $x = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$, quo facto aequatio (8) transit in

$$r^2-2ar\,\mathrm{Sin}\,\varphi(1+2\,\mathrm{Cos}^2\varphi)+a^2\,\mathrm{Sin}^2\varphi = 0. \quad . \quad . \quad (9)$$

Etiamsi haec aequatio non aeque simplex sit, quam quae priore exemplo inventa est, superficies tamen quaesita haud difficulter cognoscere licet. Aequatione (9) soluta, prodeunt aequationes

$$r' = a\,\mathrm{Sin}\,\varphi\{1+2\,\mathrm{Cos}^2\varphi+2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\sqrt{1+\mathrm{Cos}^2\varphi}\},$$

$$r'' = a\,\mathrm{Sin}\,\varphi\{1+2\,\mathrm{Cos}^2\varphi-2\,\mathrm{Cos}\,\varphi\sqrt{1+\mathrm{Cos}^2\varphi}\}.$$

Ut facillime perspicitur, ille valor curvam exteriorem, hic interiorem competit. Superficies sectoris cujusdam, quando angulus sectoris est $= \varphi_1$ ($\varphi_1 \leqq \frac{\pi}{2}$), exhibetur formulis

---

*) l. c. pag. 225. Terminus tamen ultimus apud Moigno est $2a^2x^2$. Quum vero, auctore Moigno, punctum, cujus coordinatae sunt $x=0$, $y=0$, sit punctum duplex, terminus ultimus sit $a^2x^2$, necesse est.

$$S_{\varphi_1}' = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} r'^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi_1} \operatorname{Sin}^2\varphi(1+8\operatorname{Cos}^2\varphi+8\operatorname{Cos}^4\varphi)\,d\varphi$$

$$+ 2a^2\int_0^{\varphi_1} \operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}\varphi d\varphi\,(1+2\operatorname{Cos}^2\varphi)\sqrt{1+\operatorname{Cos}^2\varphi},$$

$$S_{\varphi_1}'' = \frac{1}{2}\int_0^{\varphi_1} r''^2 d\varphi = \frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi_1} \operatorname{Sin}^2\varphi(1+8\operatorname{Cos}^2\varphi+8\operatorname{Cos}^4\varphi)\,d\varphi$$

$$-2a^2\int_0^{\varphi_1} \operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}\varphi d\varphi\,(1+2\operatorname{Cos}^2\varphi)\sqrt{1+\operatorname{Cos}^2\varphi}.$$

Jam vero est

$$\int_0^{\varphi_1} \operatorname{Sin}^2\varphi(1+8\operatorname{Cos}^2\varphi+8\operatorname{Cos}^4\varphi)\,d\varphi$$

$$= 2\varphi_1 - \frac{1}{8}\{\operatorname{Sin}2\varphi_1 + 3\operatorname{Sin}4\varphi_1 + \frac{1}{3}\operatorname{Sin}6\varphi_1\}.$$

Integrali posteriore ponatur $\operatorname{Sin}\varphi = \sqrt{2}\operatorname{Sin}\psi$, quo facto evadit

$$\int_0^{\varphi_1} \operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}\varphi d\varphi(1+2\operatorname{Cos}^2\varphi)\sqrt{1+\operatorname{Cos}^2\varphi}$$

$$= 4\int_0^{\psi_1} \operatorname{Sin}^2\psi \operatorname{Cos}^2\psi(3-4\operatorname{Sin}^2\psi)\,d\psi,$$

ubi est $\psi_1 = \operatorname{ArcSin}\frac{\operatorname{Sin}\varphi_1}{\sqrt{2}}$. Facillime perspicitur esse

$$\int_0^{\varphi_1} \operatorname{Sin}^2\varphi \operatorname{Cos}\varphi d\varphi(1+2\operatorname{Cos}^2\varphi)\sqrt{1+\operatorname{Cos}^2\varphi}$$

$$= 4\{3\int_0^{\psi_1} \operatorname{Sin}^2\psi \operatorname{Cos}^4\psi d\psi - \int_0^{\psi_1} \operatorname{Sin}^4\psi \operatorname{Cos}^2\psi d\psi\}$$

$$= \frac{1}{8}\{4\psi_1 + 2\operatorname{Sin}2\psi_1 - \operatorname{Sin}4\psi_1 - \frac{2}{3}\operatorname{Sin}6\psi_1\}.$$

Itaque est

$$\left.\begin{matrix} S_{\varphi_1}' \\ S_{\varphi_1}'' \end{matrix}\right\} = a^2(\varphi_1 \pm \psi_1) - \frac{a^2}{16}\{\operatorname{Sin}2\varphi_1 + 3\operatorname{Sin}4\varphi_1 + \frac{1}{3}\operatorname{Sin}6\varphi_1\}$$

$$\pm \frac{a^2}{4}\{2\operatorname{Sin}2\psi_1 - \operatorname{Sin}4\psi_1 - \frac{2}{3}\operatorname{Sin}6\psi_1\},$$

ubi signum superius est sectoris $S_{\varphi_1}'$, inferius sectoris $S_{\varphi_1}''$. Si ex. gr. est $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ ideoque $\psi_1 = \frac{\pi}{4}$, reperitur

$$S_{\frac{\pi}{2}}' = a^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2}{3}\right), \quad S_{\frac{\pi}{2}}'' = a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right).$$

Superficies segmenti cujusdam ut in exemplo primo inveniri potest.

Usus coordinatarum orthogonalium hoc loco satis facilis et commodus, nisi quod valores ipsius $y$ inter se accuratius distinguendi sunt. Aequatione (8) solvenda habebimus

$$y = \pm\sqrt{x(3a-x) \pm x\sqrt{(3a-x)^2-(x-a)^2}},$$

unde liquet, quantitatem $x$ valores negativos non admittere. Quia vero opus non est nisi valores positivos ipsius $y$ respicere, ponatur

$$y = \sqrt{x(3a-x) \pm x\sqrt{(3a-x)^2-(x-a)^2}}.$$

Quantitas ista radicalis in duas radices simplices transformari potest. Ita invenitur

$$y_1 = \sqrt{x(2a-x)} + \sqrt{ax},$$

$$y_2 = \sqrt{x(2a-x)} - \sqrt{ax}, \text{ si est } x \leqq a,$$

$$y_3 = \sqrt{ax} - \sqrt{x(2a-x)}, \text{ si est } x \geqq a.$$

Ex his valoribus $y_2$ competit curvam interiorem. Valores $y_1$, $y_3$ sunt curvae exterioris, $y_1$ partis concavae, $y_3$ partis convexae. Ducta igitur per punctum, cujus coordinatae sunt $y=0$, $x=x_1$ $(x_1 \leqq a)$, recta axi ordinatarum parallela positaque $=A$ superficie, quae ab hac recta et axi abscissarum et parte quadam curvae interioris continetur, habebimus

$$A = \int_0^{x_1} y_2 dx = \int_0^{x_1} dx\sqrt{x(2a-x)} - \sqrt{a}\int_0^{x_1}\sqrt{x}dx$$

$$= \frac{a^2}{2}\operatorname{Arc\,Cos}\frac{a-x_1}{a} - (a-x_1)\sqrt{x_1(2a-x_1)} - \frac{2}{3}x_1\sqrt{ax_1}$$

atque ideo, posita $x_1 = a$, totam superficiem interiorem $= a^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)$ ut antea.

Jam vero si posuerimus superficiem ab iisdem rectis et parte quadam curvae exterioris concava terminatam $= A_1$, inveniemus

$$A_1 = \int_0^{x_1} y_1 dx = \int_0^{x_1} dx\sqrt{x(2a-x)} + \sqrt{a}\int_0^{x_1} dx\sqrt{x}$$

$$= \frac{a^2}{2}\operatorname{Arc\,Cos}\frac{a-x_1}{a} - \frac{1}{2}(a-x_1)\sqrt{x_1(2a-x_1)} + \frac{2}{3}x_1\sqrt{ax_1},$$

quae, posita $x_1 = a$, transit in

$$\frac{a^2\pi}{4}+\frac{2}{3}a^2=a^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)\ ^{*)}.$$

Segmentum a parte convexa, axi abscissarum et ordinata quadam inclusum facillime reperitur.

IV. Apud Moigno occurrit curva, cujus aequatio est

$$y^4-x^4+26x^2y=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Positis $y=r\operatorname{Sin}\varphi$, $x=r\operatorname{Cos}\varphi$ invenitur

$$r=\frac{2b\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}^2\varphi}{\operatorname{Cos}^2\varphi-\operatorname{Sin}^2\varphi}=b\operatorname{Cos}\varphi\operatorname{tg}2\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Quando agitur de ramo, qui supra axin abscissarum jacet $\left(\frac{\pi}{4}>\varphi\geqq 0\right)$, evadit

$$S_\varphi=\frac{1}{2}\int_0^\varphi r^2 d\varphi=\frac{b^2}{2}\int_0^\varphi \operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{tg}^2 2\varphi d\varphi$$

vel, quoniam est

$$\operatorname{Cos}^2\varphi=\frac{1+\operatorname{Cos}2\varphi}{2},\quad \operatorname{tg}^2 2\varphi=\frac{1-\operatorname{Cos}^2 2\varphi}{\operatorname{Cos}^2 2\varphi},$$

$$S_\varphi=\frac{b^2}{4}\left[\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}^2 2\varphi}+\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\operatorname{Cos}2\varphi}-\int_0^\varphi d\varphi-\int_0^\varphi\operatorname{Cos}2\varphi d\varphi\right]$$

$$=\frac{b^2}{4}\left[\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)-\varphi-\frac{1}{2}\operatorname{Sin}2\varphi\right]=\frac{b^2}{4}\left[\operatorname{Sin}^2\varphi\operatorname{tg}2\varphi+\frac{1}{2}\operatorname{l}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)-\varphi\right].$$

Sit ex. gr. $\varphi=\frac{\pi}{6}$ et evadit

$$S_{\frac{\pi}{6}}=\frac{b^2}{8}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3}+\operatorname{l}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}-\frac{\pi}{3}\right\}=\frac{b^2}{8}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{3}+\operatorname{l}(2+\sqrt{3})-\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Sector a ramis sub axi abscissarum terminatus reperitur, si angulus $\varphi$ ponitur negativus, et superficies segmenti inter curvam et ordinatam et axin abscissarum comprehensi, si $S_\varphi$ a triangulo $=\frac{r^2}{2}\operatorname{Sin}\varphi\operatorname{Cos}\varphi=\frac{b^2}{4}\operatorname{Cos}^2\varphi\operatorname{Sin}2\varphi\operatorname{tg}2\varphi$ subtrahitur.

Coordinatis orthogonalibus utenti computatio fit molestior. Quantitas $x$ ex aequatione (10) quaerenda est, quoniam aequatio

*) Quia superficies tota antea inventa est $=a^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)$, sequitur, ut segmentum, quod abscinditur, si recta per punctum $(x=a, y=0)$, axi abscissarum perpendicularis ducitur, semicirculum adaequet, cujus radius sit $=a$.

respectu hujus quantitatis facilius solvi potest. Si positivi tantum valores quantitatum variabilium respiciuntur, ponenda est $x=\sqrt{by+y\sqrt{b^2+y^2}}$. Jam sit $A=$ superficiei a curva et axi ordinatarum et recta abscissarum axi parallela terminatae: inveniemus $A=\int_0^y xdy=\int_0^y dy\sqrt{by+y\sqrt{b^2+y^2}}$. Posita $y=b\operatorname{tg}\psi$, evadit

$$A=b^2\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{y}{b}}\frac{d\psi}{\operatorname{Cos}^2\psi}\sqrt{\operatorname{tg}\psi+\operatorname{tg}\psi\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi}}$$

vel ex notis formulis goniometricis

$$A=b^2\sqrt{2}\int_0^{\operatorname{Arctg}\frac{y}{b}}\frac{\operatorname{Cos}\frac{1}{2}\psi d\psi}{\operatorname{Cos}^3\psi}\sqrt{\operatorname{Sin}\psi}.$$

Alia variabili $z$ pro $\operatorname{Sin}\psi$ introducta, quia tum est

$$\operatorname{Cos}\tfrac{1}{2}\psi=\tfrac{1}{2}\{\sqrt{1+z}+\sqrt{1-z}\}$$

invenitur

$$A=\frac{b^2}{\sqrt{2}}\left\{\int_0^{z_1}\frac{dz\sqrt{z(1+z)}}{(1-z^2)^2}+\int_0^{z_1}\frac{dz\sqrt{z(1-z)}}{(1-z^2)^2}\right\},$$

ubi est $z_1=\dfrac{y}{\sqrt{b^2+y^2}}$.

Postquam quantitates sub signo $\int$ solito modo factae sunt rationales, reperitur

$$\int_0^{z_1}\frac{dz\sqrt{z(1+z)}}{(1-z^2)^2}=\frac{(3z_1-1)\sqrt{z_1}}{4(1-z_1)\sqrt{1+z_1}}+\frac{1}{8\sqrt{2}}\,l\,\frac{\sqrt{1+z_1}+\sqrt{2z_1}}{\sqrt{1+z_1}-\sqrt{2z_1}},$$

$$\int_0^{z_1}\frac{dz\sqrt{z(1-z)}}{(1-z^2)^2}=\frac{(3z_1+1)\sqrt{z_1}}{4(1+z_1)\sqrt{1-z_1}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{Arc\,Cot}\sqrt{\frac{1-z_1}{2z_1}}.$$

Substituto valore ipsius $z_1$ et reductionibus quibusdam factis, habebimus

$$A=\frac{\sqrt{y}}{4\sqrt{2}}\{(3y+\sqrt{b^2+y^2})\sqrt{\sqrt{b^2+y^2}-y}+(3y-\sqrt{b^2+y^2})\sqrt{\sqrt{b^2+y^2}+y}\}$$
$$+\frac{b^2}{16}\,l\,\frac{\sqrt{\sqrt{b^2+y^2}+y}+\sqrt{2y}}{\sqrt{\sqrt{b^2+y^2}+y}-\sqrt{2y}}-\frac{b^2}{8}\operatorname{Arc\,Cot}\sqrt{\frac{\sqrt{b^2+y^2}-y}{2y}},$$

quae formula adeo est implicita, ut dubitari possit, utrum molestius sit, eam adhibere an invenire.

# Literarischer Bericht
## CIV.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

**Gauss zum Gedächtniss. Von W. Sartorius v. Waltershausen. Leipzig. Hirzel. 1856. 1 Thlr.**

Diese historische Skizze des grossen Verblichenen ist mit einer Hingebung und einer Wärme des Gefühls, zugleich mit einer so grossen Ueberzeugung von dem unersetzlichen Verluste, welchen die Wissenschaft und die Georgia Augusta erlitten, geschrieben, dass dieselbe jedes fühlende Herz wahrhaft ergreifen muss, ganz abgesehen von ihrem natürlich höchst interessanten Inhalte. Dieselbe beabsichtigt mehr ein allgemeines Bild des unvergleichlichen Mannes zu entwerfen, als seine bewunderungswürdigen wissenschaftlichen Endeckungen in einem weiteren Zusammenhange zu erfassen, eine Arbeit, deren Erfüllung, wie der Herr Verfasser in der Vorrede sagt, bald im vollsten Umfange von einer anderen Seite entsprochen werden wird; sie sucht zugleich schon jetzt einer heiligen, frommen Pflicht zu genügen und in einer Zeit, in welcher der Schmerz über den grossen Verlust noch recht lebendig ist, das Andenken an den Hingeschiedenen frisch in der Seele zu bewahren. Gerade durch diese allgemeine und weniger streng wissenschaftliche Haltung eignet sich die Schrift vorzüglich auch für ein grösseres Publikum, und wir folgen nur unserer innersten Ueberzeugung, wenn wir dieselbe hier zur allgemeinsten Beachtung in einem möglichst weiten Kreise dringend empfehlen. Auch wird dieselbe wesentlich dazu beitragen, manche unrichtige Ansichten über verschiedene Ereignisse in **Gauss's** Leben zu berichtigen und diese Ereignisse in ihr richtiges Licht zu stellen.

Wir müssen uns leider versagen, hier eine grössere Anzahl von Auszügen aus der in allen Beziehungen sehr interessanten Schrift mitzutheilen, wollen jedoch nicht unterlassen, Einiges von dem anzuführen, was der Herr Verfasser über das religiöse Bewusstsein des grossen Mannes sagt.

„Dem religiösen Bewusstsein von **Gauss** lag ein unersättlicher Durst nach Wahrheit und ein tiefes, sowohl auf geistige wie auf materielle Güter sich erstreckendes Gerechtigkeitsgefühl zu Grunde. Diese beiden geistigen Richtungen unterstützten sich gegenseitig, bezeichneten vornehmlich seinen Charakter und kamen selbst in den kleinsten Lebensverhältnissen immer wieder auf's Deutlichste zum Vorschein. Alles und Jedes musste von ihm mit der äussersten Exactitude, mit der grössten Gewissenhaftigkeit ausgeführt werden. Hatte er es z. B. mit einer Beobachtung zu thun, so suchte er in ihr zu erreichen, was irgend erreichbar war; führte er eine wissenschaftliche Rechnung aus, so gross oder so klein sie auch sein mochte, sie wurde so scharf geführt, als es die Hülfsmittel gestatteten; hatte er sich mit Jemandem in Geldangelegenheiten aus einander zu setzen, so blieb der Bruchtheil eines Pfennigs gewiss nicht unberücksichtigt. **Gauss** zeigte daher den Grundtypus eines rechtschaffenen Mannes; seinen Verpflichtungen in äusserster Strenge nachzukommen, stand bei ihm unerschütterlich fest. Aber auch von Andern forderte er dieselbe Rechtschaffenheit, die er selbst auf das Gewissenhafteste ausübte. Der, welcher es gewagt haben würde, auch in der unbedeutendsten Angelegenheit, ihn absichtlich zu hintergehen oder gegen ihn nicht durchaus rechtschaffen zu verfahren, würde ohne Zweifel für alle Zeit seine Achtung und sein Vertrauen verscherzt haben. Er war indess, wahrscheinlich durch manche Lebenserfahrungen belehrt, auf seiner Hut, nicht getäuscht zu werden, und besass jene tiefe Menschenkenntniss, welche ihn Körner von Spreu sogleich unterscheiden liess."

„Die unerschütterliche Idee von einer persönlichen Fortdauer nach dem Tode, der feste Glaube an einen letzten Ordner der Dinge, an einen ewigen, gerechten, allweisen, allmächtigen Gott, bildete das Fundament seines religiösen Lebens, das in Verbindung mit seinen unübertroffenen wissenschaftlichen Forschungen zu einer vollendeten Harmonie sich aufgelöst hatte."

„Er selbst sprach sich so eines Tages aus: „„Es giebt in dieser Welt einen Genuss des Verstandes, der in der Wissenschaft sich befriedigt, und einen Genuss des Herzens, der hauptsächlich darin besteht, dass die Menschen einander die Mühsale, die Beschwerden des Lebens sich gegenseitig erleichtern. Ist das

aber die Aufgabe des höchsten Wesens, auf gesonderten Kugeln Geschöpfe zu erschaffen und sie, um ihnen solchen Genuss zu bereiten, 80 oder 90 Jahre existiren zu lassen, so wäre das ein erbärmlicher Plan"" (—das Problem wäre, wie er sich ein anderes Mal ausdrückte, schofel gelöst). — „„Ob die Seele 80 Jahre oder 80 Millionen Jahre lebt, wenn sie einmal untergehen soll, so ist dieser Zeitraum doch nur eine Galgenfrist. Endlich würde es vorbei sein müssen. Man wird daher zu der Ansicht gedrängt, für die ohne eine streng wissenschaftliche Begründung so vieles Andere spricht, dass neben dieser materiellen Welt noch eine andere zweite rein geistige Weltordnung existirt, mit ebenso viel Mannigfaltigkeiten als die, in der wir leben — ihrer sollen wir theilhaftig werden."" — Dieses himmlische Bewusstsein hat seine Seele getränkt und genährt bis zu jener stillen Mitternacht, in der sein Auge sich für ewig schloss."

Absichtlich haben wir die religiöse Seite des grössten Mathematikers und Naturforschers der neuesten Zeit hier bestimmter hervorgehoben und stellen sie gegenüber den namentlich für die Jugend leicht so verderblich werden könnenden Ansichten einer gewissen Klasse heutiger Naturforscher, die gegen einen Gauss nur wie Milben gegen den Adler erscheinen. Wer selbst solche Ansichten, die Gauss im Leben leiteten und stärkten, tief in seinem Busen trägt, wird sich durch die obige kurze Schilderung des grossen Mannes in seinem Glauben zwar nicht noch mehr gekräftigt — denn der Autoritäten bedarf das wahrhaft tiefe religiöse Bewusstsein wahrlich nicht — aber doch in allen Beziehungen gehoben fühlen, namentlich jener Klasse heutiger Naturforscher gegenüber, die so gern das Göttliche und Geistige in den Staub ziehen und lediglich an die Materie ketten möchten. Daher durfte die religiöse Seite des grossen Mannes in einer Zeitschrift, wie die vorliegende, welche vorzüglich auch der Förderung des Jugendunterrichts sich widmet, nicht unberücksichtigt bleiben. G.

---

## Mathematischer und physikalischer Unterricht.

Die Leser des Archiv's werden es uns gewiss Dank wissen, wenn wir ihnen die folgende, aus der Augsburger allgemeinen Zeitung entlehnte Notiz mittheilen, die zu interessant ist, als dass sie nicht auch in einer vorzüglich der Förderung des mathematischen und physikalischen Unterrichts gewidmeten Zeitschrift aufbewahrt zu werden verdiente. Unsere Leser werden aus dieser

Notiz ein von der Kaiserlich österreichischen Regierung in Wien errichtetes Institut näher kennen lernen, welches zur wahren Förderung des physikalischen Unterrichts auf allen höheren Lehranstalten gewiss ungemein viel beitragen wird, und zunächst werden namentlich die Kaiserlich österreichischen Gymnasien, Realschulen u. s. w. ihrer für die Förderung aller Unterrichtszweige so sehr besorgten Regierung gewiss für die Errichtung dieses Instituts den wärmsten Dank zollen, so wie namentlich auch dafür, dass die Leitung dieses Instituts in die Hände eines dazu in allen Beziehungen so sehr befähigten und auch für die Förderung des mathematischen und physikalischen Unterrichts mit dem wärmsten Eifer beseelten Mannes, wie Herr Regierungsrath v. Ettingshausen ist, gelegt worden ist. Aber nicht bloss aus dem engeren Kreise der genannten Lehranstalten wird der Kaiserlich österreichischen Regierung dieser Dank gezollt werden, sondern überhaupt von Allen, denen die Förderung des genannten Unterrichts wahre Herzenssache ist. Das Institut spricht zu sehr für sich selbst, als dass es nöthig wäre, darüber hier noch ein Wort zu verlieren. G.

## Das physikalische Institut in Wien.

(Aus der allgemeinen Zeitung. Beilage zu Nr. 142. 21. Mai 1856.)

Ein längst gefühlter Mangel des deutschen Gymnasialunterrichts ist dem scharfen Auge des österreichischen Cultusministers Grafen Thun nicht entgangen, und er hat darum eine Anstalt gegründet, die brauchbare Gymnasiallehrer der Physik erziehen soll, und diese Anstalt einem Manne, dem Regierungsrath von Ettingshausen, zur Leitung übergeben, der mit gleicher Ueberlegenheit die speculative, wie die praktische Physik beherrscht, und der von dem eifrigsten Streben beseelt ist, die höchsten Abstractionen der mathematischen Physik in ein gemeinfassliches Gewand zu kleiden, ohne darum der Strenge der Methode und der Schärfe des Resultats etwas zu vergeben. Nach den Statuten, welche aus dem Ministerium hervorgegangen sind, soll der künftige Gymnasiallehrer der Physik in dieser Anstalt drei Semester verweilen, um dort zu lernen, wie man einfache Instrumente eigenhändig darstellt, wie man complicirte Apparate handhabt und nach ihrem Werthe prüft, und endlich wie man eine selbstständige Untersuchung anzustellen hat. Indem das Statut diese Anstalt den chemischen, anatomischen und physiologischen Laboratorien zur Seite stellt, hat es dieselbe, wenn auch nicht mit übermässigen, aber immerhin mit reichen Mitteln ausgestattet, ihr eine mechanische Werkstätte und eine Sammlung von feinen Apparaten einverleibt, und dem Vorstande ausser dem nothwendigen

Dienstpersonal einen Mechanikus und zwei physikalische Assistenten, von denen einer mehr Experimentator, der andere mehr Mathematiker ist, beigegeben.

Diese Vorschriften geben nun freilich Zeugniss von grosser Einsicht und eine vortreffliche Hinweisung auf das Nothwendige, aber sie bezeichnen schliesslich doch nur die Schwierigkeiten, welche der Vorstand zu überwinden hat. Hier ist es nun das volle Verdienst des jetzigen Directors von Ettingshausen, das fast Unglaubliche möglich gemacht zu haben; er hält der Vorschrift gemäss die Studirenden im ersten Semester an, sich die nöthige Geschicklichkeit in der Behandlung von Holz, Glas und Metall, auf der Dreh-, Schleif- und Hobelbank, vor dem Schraubstock, dem Löthofen und Blastische zu erwerben, um Thermometer, Barometer, gläserne Kugelapparate, Cylinder und Kugeln aus Holz, Kasten u. s. w. darzustellen. Bedenkt man die ungeheure Zahl von Handgriffen, welche in so kurzer Zeit eingeübt werden sollen, so wird man schwerlich auf ein nur einigermassen befriedigendes Resultat gefasst sein. Betritt man aber die Werkstätte und überzeugt sich von den unglaublich raschen Fortschritten der Seminaristen, so lernt man ebenso sehr den methodischen Unterricht, als die Lernbegierde der lebendig angeregten Schüler bewundern, und man nimmt die Ueberzeugung mit, dass der zukünftige Lehrer selbst unter noch so beschränkten Umständen im Stande sein wird, für den Vortrag der Physik Anschauungsmittel zu schaffen, die wenigstens den allerdringendsten Anforderungen entsprechen.

Das zweite Semester dient dazu, die gewöhnlichen Schulexperimente vorzuzeigen und einzuüben. Hier lernt der zukünftige Lehrer die Bedingungen zum Glücken der Versuche und zugleich die einfachsten und die delicatesten Mittel der physikalischen Experimentirkunst durch eigenen Gebrauch kennen. Im letzten Cursus erhalten je zwei Schüler die Aufgabe, irgend eine bedeutungsvolle, Nachdenken und Geschick erfordernde Arbeit eines oder mehrerer grossen Meister der Physik zu wiederholen, wie z. B. den Widerstand flüssiger Leiter, die Intensität des thermoelektrischen Stroms, des Erdmagnetismus, die Brechungsexponenten verschiedener Lösungen u. s. w. zu bestimmen, nachdem sie vorher die Prüfung in der einschlägigen Literatur bestanden haben. Um endlich den Schlussstein einzufügen, hält Herr von Ettingshausen unentgeltlich Vorträge über die Art und Weise, die schwierigen und fundamentalen Sätze der Mechanik durch so einfache Mittel, wie sie den Gymnasiasten zugänglich sind, zu beweisen und anschaulich hinzustellen.

Möchte diese segensreiche Anstalt in Oesterreich nie geringere Anerkennung und Unterstützung finden, als ihr jetzt zu Theil wird, und möchte, was nicht minder wünschenswerth ist, diese Anstalt andern deutschen Staaten als Muster vorleuchten, damit endlich die Mutter aller philosophischen und praktischen Naturwissenschaften zu ihrer vollen Geltung und Ausbreitung komme. Nicht ohne Bedeutung für den aus der Anstalt erwachsenden Nutzen ist es wohl, dass die physikalischen Entdeckungen meist nicht mit prächtigen Instrumenten, sondern mit solchen gemacht werden, die der Forscher sich selbst zusammenstückt.

---

## Polygonometrie.

**Lehrbuch der ebenen Polygonometrie, als Vorbereitungs-Wissenschaft zu den Vorlesungen über praktische Geometrie an technischen Instituten von Stephan von Krusper, supplirendem Professor der höheren Mathematik und praktischen Geometrie an der k. k. Josephs-Industrieschule zu Ofen. Mit 27 in den Text gedruckten Figuren in Holzschn. Ofen. Schröpfer. 1856. 8.**

Diese sehr deutlich verfasste Schrift hat, wie ihr Titel schon besagt, hauptsächlich den Zweck, als Vorbereitungs-Wissenschaft zu den Vorlesungen über Geodäsie zu dienen, dabei aber die Polygonometrie doch durchaus als selbstständige Wissenschaft darzustellen und bei der Darstellung grösste wissenschaftliche Strenge und Allgemeinheit zu erreichen, zugleich auch die allgemeinen Aufgaben durch eine grössere Anzahl vollständig durchgeführter numerischer Beispiele zu erläutern. Wir glauben, dass der Herr Verfasser diese Zwecke recht gut erreicht hat, und empfehlen die auf nur 59 Seiten manches Lehrreiche enthaltende Schrift daher zu allgemeiner Beachtung. Die verschiedenen möglichen Fälle hat der Herr Verfasser bei den einzelnen Aufgaben überall sorgfältig zu unterscheiden gesucht und einer besonderen Behandlung unterworfen. Besonders hingewiesen verdient noch auf den zweiten Abschnitt zu werden, in welchem der Herr Verfasser der praktischen Anwendung dadurch einen besonderen Dienst erweist, dass er mit Hülfe der Differentialrechnung, deren Anwendung ihm der nächste Zweck seiner Schrift gestattete, da, wie er in der Vorrede sagt, „die höhere Mathematik an allen technischen Lehranstalten der österreichischen Monarchie gelehrt, an der k. k. Josephs-Industrieschule zu Ofen aber ausserdem noch als ein Vorstudium der praktischen Geometrie angesehen wird" den Einfluss

untersucht, welchen Fehler in den Bestimmungsstücken auf die aus denselben gezogenen Resultate ausüben, bei welchen Entwickelungen er bis zu Gliedern der zweiten Ordnung geht. Eben so verdient endlich auch der dritte Abschnitt nach unserer Meinung besondere Beachtung, weil der Herr Verfasser in demselben die Mittel angiebt, durch welche es möglich wird, in den Daten begangene gröbere Fehler, die sich dadurch kund geben, dass aus den gegebenen Stücken gar kein Polygon möglich ist, aufzufinden und zu verbessern, ohne die ganze Messung zu wiederholen, wobei natürlich auch die Controlmessungen besonders besprochen werden. Man wird aus diesen kurzen Angaben ersehen, dass die Schrift jedenfalls besonders für Praktiker lehrreich ist und denselben vorzugsweise zur Beachtung empfohlen zu werden verdient.

---

## Praktische Mechanik.

**Die Bestimmung der Form und Stärke gewölbter Bogen mit Hülfe der hyperbolischen Functionen. Von Dr. W. Ligowski. Besonderer Abdruck aus der Zeitschrift für Bauwesen. Jahrgang 1854. Verlag von Ernst und Korn. Berlin. 4.**

Die Anzeige dieser verdienstlichen Abhandlung, die auch ein ein mathematisches Interesse darbietet, ist durch zufällige Umstände verzögert worden. Indem wir dieselbe jetzt nachholen und in Folgenden den Hauptinhalt angeben, empfehlen wir dieselbe zugleich der Beachtung, namentlich deshalb, weil sie eine Anwendung einer interessanten Theorie der reinen Analysis, nämlich der Theorie der hyperbolischen Functionen, auf einen wichtigen Gegenstand der Mechanik enthält und darin ihr Hauptverdienst beanspruchen darf. Der Hauptinhalt ist folgender: §. 1. Einleitung. Kurze Theorie der hyperbolischen Functionen. (Durch Vorausschickung dieser Theorie wird das Verständniss der Abhandlung namentlich für Praktiker wesentlich erleichtert.) §. 2. Anwendungen der hyperbolischen Functionen. In diesem Paragraphen giebt der Herr Verfasser mit Hülfe der genannten Functionen eine kurze Untersuchung über die Formen und Spannungen der nach irgend einem Gesetze belasteten Ketten und Gewölbe. — §. 3. Die Gewölbe nach der Theorie von **Hagen**. In diesem Paragraphen folgt der Herr Verfasser, wie er selbst sagt, fast wörtlich dem Vortrage von **Hagen**, und ist nur in der Rechnung seinen eigenen Weg gegangen. — Angehängt ist eine auch in rein mathematischer Beziehung recht verdienstliche Tafel der hyper-

**bolischen Sinus. — Möge der Abhandlung die verdiente Beachtung zu Theil werden!**

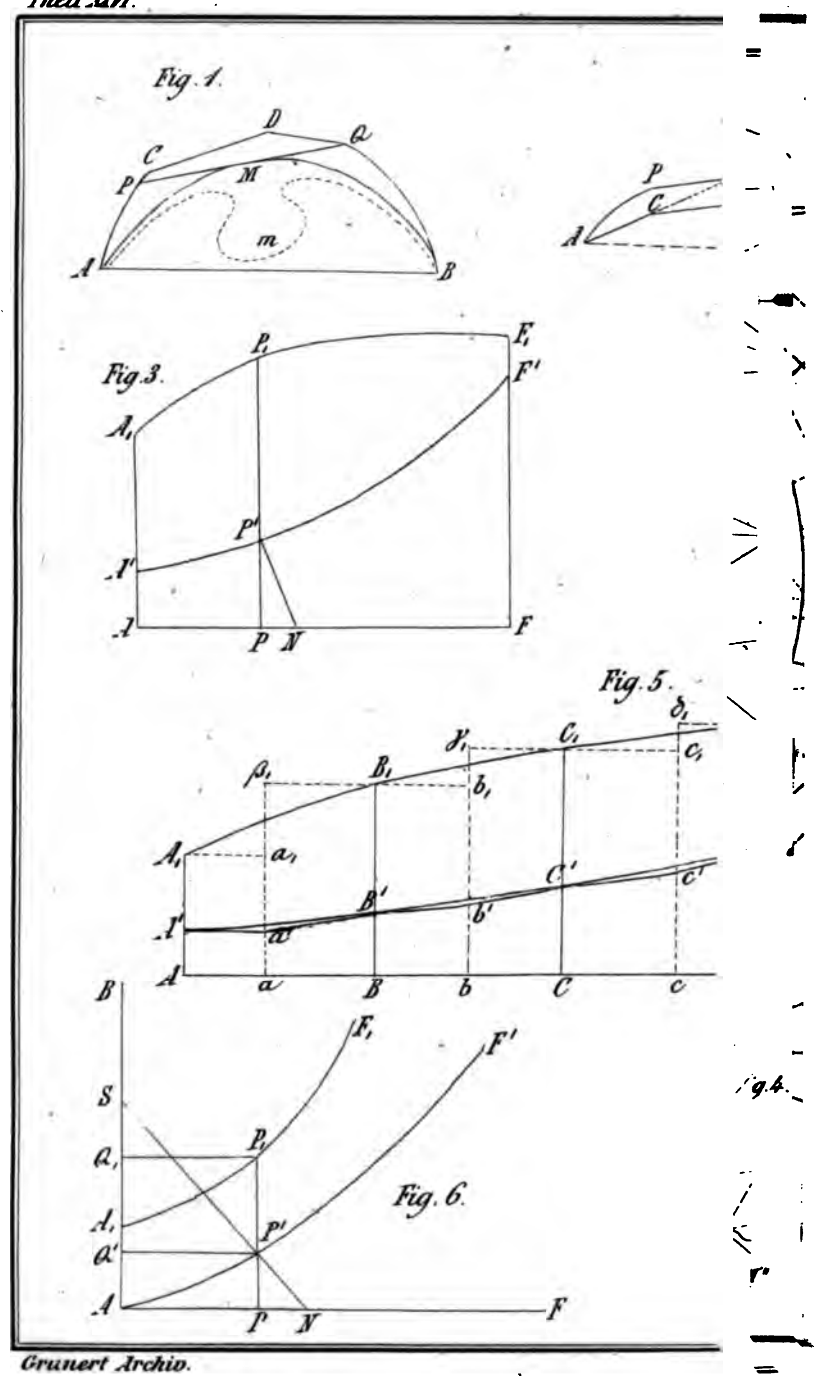
---

## Astronomie.

**Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Nach dem Befehle Seiner k. k. apost. Majestät auf öffentliche Kosten herausgegeben von Carl von Littrow, Director der Sternwarte, o. ö. Professor der Astronomie an der Wiener Universität, u. s. w. Dritter Folge fünfter Band. Jahrgang 1855. Wien. Wallisbauser. 1856. 8.**

Die k. k. Sternwarte in Wien fährt in ihren Publicationen regelmässiger fort als die meisten übrigen astronomischen Anstalten, und jeder Band bringt einen neuen Schatz von Beobachtungen. Dass sich der Director der Sternwarte, Herr C. v. Littrow, durch diese so regelmässigen Publicationen um die Wissenschaft fortwährend sehr verdient macht, ist schon so oft in diesen literarischen Berichten hervorgehoben worden, dass es unnütz sein würde, darüber noch weiter ein Wort zu verlieren; ausserdem ist es ja bekannt und anerkannt genug, dass die regelmässige Veröffentlichung der Beobachtungen seiner Sternwarte, namentlich aber die so sehr verdienstvolle Herausgabe von Piazzi's Storia Celeste, zu welcher im IXten Bande der Denkschriften der matematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der kais. österreichischen Akademie der Wissenschaften Nachträge erschienen sind (m. s. Literar. Ber. Nr. XCIX. S. 10.), der Astronomie schon mache schöne Frucht getragen hat (m. s. z. B. die schöne Arbeit von C. A. F. Peters über die eigene Bewegung des Sirius in den astronom. Nachr. Thl. XXXII. S. 9.). Der vorliegende Band der „Annalen" enthält die Beobachtungen am Meridiankreise vom 4. Februar 1841 bis 14. October 1846. Wegen einiger Reparaturen dienten häufig das Universalinstrument und ein Steinheil'sches Mittagsrohr mit Fernrohr in der Axe, über welches letztere die Anstalt durch die Güte des Eigenthümers dieses schönen Instruments, Sr. Exc. des Herrn Grafen Franz Colloredo-Wallsee, verfügte, für die Zeitbestimmungen, welche ihres zu speziellen Interesses wegen in den Annalen nicht mitgetheilt wurden. Möge die Wiener Sternwarte mit diesen so anerkennungswerthen regelmässigen Publicationen unausgesetzt fortfahren; der Gewinn für die Wissenschaft wird nicht ausbleiben

---


Fig. 1.
D
Q
C
P
M
m
A
B
P
C
A
Fig. 3.
P,
E,
F'
A,
P'
A'
A
P
N
F
Fig. 5.
δ,
γ,
C,
c,
β,
B,
b,
A,
a,
C'
c'
B'
b'
A'
a'
A
a
B
b
C
c
B
F,
F'
S
Q,
P,
Fig. 6.
A,
P'
Q'
A
P
N
F
Fig. 4.

